

L'effet d'une structuration spatiale et de la diffusion sur la performance d'un chemostat

I. HAIDAR

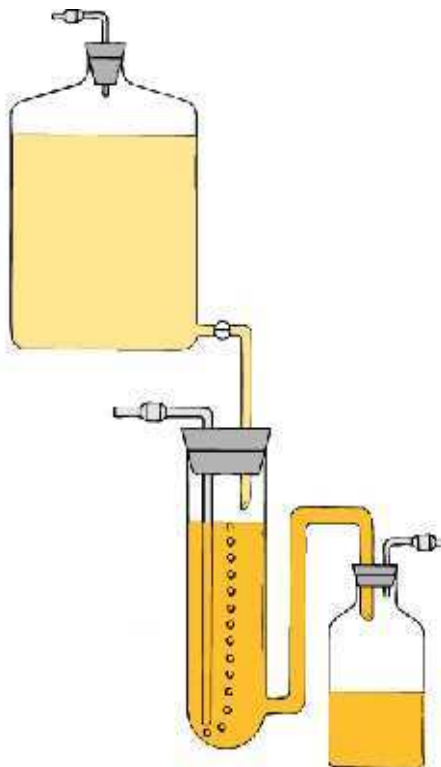
INRA-INRIA-MODEMIC, UMR MISTEA

12 Mai 2011

A. RAPAPORT & F. GERARD

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ 🔍 ↻

Chemostat



$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\frac{\mu(S)}{y}X + \frac{Q}{V}(S - S_{in}) \\ \dot{X} &= \mu(S)X - \frac{Q}{V}X\end{aligned}$$

Un chemostat.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ 🔍 ↻

Les modèles

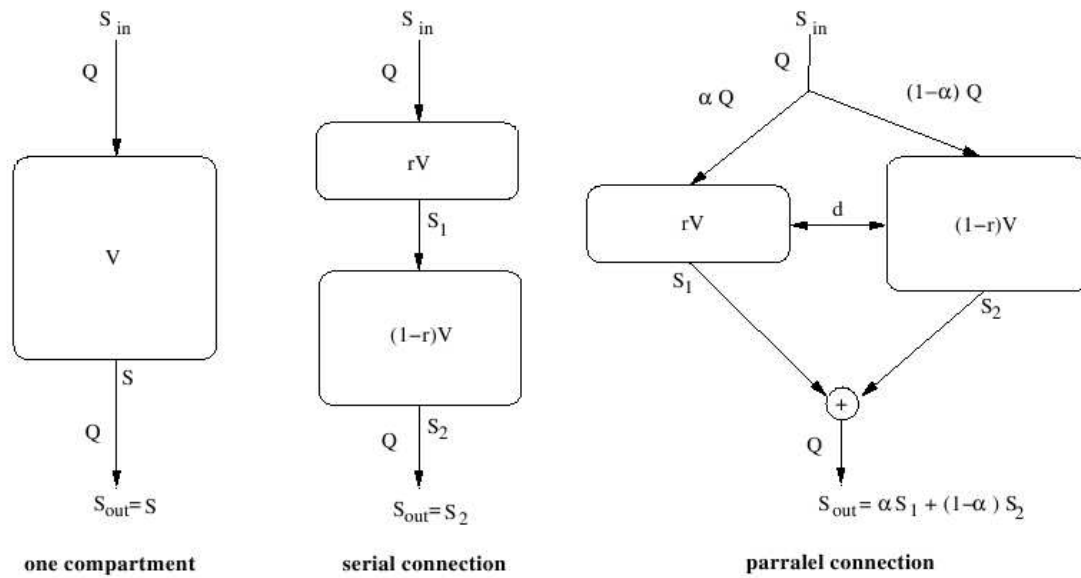


Figure 1: The set of configurations under investigation.

Résultats

Configuration en Parallèle
a la meilleure performance

Configuration en série
a la meilleure performance

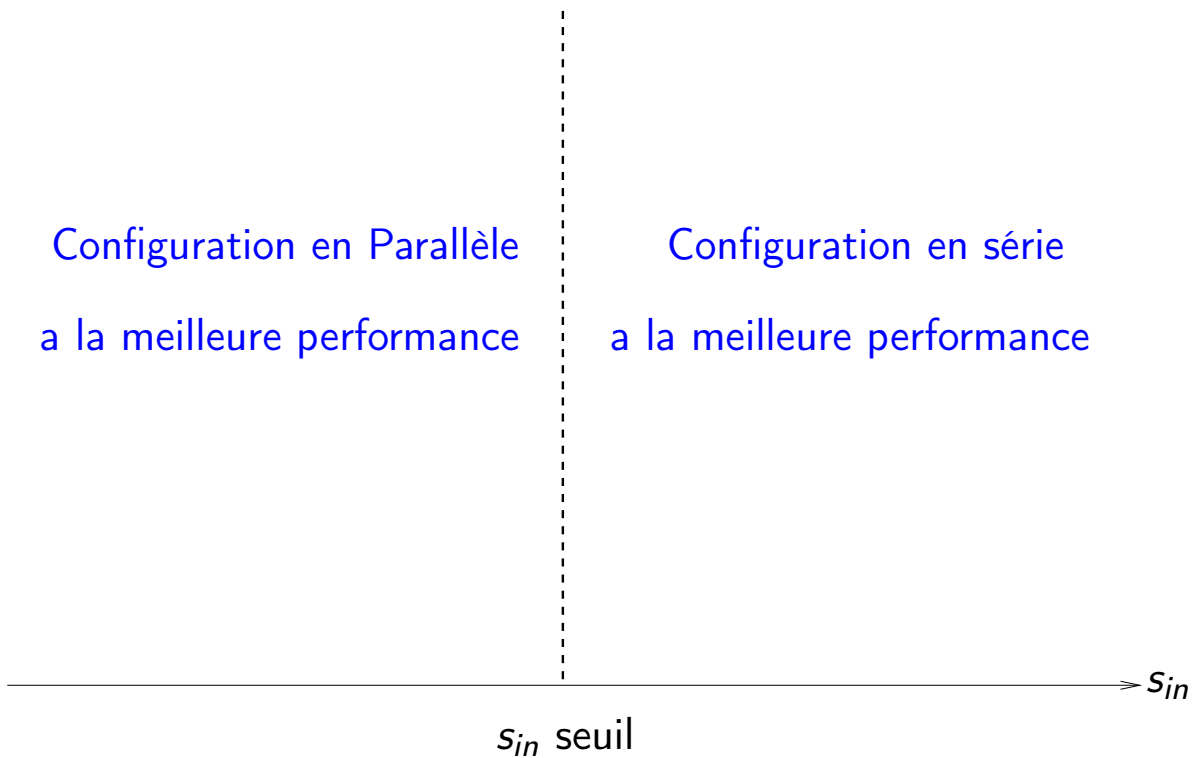


Figure 2: Best performance

Configuration avec un seul compartiment

$$\begin{cases} \dot{s} &= -sX + s_{in} - s \\ \dot{x} &= sX - x \end{cases}$$

L'équilibre non trivial est $(1, s_{in} - 1)$ sous la condition $s_{in} > 1$. Donc on a

$$s_{out}^* = 1.$$



Connexion en série de deux compartiments

$$\begin{cases} \dot{s}_1 &= -s_1x_1 + \frac{1}{r}(s_{in} - s_1) \\ \dot{x}_1 &= s_1x_1 - \frac{1}{r}x_1 \\ \dot{s}_2 &= -s_2x_2 + \frac{1}{1-r}(s_1 - s_2) \\ \dot{x}_2 &= s_2x_2 + \frac{1}{1-r}(x_1 - x_2) \end{cases} \quad (1)$$

avec $r = V_1/V$.

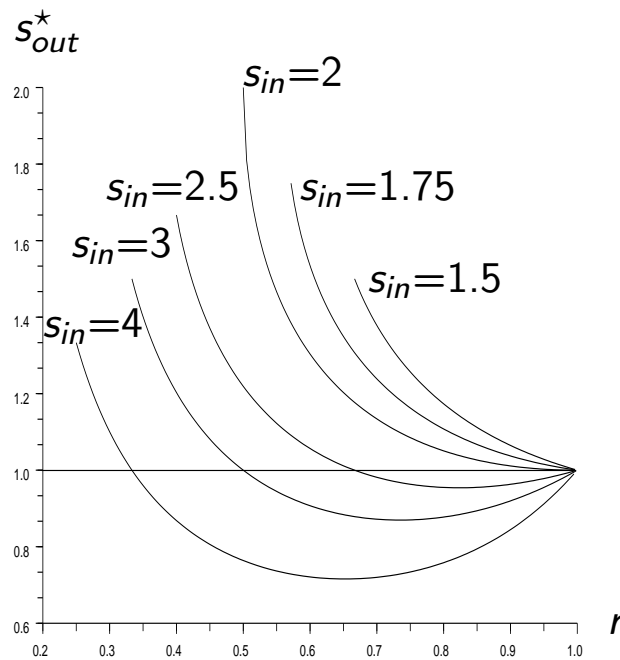
Proposition

Pour $s_{in} > 1/r$, (1) admet dans le positif quadrant un unique équilibre globalement exponentiellement stable $(s_1^*, x_1^*, s_2^*, x_2^*)$. De plus, on a

$$s_{out}^* < 1 \iff s_{in} > 1 + 1/r.$$



Simulations numériques



serial connection



Connexion en parallèle de deux compartiments

$$\begin{cases} \dot{s}_1 &= -s_1 x_1 + \frac{\alpha}{r}(s_{in} - s_1) + \frac{d}{r}(s_2 - s_1) \\ \dot{x}_1 &= s_1 x_1 - \frac{\alpha}{r} x_1 + \frac{d}{r}(x_2 - x_1) \\ \dot{s}_2 &= -s_2 x_2 + \frac{1-\alpha}{1-r}(s_{in} - s_2) + \frac{d}{1-r}(s_1 - s_2) \\ \dot{x}_2 &= s_2 x_2 + \frac{1-\alpha}{1-r}(x_1 - x_2) + \frac{d}{1-r}(x_1 - x_2) \end{cases} \quad (6)$$

où s_{out} est donné par

$$s_{out} = \alpha s_1 + (1 - \alpha) s_2.$$

- ▶ $\alpha_1 = \frac{\alpha}{r}, \alpha_2 = \frac{1-\alpha}{1-r}$
- ▶ $\alpha_1 < \alpha_2$



Connexion en parallèle de deux compartiments

- ▶ Si $d = 0$ alors $s_i^* = \min(\alpha_i, s_{in})(i = 1, 2)$.
- ▶ Si $d > 0$

$$\phi_2(s_1) = s_1 + \frac{r}{d}(s_{in} - s_1)\left(s_1 - \frac{\alpha}{r}\right),$$

$$\phi_1(s_2) = s_2 + \frac{1-r}{d}(s_{in} - s_2)\left(s_2 - \frac{1-\alpha}{1-r}\right),$$

Proposition

Pour $s_{in} > 1$ et $d > 0$, il existe un unique équilibre $(s_1^*, x_1^*, s_2^*, x_2^*)$ de (6) dans \mathbb{R}_+^4 , où (s_1^*, s_2^*) est l'unique solution du système

$$s_2^* = \phi_2(s_1^*) \text{ et } s_1^* = \phi_1(s_2^*)$$

dans $(0, s_{in}) \times (0, s_{in})$, avec $x_i^* = s_{in} - s_i^*(i = 1, 2)$.



Connexion en parallèle de deux compartiments

Preuve (existence et unicité)

- ▶ $s_i^* + x_i^* = s_{in}(i = 1, 2)$.



$$\begin{cases} \phi_2(s_1^*) = s_2^* \\ \phi_1(s_2^*) = s_1^* \end{cases}$$



$$g(s_1) = \phi_1(\phi_2(s_1)) - s_1.$$



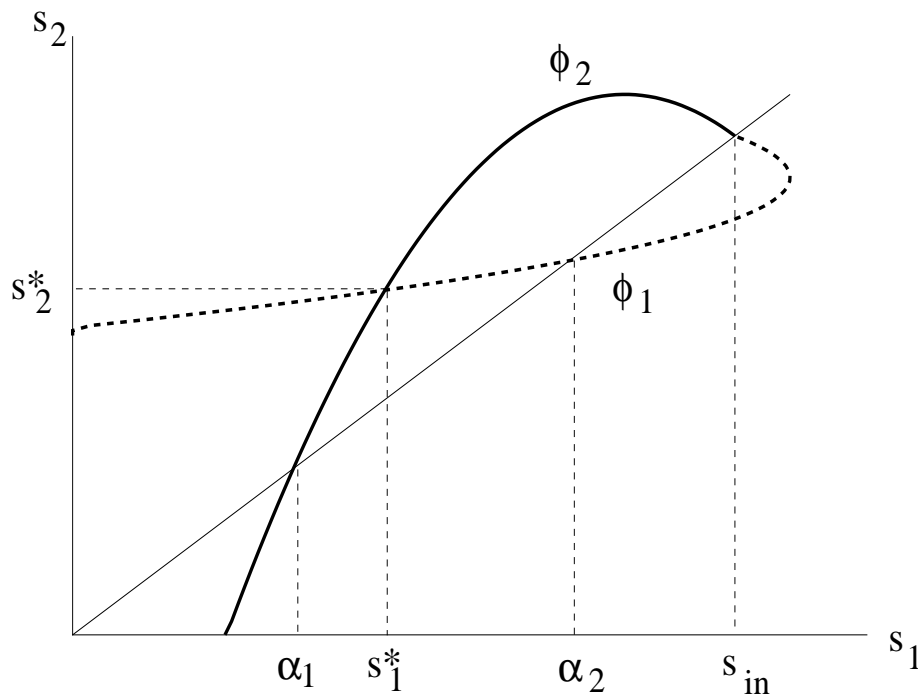
$$g(s_1) = 0.$$



Connection en parallèle de deux compartiments



ϕ_1 et ϕ_2 sont toutes les deux concaves.



Graphical determination of steady states (when $\alpha_1 < \alpha_2 < s_{in}$)



Connection en parallèle de deux compartiments

Proposition

Pour tout $s_{in} > 1$ et $d > 0$, toute trajectoire de (6) avec une condition initiale dans D tel que $x_1(0) > 0$ et $x_2(0) > 0$ converge exponentiellement vers l'unique équilibre non trivial $(s_1^*, x_1^*, s_2^*, x_2^*)$ donné dans la proposition précédente.

Preuve

- ▶ $D = \mathbb{R}_+^4$ est invariant par (6).
- ▶ $z_i = s_{in} - s_i - x_i, i = 1, 2$.

$$\dot{z} = A_p z \text{ avec } A_p \text{ matrice de Hurwitz.}$$

- ▶ Toute solution de (6) dans D converge exponentiellement vers

$$K = \{(s_1, x_1, s_2, x_2) \in D; s_1 + x_1 = s_{in} \text{ et } s_2 + x_2 = s_{in}\}$$

$$\begin{cases} \dot{s}_1 &= s_1(z_1(t) + s_1 - s_{in}) + \alpha_1(s_{in} - s_1) + \frac{d}{r}(s_2 - s_1) \\ \dot{s}_2 &= s_2(z_2(t) + s_2 - s_{in}) + \alpha_2(s_{in} - s_2) + \frac{d}{1-r}(s_1 - s_2) \end{cases}$$



Connection en parallèle de deux compartiments

$$\Delta = [0, s_{in}] \times [0, s_{in}].$$

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = (s_{in} - s_1)(\alpha_1 - s_1) + \frac{d}{r}(s_2 - s_1) \\ \dot{s}_2 = (s_{in} - s_2)(\alpha_2 - s_2) + \frac{d}{1-r}(s_1 - s_2) \end{cases} \quad (8)$$

- ▶ (8) admet deux équilibres, $E_1 = (s_1^*, s_{in} - s_1^*, s_2^*, s_{in} - s_2^*)$ et $E_2 = (s_{in}, 0, s_{in}, 0)$
- ▶ E_1 est localement stable et E_0 est un col.



Connection en parallèle de deux compartiments

- ▶ À l'intérieur de Δ il n'y a pas des orbites périodiques pour (8).
- ▶ Les trajectoires de (7) convergent vers E_1 ou bien elles sont absorbées par $\partial\Delta$.
- ▶ $\partial\Delta - E_2$ est répulsive pour le système globale (6).



$$V(x_1, x_2) = \min(rx_1 + (1-r)x_2, x_1)$$

- ▶ Stabilité exponentielle de l'équilibre non-trivial

$$\begin{bmatrix} A_p & 0 \\ * & J^* \end{bmatrix} \quad \text{with} \quad J^* = \begin{bmatrix} -\frac{d}{r}\phi_2'(s_1^*) & \frac{d}{r} \\ \frac{d}{1-r} & -\frac{d}{1-r}\phi_1'(s_2^*) \end{bmatrix}$$



Connection en parallèle de deux compartiments

$$d \mapsto s_{out}^* = \alpha s_1^* + (1 - \alpha) s_2^*$$

Lemme

$$s_{out}^*(0) \geq 1 \Leftrightarrow s_{in} \geq s_{in}^0 = \frac{r - \alpha^2}{r(1 - \alpha)}$$

avec $s_{in}^0 \in (1, 2)$

Lemme

Pour $s_{in} > 1$, l'équilibre non trivial vérifie

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} s_1^*(d) = \lim_{d \rightarrow +\infty} s_2^*(d) = \lim_{d \rightarrow +\infty} s_{out}^*(d) = 1.$$



Connection en parallèle de deux compartiments

Proposition

Supposant que $\alpha_1 < \alpha_2$.

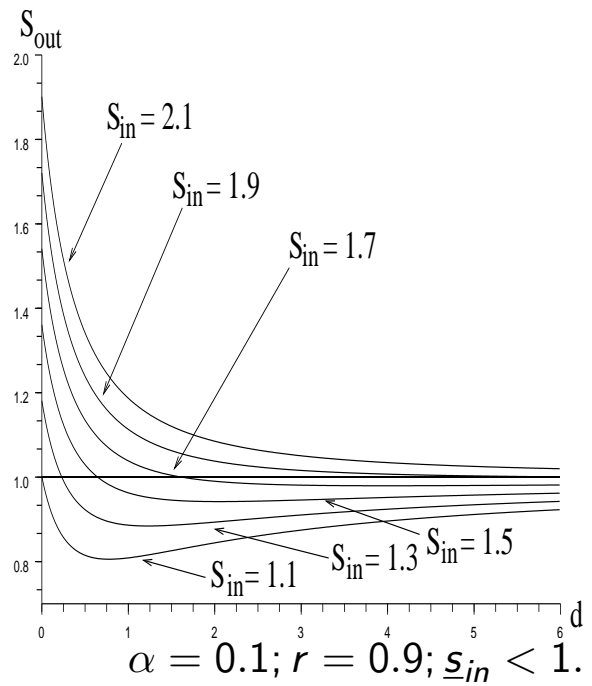
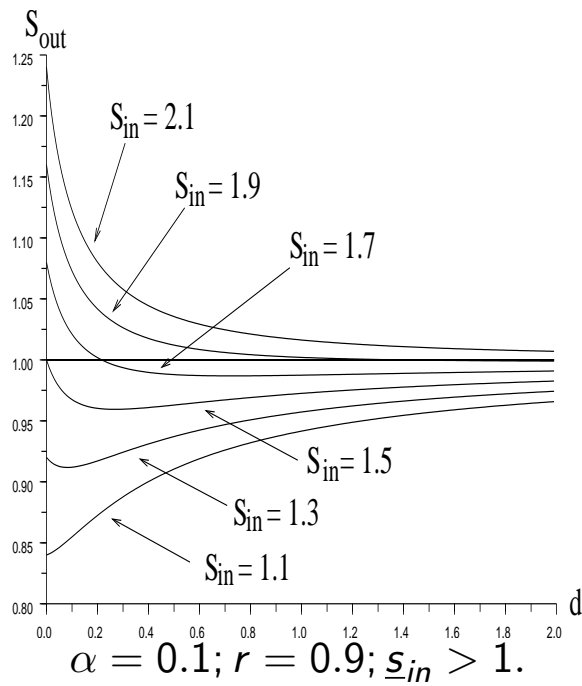
- 1 Pour $s_{in} \geq 2$, la fonction $d \mapsto s_{out}^*$ est décroissante et $s_{out}^* > 1$ pour tout $d \geq 0$.
- 2 Pour $s_{in} < 2$, la fonction $d \mapsto s_{out}^*$ admet un minimum en un $d^* < +\infty$ qui est strictement plus petit que un. De plus, on a

$$s_{in} > \underline{s}_{in} = 2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \implies d^* > 0$$

avec $\underline{s}_{in} < \min(2, \alpha_2)$.



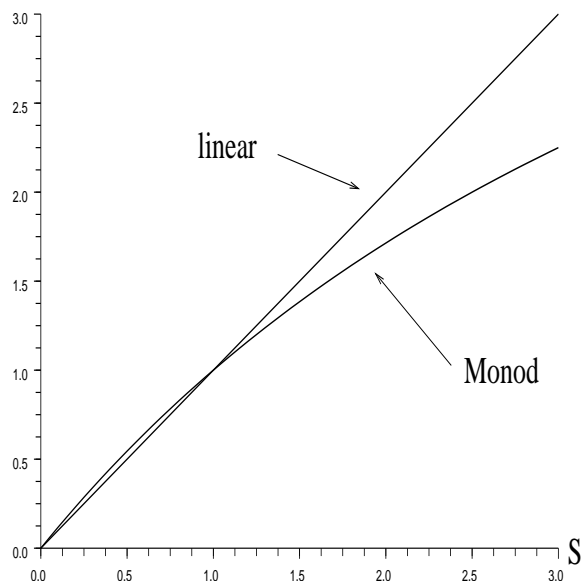
Simulations numériques



parallel connection



Cas de Monod

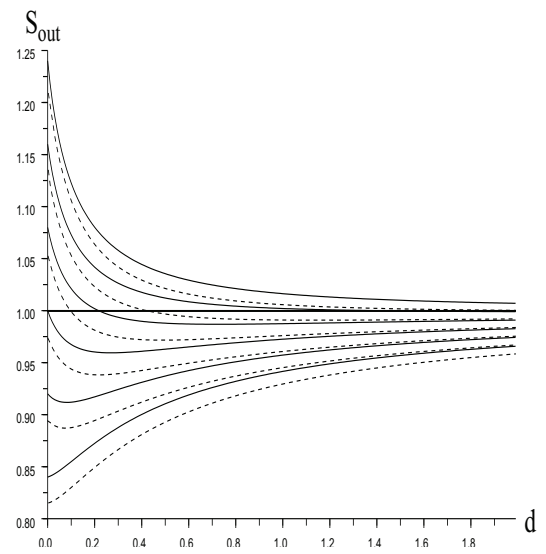
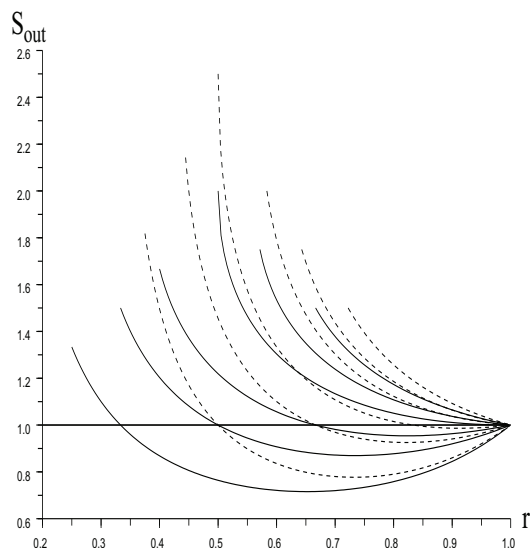


$$\mu(s) = \frac{6s}{5 + s}$$

Linear and Monod growth functions.



Cas de Monod



Monod (dashed) and linear (plain)



Conclusion

Pour un chemostat de volume V et pour un débit Q donné, on montre qu'il existe un s_{in} seuil tel que au dessus et en dessous de ce seuil, la configuration en série et en parallèle admet respectivement la meilleure performance.



MERCI