# Dynamique des Solides et des Structures

5<sup>ième</sup> édition

octobre 2016

### Sylvain Drapier

Département Mécanique et Procédés d'Elaboration Centre Science des Matériaux et des Structures & UMR CNRS 5146 École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne

> 158, cours Fauriel 42023 Saint-Étienne Cedex 2

bureau J3-15, tél :00-79





### **Introduction générale**

Dans les problèmes traités dans le cadre de la mécanique *statique* des solides et des structures, on suppose que le chargement imposé (déplacement, efforts, température, ...) passe progressivement de sa valeur initiale à sa valeur finale faisant ainsi passer le milieu sollicité d'une configuration initiale à sa configuration finale. Les paramètres à calculer (contraintes, déformations, déplacements, réactions, ...) sont relatifs à l'état final fixe et par conséquent *ne dépendent pas du temps*.

Dans le cadre de la *dynamique* au contraire les chargements imposés, ainsi que les propriétés géométriques et matériaux, peuvent *varier dans le temps*. De plus, même dans la configuration initiale le milieu peut être caractérisé par des fonctions du temps. Les paramètres à calculer sont donc également des fonctions du temps, et de nouvelles grandeurs apparaissent pour caractériser le *mouvement*, c'est-à-dire la variation de configuration dans le temps. Ce sont les paramètres cinématiques tels que les *vitesses*, les *accélérations*, les *fréquences*, ... qui n'existent pas dans le cas de la statique.

Ce document est le support du cours consacré à la *dynamique des corps rigides et des corps déformables*. Ce cours se décompose en 4 grandes parties complétées par des annexes consacrées aux rappels sur la mécanique générale, la transformée de Laplace, et le calcul des variations.

Dans la partie 1, après une introduction de la dynamique des corps, l'exemple le plus simple de système mécanique sera étudié. Á travers cet oscillateur élémentaire, les grands types de réponse dynamiques seront mis en évidence. Le comportement de cette structure discrète à un degrés de liberté (*ddl*) sera étendu dans la partie 3 aux systèmes à *n ddl* en utilisant les résultats et méthodes introduits dans la partie 2 consacrée à la *Dynamique analytique des systèmes discrets*. Finalement, le cas des solides déformables sera traité dans la partie 4, en utilisant les résultats établis pour les corps indéformables, complétés par les notions connues de *mécanique des milieux* 

*continus*. La fin de cette partie sera consacrée à l'*Approximation des systèmes continus par des méthodes cinématiques*.



Visualisation du premier mode propre de vibration d'un modèle de Rafale A. Logiciel ELFINI de Dassault Aviation



Propagation d'une onde de compression dans une barre suite à un choc à son extrémité libre (a et b) et réflexion de cette onde (c et d). Logiciel Abaqus.

## **Table des matières**

Ι	Со	nnaiss	ances de base : Rappels et oscillateur élémentaire	1
1	Intr	oductio	on à la dynamique des structures	5
	1.1	Objec	tif et champ d'application	5
	1.2	Source	es d'excitation, réponse des structures	6
		1.2.1	Sources d'excitation	6
		1.2.2	Réponse des structures	7
2	Exe	mples i	ntroductifs - Rappels Généraux	9
	2.1	Systèr	ne mécanique fermé - Application à un système masse-ressort à	
		1 ddl		9
		2.1.1	Mise en équation du système	10
		2.1.2	Réponse du système	13
	2.2	Systèr	ne mécanique forcé et phénomène de résonance - Application à	
		un sys	tème masse-ressort amorti	13
		2.2.1	Mise en équation	13
		2.2.2	Réponse du système	15
		2.2.3	Interprétation physique de la résonance	16
3	Inte	rprétat	ion du comportement de l'oscillateur élémentaire	19
	3.1	Princi	pe de d'Alembert	19
	3.2	L'osci	llateur élémentaire de la dynamique et sa fonction de transfert	20
		3.2.1	Équations du mouvement	20
		3.2.2	Fonction de transfert et réponse impulsionnelle	20
	3.3	Répon	se générale de l'oscillateur	23
		3.3.1	Étude des régimes libres	23
		3.3.2	Exemples de régimes forcés	24
II	D	ynami	que analytique des systèmes discrets	29
1	Prir	ncipe de	es travaux virtuels	31

	1.1	Cas du point matériel	31
	1.1		33
	1.2	1.2.1 Ligisons holonômes	33
		1.2.2 Ligisons non holonômes	21
	12	Notion de coordonnée généralisée	24 25
	1.5		55
2	Prin	cipe de Hamilton - Équations de Lagrange	39
	2.1	Énergies potentielles et cinétiques	39
	2.2	Énoncé du principe de Hamilton	40
	2.3	Forme proposée par Lagrange	41
		2.3.1 Structure de l'énergie cinétique	42
		2.3.2 Conservation de l'énergie dans un système à liaisons scléronômes	45
	2.4	Classification des forces généralisées	46
		2.4.1 Forces intérieures	46
		2.4.2 Forces extérieures	47
	2.5	Équations de Lagrange dans le cas général	48
П	ιο	scillations des systèmes à N degrés de liberté	53
1	Con	cepts de stabilité des équilibres	57
	1.1	Définition d'un équilibre	58
	1.2	Petites oscillations autour d'une configuration d'équilibre	58
	1.3	Stabilité d'un équilibre paramétrique	59
	1.4	Linéarisation des énergies	60
	1.5	Équations des oscillations libres - Linéarisation du pendule double	
		avec ressort de rappel	61
2	Mod	les normaux de vibration	
			63
	2.1	K et M-Orthogonalité des modes propres	<b>63</b> 64
	2.1 2.2	K et M-Orthogonalité des modes propres	<b>63</b> 64 66
	2.1 2.2	<ul><li>K et M-Orthogonalité des modes propres .</li><li>Oscillations libres résultant de conditions initiales non-homogènes .</li><li>2.2.1 Exemple de calcul modal : Pendule double avec masses ponc-</li></ul>	<b>63</b> 64 66
	2.1 2.2	<ul> <li>K et M-Orthogonalité des modes propres</li></ul>	<b>63</b> 64 66
	<ul><li>2.1</li><li>2.2</li><li>2.3</li></ul>	<ul> <li>K et M-Orthogonalité des modes propres</li></ul>	<b>63</b> 64 66 67 69
	<ul><li>2.1</li><li>2.2</li><li>2.3</li></ul>	<ul> <li>K et M-Orthogonalité des modes propres</li></ul>	<ul> <li>63</li> <li>64</li> <li>66</li> <li>67</li> <li>69</li> <li>70</li> </ul>
	<ul><li>2.1</li><li>2.2</li><li>2.3</li></ul>	<ul> <li>K et M-Orthogonalité des modes propres</li></ul>	<b>63</b> 64 66 67 69 70
	2.1 2.2 2.3	<ul> <li>K et M-Orthogonalité des modes propres</li></ul>	<ul> <li>63</li> <li>64</li> <li>66</li> <li>67</li> <li>69</li> <li>70</li> <li>71</li> </ul>
	<ul><li>2.1</li><li>2.2</li><li>2.3</li><li>2.4</li></ul>	<ul> <li>K et M-Orthogonalité des modes propres</li></ul>	<ul> <li>63</li> <li>64</li> <li>66</li> <li>67</li> <li>69</li> <li>70</li> <li>71</li> <li>74</li> </ul>
	<ul><li>2.1</li><li>2.2</li><li>2.3</li><li>2.4</li></ul>	<ul> <li>K et M-Orthogonalité des modes propres</li></ul>	<ul> <li>63</li> <li>64</li> <li>66</li> <li>67</li> <li>69</li> <li>70</li> <li>71</li> <li>74</li> <li>75</li> </ul>
	<ul><li>2.1</li><li>2.2</li><li>2.3</li><li>2.4</li></ul>	<ul> <li>K et M-Orthogonalité des modes propres</li></ul>	<ul> <li>63</li> <li>64</li> <li>66</li> <li>67</li> <li>69</li> <li>70</li> <li>71</li> <li>74</li> <li>75</li> <li>77</li> </ul>
	<ul><li>2.1</li><li>2.2</li><li>2.3</li><li>2.4</li></ul>	<ul> <li>K et M-Orthogonalité des modes propres</li></ul>	<ul> <li>63</li> <li>64</li> <li>66</li> <li>67</li> <li>69</li> <li>70</li> <li>71</li> <li>74</li> <li>75</li> <li>77</li> <li>79</li> </ul>

	2.6	Fonction de transfert	31
		2.6.1 Analogie avec l'oscillateur élémentaire	51
		2.6.2 Signification physique	52
		2.6.3 Domaine temporel	52
		2.6.4 Application au système à 2 masses + ressorts	3
3	Mét	odes variationnelles de caractérisation des valeurs propres 8	5
	3.1	Le quotient de Rayleigh	6
		3.1.1 Recherche itérative des modes et valeurs propres 8	57
		3.1.2 Application au pendule double avec masses ponctuelles 9	1
	3.2	Modes et fréquences propres de vibration d'un système soumis à des	
		contraintes : principe de monotonic	94
4	Osci	ations amorties des systèmes à <i>n</i> degrés de liberté 9	97
	4.1	Oscillations amorties en terme de modes propres du système conser-	
		vatif associé	8
	4.2	Analyse des systèmes amortis visqueux dans l'espace d'état 10	0
		k.2.1 Étude du cas homogène	)()
		I.2.2 Étude du cas non homogène	12
		A.2.3 Réponse à une excitation harmonique	)2

# IV Systèmes continus et approximations par des méthodes cinématiques105

<ul> <li>1.1 Principe de Hamilton</li></ul>		109 112
<ul> <li>1.2 Équations d'équilibre</li></ul>		112
1.3 Propagation d'ondes dans un milieu élastique - Notions de ba	ıse	
1.2.1 Équations de Navier		113
		114
1.3.2 Ondes élastiques planes		115
1.3.3 Ondes de surface		116
2 Vibration des poutres et des barres		119
2.1 Introduction		120
		120
<ul><li>2.1 Introduction</li><li>2.2 Équations de la dynamique des poutres droites à plan moyen</li></ul>		120
<ul> <li>2.1 Introduction</li> <li>2.2 Équations de la dynamique des poutres droites à plan moyen</li> <li>2.2.1 Équilibre à partir du PPV</li></ul>	· · · · · ·	120 122 123
<ul> <li>2.1 Introduction</li> <li>2.2 Équations de la dynamique des poutres droites à plan moyen</li> <li>2.2.1 Équilibre à partir du PPV</li> <li>2.2.2 Équations de Lagrange</li> </ul>	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	120 122 123 123
<ul> <li>2.1 Introduction</li> <li>2.2 Équations de la dynamique des poutres droites à plan moyen</li> <li>2.2.1 Équilibre à partir du PPV</li></ul>	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	120 122 123 123 125
<ul> <li>2.1 Infroduction</li> <li>2.2 Équations de la dynamique des poutres droites à plan moyen</li> <li>2.2.1 Équilibre à partir du PPV</li> <li>2.2.2 Équations de Lagrange</li> <li>2.3 Barre en extension</li> <li>2.3.1 Équations de Lagrange</li> </ul>	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	120 122 123 123 125 125
<ul> <li>2.1 Infroduction</li> <li>2.2 Équations de la dynamique des poutres droites à plan moyen</li> <li>2.2.1 Équilibre à partir du PPV</li> <li>2.2.2 Équations de Lagrange</li> <li>2.3 Barre en extension</li> <li>2.3.1 Équations de Lagrange</li> <li>2.3.2 Écriture directe du principe de Hamilton</li> </ul>	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	120 122 123 123 125 125 125

		2.3.4	Remarque concernant la solution générale	128
		2.3.5	Réponse d'une barre sollicitée à son extrémité	129
	2.4	Vibrati	ions transversales d'une corde	132
		2.4.1	Équations d'équilibre	132
		2.4.2	Corde attachée à ses deux extrémités	134
	2.5	Vibrati	ions libres d'une poutre en flexion simple	135
		2.5.1	Équations d'équilibre	135
		2.5.2	Modes et fréquences propres	137
3	Ann	rovima	tion des systèmes continus par des méthodes cinématiques	1/13
9	трр	голша	tion des systemes continus par des methodes emematiques	173
5	3.1	Métho	de de Rayleigh pour les poutres en flexion pure	143
5	3.1 3.2	Métho Métho	de de Rayleigh pour les poutres en flexion pure	143 145
5	3.1 3.2	Métho Métho 3.2.1	de de Rayleigh pour les poutres en flexion pure         de de Rayleigh-Ritz         Poutre encastrée-libre - 2 fonctions de base	143 143 145 146
5	3.1 3.2	Métho Métho 3.2.1 3.2.2	de de Rayleigh pour les poutres en flexion pure	143 145 146 147
5	3.1 3.2 3.3	Métho Métho 3.2.1 3.2.2 La mét	de de Rayleigh pour les poutres en flexion pure	143 145 146 147
5	3.1 3.2 3.3	Métho Métho 3.2.1 3.2.2 La mét 3.3.1	de de Rayleigh pour les poutres en flexion pure	143 143 145 146 147 147 148
5	3.1 3.2 3.3	Métho Métho 3.2.1 3.2.2 La mét 3.3.1 3.3.2	de de Rayleigh pour les poutres en flexion pure	143 145 146 147 147 147 148 149
	3.1 3.2 3.3	Métho Métho 3.2.1 3.2.2 La mét 3.3.1 3.3.2 3.3.3	de de Rayleigh pour les poutres en flexion pure	143 145 146 147 147 147 148 149 150

#### V Annexes

#### A-1Rappels : Cinétique - Dynamique - Énergétique A-1 A-1.1Moments et autres caractéristiques du mouvement des corps . . . . . A-2 A-1.1.1 Centre d'inertie A-2 A-1.1.4 Tenseurs d'inertie pour des géométries courantes . . . . . . . A-4 A-1.4.2 Théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétiqueA-10

#### 155

A-2Transformée de Laplace	A-15
A-2.1Définition	A-15
A-2.2Linéarité	A-16
A-2.3Premier groupe de propriétés fonctionnelles	A-16
A-2.3.1 Transformée de Laplace des dérivées successives de $f(t)$	A-16
A-2.4Second groupe de propriétés fonctionnelles	A-17
A-2.4.1 Théorème du retard	A-17
A-2.4.2 Théorème de composition	A-17
A-2.4.3 Distribution de Dirac	A-18
A-3Calcul des variations	A-21
A-3.1Extrêmum d'une intégrale	A-21
A-3.2Condition d'Euler-Lagrange	A-22
A-3.3Cas où la dérivée seconde intervient	A-23
A-3.4Importance des conditions aux limites	A-23
A-3.5Cas d'une fonctionnelle faisant intervenir des dérivées en temps et en	
espace	A-24
A-3.6Remarque : Indépendance des formes de y dans la fonctionnelle I	A-25

Première partie

\_\_\_\_\_

# Connaissances de base : Rappels et oscillateur élémentaire

Le Chapitre 1 présente de façon générale le champ d'application de la dynamique. Dans le Chapitre 2, une approche "intuitive" permet de rappeler dans un cadre très simple les notions déjà connues telles que les systèmes fermés, les oscillations propres, le principe fondamental de la dynamique, les calculs énergétiques, les réponses forcées. Dans ce cadre l'oscillateur élémentaire est introduit, et le phénomène de résonance est abordé.

Le Chapitre 3 permet de poser plus rigoureusement l'étude des oscillations libres et forcées de l'oscillateur élémentaire. La démarche plus systématique adoptée (transformée de Laplace, fonction de transfert), sera reprise dans les parties suivantes de ce cours où les systèmes plus réalistes seront étudiés avec ces mêmes méthodes et raisonnements.

## - 1 -

# Introduction à la dynamique des structures

#### Sommaire

1.1	Object	tif et champ d'application	5
1.2	Source	es d'excitation, réponse des structures	6
	1.2.1	Sources d'excitation	6
	1.2.2	Réponse des structures	7

Dans ce chapitre, la problématique du comportement dynamique des solides et structures est présentée. Á travers l'exemple de l'*oscillateur élémentaire*, on peut illustrer les grands types de réponses (*sur-amorti*, *critique*, *sous-amorti*) dynamiques d'un système soumis à des excitations variées (*impulsionnelle*, *régime forcé*).

#### **1.1** Objectif et champ d'application

Comme nous l'avons vu dans l'introduction générale, l'étude dynamique d'une structure a pour but essentiel de caractériser les déplacements, les déformations et les contraintes qui règnent au sein de cette structure et qui résultent d'un chargement (thermo-)mécanique quelconque.

En effet, dans de nombreux secteurs industriels, il est primordial de déterminer, pour le dimensionnement et la conception, les niveaux d'efforts que les structures peuvent soutenir, mais également les propriétés *amortissantes* qu'elles peuvent développer. C'est le cas dans les secteurs du transport :

- aéronautique ~>> confort acoustique, vibrations aérodynamiques, vibrations propulseurs, ...
- ferroviaire ~> confort acoustique, chocs de roulement, ...

 automobile ~> confort habitacle, fréquences propres boîtes de vitesse, crash (=dynamique rapide), ...

et dans le secteur du génie civil (séismes, explosions, propagations dynamiques d'ondes, ...)

On distingue deux grands types d'approche des problèmes de dynamique, selon que le chargement est connu ou non :

- chargement connu ~> approche déterministe : explosions, efforts connus impulsionnels ou périodiques, ...
- chargement aléatoire ~> approche non déterministe statistique : choc d'un oiseau en vol pour un avion, impacts de roulement pour les trains, collision de véhicules, séismes, ...

Dans le cadre de ce cours, nous nous restreindrons à la dynamique déterministe. De façon générale, on utilisera une approche *en déplacements*, c'est-à-dire où les déplacements sont les inconnues du problème, par exemple les *calculs de modes propres*. Les déformations et, via la loi de comportement du milieu les contraintes, sont déduites de ces déplacements par simples dérivations en espace.

#### **1.2** Sources d'excitation, réponse des structures

#### **1.2.1** Sources d'excitation

On distingue deux grandes classes de chargements, ils sont *périodiques* ou bien *non périodiques*. Le schéma ci-dessous (figure 1.1.1) représente les divers cas de chargements possibles.



FIGURE 1.1.1 – Différents types de chargements possibles

Si un chargement périodique, agissant pendant un temps suffisamment long (par opposition à *impulsionnel*), ne contient qu'une fréquence (sinusoïde), il est dit *harmonique*. On verra que tout chargement périodique se décompose en la somme de chargements harmoniques.

Pour les chargement non-périodiques, on peut distinguer 2 types : très brefs - de type impulsionnel- et long. La notion de durée étant relative, elle est à comparer aux

périodes caractéristiques (propres) de la structure.

#### 1.2.2 Réponse des structures

Dans leur majorité, les structures répondent de manière linéaire à une sollicitation extérieure (figure 1.1.2) :  $\lambda \times$  chargement =  $\lambda \times$  réponse. On est alors dans le cadre dit des *petites perturbations* (HPP), ce qui permet, par exemple, de linéariser les équations caractérisant l'équilibre.

De plus, au niveau des matériaux constitutifs, on se restreindra à des comportements linéaires, de type loi de Hooke, les contraintes s'exprimant linéairement en fonction des déformations, et inversement. Il faut rappeler que cette linéarité peu s'accommoder de dissipation d'énergie, ce qui donne lieu notamment aux phénomènes d'amortissement.

Notre cadre d'étude se limitera donc aux mouvements vibratoires de faibles amplitudes. Ceci entre naturellement dans le cadre HPP, et les matériaux constitutifs étant linéaires élastiques, la réponse intrinsèque (propre) de la structure restera indépendante du chargement qui s'exerce sur elle.



FIGURE 1.1.2 – Exemple de réponse non-linéaire géométrique : flambage

### - 2 -

# **Exemples introductifs - Rappels Généraux**

#### Sommaire

2.1	Systèn	ne mécanique fermé - Application à un système masse-
	ressor	tà 1 ddl
	2.1.1	Mise en équation du système
	2.1.2	Réponse du système
2.2	Systèn	ne mécanique forcé et phénomène de résonance - Applica-
	tion à	un système masse-ressort amorti 13
	2.2.1	Mise en équation
	2.2.2	Réponse du système
	2.2.3	Interprétation physique de la résonance

# 2.1 Système mécanique fermé - Application à un système masse-ressort à 1 ddl

De façon générale, un système *fermé*, *i.e.* sans *dissipation* et sans *sollicitation extérieure*, ne peut être le siège que d'**oscillations libres**, appelées également **oscillations propres**.

- si le mouvement est périodique, il existe autant de fréquences propres que de *ddl*;
- il peut être nécessaire de linéariser l'équation différentielle pour la résoudre (voir par exemple le cas du pendule double traité ultérieurement dans ce cours)

D'un **point de vue énergétique**, dans un système fermé, il y a *transfert d'énergie potentielle en énergie cinétique* et inversement. Cette notion est **fondamentale** en *mécanique vibratoire*.



FIGURE 1.2.1 – Système masse-ressort.

Bien évidemment, dans la réalité les systèmes ne sont pas parfaits, il sont donc le siège de dissipations d'énergie. L'évolution du système est alors représentée par une courbe déplacement/temps dont l'amplitude diminue, car l'amortissement dissipe les énergies cinétique et potentielle emmagasinées dans le système à l'instant initial  $t_0$ .

#### 2.1.1 Mise en équation du système

Afin d'illustrer les oscillations libres d'un système quelconque, on considère dans cette introduction le cas trivial du comportement dynamique d'une masse suspendue à un ressort (figure 1.2.1). On suppose que dans ce système les efforts s'appliquent au centre de gravité G de la masse, et que seul le mouvement dans la direction  $\vec{x}$  est possible.

#### Principe fondamental de la dynamique

En appliquant le *Principe fondamental de la dynamique (PFD)* à la masse qu'on isole (figure 1.2.1), on obtient le bilan des efforts appliqués au centre de gravité G (voir *Annexes -paragraphe* A-1.4) :

$$\vec{F}_r = -k(l-l_0+u)\vec{x}$$
  

$$\vec{P} = mg\vec{x}$$

$$m\vec{\gamma}_G(t) = m\vec{u}\vec{x}$$
(1.2.1)

où  $l_0$  est la longueur initiale du ressort (position initiale de *G*), *l* la longueur à l'équilibre statique, et u(t) mesure l'écart de position par rapport cet équilibre. *k* est la raideur du ressort, *m* est la masse et  $\gamma_G(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2}$  est l'accélération subie par *G*. On peut alors écrire le PFD qui va traduire l'équilibre des efforts intérieurs et extérieurs du système lorsqu'il est en mouvement (1.2.2a). Il existe par ailleurs une relation complémentaire caractérisant l'équilibre statique (1.2.2b) : à l'état initial du système lorsque la masse

est ajoutée au ressort (voir figure 1.2.1), on suppose les conditions homogènes pour  $t = t_0$ , ( $u(t = t_0) = 0$ ,  $\dot{u}(t = t_0) = 0$ ) :

$$-k(l-l_0+u) + mg = m \ddot{u}$$
(1.2.2a)

$$-k(l-l_0) + mg = 0 (1.2.2b)$$

L'équilibre statique étant réalisé, l'équilibre dynamique du système masse-ressort est caractérisé par l'écart à cet équilibre pour tout instant *t* ultérieur à  $t_0$  grâce à une équation unique qui traduit directement le *PFD* :

$$m\ddot{u} + ku = 0 \tag{1.2.3}$$

#### **Remarque sur le** *PFD*

#### Voir détails Annexes - Paragraphe 1.4

En se plaçant dans un repère galliléen  $(R_0)$ , en tous points d'un solide (S) on a l'égalité entre le torseur des actions extérieures  $\{\tau_{ext\to S}\}$  et le torseur des quantités d'accélérations galliléennes ou absolues  $\{\mathcal{D}_S^a\}$  (1.2.4-a). Si de plus, l'équilibre est considéré en un point fixe par rapport au repère du mouvement  $(R_0)$  et le contenu du système (S) est invariable, le torseur des actions dynamiques  $\{\mathcal{D}_S^a\}$  est directement égal à la dérivée par rapport au temps du torseur cinétique (1.2.4-b, voir également *Annexes - eq.A-1.16*). On a alors 2 équations vectorielles (1.2.4-a) appelées *Théorème de la quantité de mouvement* pour les résultantes et *Théorème du moment cinétique* pour les moments.

#### Principe Fondamental de la Dynamique

$$\{\tau_{ext\to\mathcal{S}}\}_{(A,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0)} = \{\mathcal{D}^a_{\mathcal{S}}\}_{(A,\mathcal{S}/\mathcal{R}_\ell)}$$
(1.2.4a)

$$= \frac{d}{dt} \{ \mathcal{C}_{\mathcal{S}} \}_{(A,\mathcal{S}/\mathcal{R}_0)} \qquad \text{si A est fixe dans } \mathcal{R}_0 \quad (1.2.4b)$$

Il faut noter que si le repère  $(R_0)$  du mouvement n'est pas galliléen, alors le torseur des forces extérieures doit être complété par les effort d'origine inertielle (voir *Annexes* - eq.A-1.18). Dans ce cas plus général, ces équations (1.2.4) sont quelquefois appelées équations universelles de l'équilibre et du mouvement.

La réponse vibratoire du système masse-ressort est la solution u(t) de l'équation différentielle (1.2.3), soit en prenant  $u(t = t_0) = 0$  et  $\dot{u}(t = t_0) = \dot{u}_0$ :

$$u(t) = \frac{\dot{u}_0}{\omega_p} \sin \omega_p t$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f$$
(1.2.5)

avec

—  $\dot{u}_0$  la vitesse initiale à t = 0

—  $\omega_p$  la pulsation propre du système

— et f sa fréquence propre

#### Méthode énergétique

D'un point de vu énergétique, le *théorème de l'énergie cinétique* traduit, pour un système fermé, la conservation lorsque le système est sollicité (voir Annexe 1 - eq.A-1.21). En appliquant à la masse m entre 2 états t = 0 et t, ou de manière équivalente entre  $u_0 = 0$  et u(t) quelconque les abscisses correspondantes <sup>1</sup>, les mêmes équations d'équilibre sont formulées :

$${}_{0}^{u}\mathcal{W}_{int} + {}_{0}^{u}\mathcal{W}_{ext} = \delta_{0}^{u}T \tag{1.2.6}$$

où  ${}_{0}^{u}\mathcal{W}_{int}$  et  ${}_{0}^{u}\mathcal{W}_{ext}$  sont respectivement le travail effectué, entre les instants correspondants à  $u(t = 0) = u_0$  et u(t), par les efforts à l'intérieur et à l'extérieur du système considéré.  $\delta_{0}^{u}T$  est la variation entre les abscisses  $u_0$  et u(t) de l'énergie cinétique du système. Dans notre cas,  ${}_{0}^{u}\mathcal{W}_{int} = 0$  car la masse *m* est indéformable, d'où le théorème de l'énergie cinétique (1.2.6) pour notre système masse-ressort s'écrit :

$$\int_{0}^{u} mgdu + \int_{0}^{u} -k(l-l_{0}+u)du = T_{masse}^{u} - T_{masse}^{u_{0}}$$

$$[mg-k(l-l_{0})]u - k\frac{1}{2}(u^{2}) = \frac{1}{2}m(\dot{u}^{2} - \dot{u}_{0}^{2})$$
(1.2.7)

$$-\mathcal{P}_{pesanteur} - \mathcal{P}_{ressort} = \delta_0^u T_{Masse}$$
 par définition.

cette relation étant vérifiée à tout instant, pour des conditions initiales homogènes la relation qui en découle est que  $\frac{d}{dt}(1.2.7)$  est identiquement nulle :

$$m\ddot{u} + ku = 0 \tag{1.2.8}$$

La relation  $T(S/R) + \mathcal{P}(S/R) = C^{ste}$  est fondamentale et elle est vérifiée dans tout système conservatif. Elle se généralise et se nomme alors *Principe de Hamilton*, c'est un des principes de base de la mécanique vibratoire que nous aborderons dans la seconde partie de ce cours.

1. Rappel 
$$\int_{t=0}^{t} \vec{f} \vec{v} dt = \int_{t=0}^{t} \vec{f} \frac{d\vec{u}}{dt} dt = \int_{\vec{u}_0}^{\vec{u}(t)} \vec{f} d\vec{u}$$
 lorsque les efforts ne dépendent pas des abscisses, c'est-

à-dire pour les problèmes linéaires géométriquement.

#### 2.1.2 Réponse du système

Dans notre système, l'évolution dans le temps de la position u(t) est une sinusoïde (figure 1.2.2). En pratique il existe toujours un amortissement interne ou externe qui conduit à une diminution de l'amplitude initiale  $u_0$  au cours du temps. La période  $T\left(\frac{1}{f}\right)$  devient alors une pseudo-période T' qui peut être déterminée en fonction de l'amortissement. L'amplitude de la réponse varie également et décroît dans le temps.



FIGURE 1.2.2 – Réponse en fonction du temps : système amorti et non amorti.

# 2.2 Système mécanique forcé et phénomène de résonance- Application à un système masse-ressort amorti

Un système soumis à une excitation extérieure est le siège d'oscillations forcées, ou entretenues. Lorsque le système est faiblement amorti, et que la fréquence d'excitation est égale ou voisine d'une des fréquences propres du système, l'amplitude de la réponse vibratoire tend vers l'infini. On dit que le système **est en résonance**, cet état peut conduire à une dégradation rapide des propriétés du système pouvant aller jusqu'à la ruine.

#### 2.2.1 Mise en équation

Le système étudié est supposé soumis à une force d'excitation harmonique sinusoïdale d'amplitude constante  $F_0 \cos \omega t$  et amorti par un frottement de type visqueux faisant intervenir une force d'amortissement  $\vec{F_v}$  proportionnelle au coefficient d'amortissement *c* (figure 1.2.3). Ce système est appelé *oscillateur élémentaire* et sera utilisé dans la suite de cette première partie pour illustrer les grandes classes de comportement des systèmes quelconques.

Par rapport au système masse-ressort précédent (figure 1.2.1) régit par l'équation (1.2.3), les termes supplémentaires (1.2.9) provenant des efforts d'excitation (1.2.9-a) et d'amor-



FIGURE 1.2.3 – Système oscillateur élémentaire dissipatif : masse - amortisseur - ressort.

tissement (1.2.9-b) :

$$\vec{F} = F_0 \cos \omega t \, \vec{x} \tag{1.2.9a}$$

$$\vec{F}_v = -c\dot{u}\,\vec{x}$$
 (frottement de type visqueux) (1.2.9b)

conduisent à l'équation d'équilibre suivante :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_0 \cos \omega t \tag{1.2.10}$$

La réponse vibratoire, solution de (1.2.10) est la somme de deux réponses :  $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$  avec :

- $u_1(t)$  la solution générale de l'équation (1.2.10) sans second membre, *solution transitoire*
- $u_2(t)$  la solution de l'équation particulière, solution permanente de la forme :

$$u_2(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$$
 avec a et b constantes (1.2.11)

ou, pour faire apparaître le déphasage :

$$u_2(t) = B\cos\left(\omega t - \varphi\right) \tag{1.2.12}$$

avec :

$$-B = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2\right)^2 + \frac{4\varepsilon^2\omega^2}{\omega_p^2}}} \qquad amplitude$$

$$- \tan \varphi = \frac{2\varepsilon \frac{\omega}{\omega_p}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2} \qquad déphasage$$
$$- \varepsilon = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega_p} \qquad amortissement réduit$$

On peut noter que l'amplitude *B* de la réponse du système dépend de l'amplitude  $F_0$  de la sollicitation, de sa pulsation  $\omega$ , ainsi que de la pulsation propre du système  $\omega_p$ . Il apparaît donc clairement que selon ces 3 paramètres, la réponse du système va différer.

#### 2.2.2 Réponse du système

L'amplitude et le déphasage peuvent être représentés en fonction du rapport de la pulsation d'excitation et de la pulsation propre du système  $\frac{\omega}{\omega_n}$  (figure 1.2.4).



FIGURE 1.2.4 – Evolution de (a) l'amplitude et (b) du déphasage, en fonction du rapport pulsation de l'excitation sur pulsation propre du système.

On distingue sur ces 2 courbes 3 régimes, selon que la fréquence d'excitation est inférieure, voisine, ou supérieure à la fréquence propre :

- Á basse fréquence d'excitation, le système répond avec une amplitude voisine de l'amplitude statique : le système répond par son élasticité  $\left(\frac{B}{F_0/k} \rightarrow 1\right)$
- Á la fréquence de résonance (fréquence propre), l'amplitude ne dépend que de l'amortissement
- Á fréquence d'excitation élevée, le système répond avec une amplitude qui ne dépend pratiquement que de la masse : le système répond par son inertie  $\left(\frac{B}{F_0/k} \rightarrow 0 \text{ si } c \rightarrow 0\right)$ .

#### Remarque

— Quand l'amortissement est nul, nous avons :

$$m\ddot{u} + ku = F_0 \cos \omega t \tag{1.2.13}$$

qui a pour solution :

$$u_2(t) = \frac{F_0}{\omega_p^2 - \omega^2} \cos \omega t \tag{1.2.14}$$

et de manière évidente va tendre vers l'infini lorsque la sollicitation sera synchrone avec la pulsation propre du système  $\omega_p$  (figure 1.2.4-a). On observe par ailleurs que dans cette configuration le déphasage (figure 1.2.4-b) est indéfini lorsque l'amortissement est nul.

— Par contre, quand l'amortissement n'est pas nul, le terme *B* ne tend plus vers l'infini lorsque  $\omega = \omega_p$ . Ainsi l'amplitude varie et le déphasage est identique et égal à  $\frac{\pi}{2}$  pour tout amortissement (figure 1.2.4-b). Ceci conduit à une solution en décalage de phase dont l'amplitude est fonction des paramètres du système et de l'amplitude d'excitation, et qui sera d'autant plus élevée que l'amortissement sera faible (figure 1.2.4-a) :

$$u_2(t) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{2\varepsilon} \sin \omega t \qquad (1.2.15)$$

#### 2.2.3 Interprétation physique de la résonance

L'amplitude va tendre vers l'infini lorsque la structure non amortie entrera en résonance. Calculons l'énergie fournie au cours d'un cycle par la force excitatrice.

$$\int_{0}^{T} \mathcal{W}_{F0} = \int_{0}^{T} F(t) \, \dot{u}(t) \, dt \qquad (1.2.16)$$

avec l'expression F(t) de l'effort d'excitation connu, et l'expression du déplacement réécrite en posant  $\Delta = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$ :

terme strictement positif

Donc le travail  ${}_{0}^{T} \mathcal{W}_{F0}$  fournit sur un cycle est positif : on *fournit de l'énergie* au système lorsque  $\omega = \omega_{p}$ . Lorsque l'amortissement  $\varepsilon$  est faible, cette énergie est

très peu dissipée, elle est donc stockée sous forme d'énergie élastique dans les corps déformables (ici le ressort). Cela explique que l'amplitude du mouvement ne cesse d'augmenter et que l'on peut arriver à la rupture de la structure. En effet, l'énergie élastique emmagasinable dans un corps de type poutre dont la ligne moyenne est suivant  $\vec{e}_1$ est, par unité de volume, limitée et s'écrit (*cf* cours MMC 1A et/ou cours Axe Mécanique 2A) :

$$\frac{d\mathcal{W}}{dv} = \frac{\sigma_{11}^2}{2E_{11}} + \frac{\tau_{13}^2}{2G_{13}}$$
(1.2.18)

où  $E_{11}$  et  $G_{13}$  sont les modules d'Young et de cisaillement, et  $\sigma_{11}$  et  $\tau_{13}$  sont les contraintes normales et de cisaillement. Il est donc fondamental de connaître les pulsations propres d'un système mécanique. La caractérisation des propriétés vibratoires des système rigides et déformables est l'un des buts recherchés dans ce cours.

## - 3 -

# Interprétation mathématique du comportement physique de l'oscillateur élémentaire

#### Sommaire

3.1	Princi	pe de d'Alembert
3.2	L'osci fert	Ilateur élémentaire de la dynamique et sa fonction de trans-
	3.2.1	Équations du mouvement
	3.2.2	Fonction de transfert et réponse impulsionnelle 20
3.3	Répor	se générale de l'oscillateur
	3.3.1	Étude des régimes libres
	3.3.2	Exemples de régimes forcés

### 3.1 Principe de d'Alembert

Il s'agit en fait d'une autre présentation du *PFD* sous la forme des équations de la statique pour les système à masse constante dans le temps. Les forces d'inertie (voir *Annexe 1 - Paragraphe A-1.4*) sont alors intégrées dans les efforts extérieurs sous la forme d'efforts qui s'opposent à l'accélération du solide (S) considéré. Finalement, en utilisant les notations de l'*Annexes - Chapitre 1* l'équilibre des torseurs, et par suite le

principe de d'Alembert, s'écrivent :

$$\{\tau_{ext \to S}\}_{(G,S/\mathcal{R})} + \{\tau_{inertie}\}_{(G,S/\mathcal{R})} = 0$$

### 3.2 L'oscillateur élémentaire de la dynamique et sa fonction de transfert

#### 3.2.1 Équations du mouvement

Cet oscillateur a été défini précédemment, sur la figure (1.2.3). On rappelle que le système étudié est unidimensionnel, constitué d'une masse *m* d'abscisse courante  $\vec{u}(x,t)$  soumise une force d'excitation  $\vec{f}(t)$ . Des efforts s'opposent au mouvement de la masse, ils sont :

$$- \vec{f}_{I}(t) = -m \frac{d^{2}\vec{u}(x)}{dt^{2}}$$
: force d'inertie dépendant de la masse et de l'accélération  
$$- \vec{f}_{D}(t) = -c \frac{d\vec{u}(x)}{dt}$$
: force dissipative due à l'amortissement visqueux c

—  $\vec{f}_R(t) = -k \vec{u}(x)$ : force d'origine statique de rappel du ressort de raideur k

Finalement le bilan des forces s'exercant sur la masse isolée fournit l'équilibre dynamique en projection sur l'axe  $\vec{x}$ :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t) \tag{1.3.2}$$

On introduit, comme précédemment en début de cet ouvrage, les grandeurs adimensionnelles suivantes :

 $-\omega_p^2 = \frac{k}{m}$ : le carré de la pulsation propre  $-\varepsilon = \frac{c}{2m\omega_p}$ : l'amortissement réduit

ce qui conduit à la nouvelle forme de l'équilibre, appelée forme canonique :

$$\ddot{u}(t) + 2\varepsilon \omega_p \dot{u}(t) + \omega_p^2 u(t) = \frac{1}{m} f(t)$$
(1.3.3)

#### **3.2.2** Fonction de transfert et réponse impulsionnelle

#### Fonction de transfert

Partant de la forme canonique (1.3.2), on peut déterminer la réponse du système. Un moyen adapté à ce type de résolution passe par l'utilisation de transformées de Laplace (voir *Annexes - Chapitre 2*). On peut ainsi ramener une équation différentielle d'inconnue *t*, à une équation algébrique dans l'espace des transformées d'inconnue *s*. La résolution de cette équation algébrique permet, en revenant dans l'espace de départ, d'exprimer la solution de l'équation différentielle. La plupart des fonctions habituelles ont une transformée de type  $\frac{P(s)}{Q(s)}$ , où P(s) et Q(s) sont des polynômes (voir *tables Annexes - Chapitre 2*).

La transformée de Laplace de l'équation d'équilibre (1.3.2) fait intervenir les transformées suivantes :

$$U(s) = \mathcal{L}(u(t)) \quad F(s) = \mathcal{L}(f(t)) \tag{1.3.4}$$

de qui donne l'équation algébrique suivante dans l'espace des transformées, en fonction de la variable *s* :

$$m(s^{2}U(s) - sU(0) - \dot{u}_{0}) + c(sU(s) - u_{0}) + kU = F(s)$$

$$(1.3.5)$$

$$U(s)(ms^{2} + cs + k) = u_{0}(ms + c) + m\dot{u}_{0} + F(s)$$

puis en revenant dans l'espace temporel initial, et en utilisant les conditions initiales  $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$  et  $u(t=0) = u_0$ :

$$U(s) = \frac{F(s)}{ms^2 + cs + k} + \frac{u_0(ms + c) + m\dot{u}_0}{ms^2 + cs + k}$$
(1.3.6)

Les grandeurs suivantes sont remarquables :

$$Z(s) = ms^2 + cs + k$$
 : *impédance opérationnelle* du système (1.3.7a)

$$H(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad : fonction \ de \ transfert \ du \ système \qquad (1.3.7b)$$

— Illustration : Conditions initiales homogènes

 $\dot{u}_0 = \dot{u}(t=0) = 0$ ,  $u_0 = u(t=0) = 0$ , on a donc uniquement la première partie

de la solution générale (1.3.6) qui subsiste :  $U(s) = \frac{F(s)}{ms^2 + cs + k} = F(s)H(s)$ Cas particulier :  $F(s) = 1 \Rightarrow U(s) = H(s)$ . Ce cas correspond à  $f(t) = \delta(t)$  car  $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$ . Donc H(s), fonction de transfert du système, apparaît comme la transformée de Laplace de la *réponse de l'oscillateur à une excitation impulsionnelle*.

La fonction temporelle correspondante est notée G(t), c'est la *fonction de Green* de l'oscillateur. D'où la position courante du système, u(t), est donnée par :

$$u(t) = G(t) * f(t) = \int_0^t G(t - \tau) f(\tau) \, d\tau = \int_0^t G(\tau) f(t - \tau) \, d\tau \qquad (1.3.8)$$

On retrouve ici la définition de l'*intégrale de convolution* ou *intégrale de Duhamel*, telle que présentée dans *Annexes - Chapitre 2*.

#### Les différents types de réponses impulsionnelles

Reprenons la fonction de transfert (1.3.7b), qui peut s'exprimer en utilisant les grandeurs adimensinonnées introduites précédemment dans (1.3.3):

$$H(s) = \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + 2\varepsilon \omega_p s + \omega_p^2}$$
(1.3.9)

Suivant les valeurs de l'amortissement critique  $\varepsilon$ , 3 types de réponse sont observées :

al amortissement sur-critique :  $\varepsilon > 1$ 

Les racines du dénominateur de l'expression (1.3.9) ci-dessus sont les suivantes :

$$s^{2} + 2\varepsilon\omega_{p}s + \omega_{p}^{2} \rightsquigarrow r_{1,2} = -\omega_{p}\left(\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^{2} - 1}\right)$$
 (1.3.10)

La table des transformées (*Annexes - Chapitre 2*) permet d'obtenir G(t), la fonction de Green du système :

$$H(s) = \frac{1}{m} \frac{1}{(s-r_1)(s-r_2)} \rightsquigarrow G(t) = \frac{1}{m} \frac{1}{r_1 - r_2} \left( e^{r_1 t} - e^{r_2 t} \right)$$
(1.3.11)

Finalement, en introduisant les racines  $r_1$  et  $r_2$  la réponse du système (1.3.10) est :

$$G(t) = \frac{1}{m\Omega} e^{-\varepsilon \omega_p t} \sinh(\Omega t) \text{ avec } \Omega = \omega_p \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

b/ amortissement critique :  $\varepsilon = 1$ 

$$H(s) = \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + 2\omega_p s + \omega_p^2} = \frac{1}{m} \frac{1}{(s + \omega_p)^2}$$
(1.3.12)

d'où :

$$G(t) = \frac{t}{m} \mathrm{e}^{-\omega_p t}$$

c/ amortissement sous-critique :  $\varepsilon < 1$ 

$$H(s) = \frac{1}{m\Omega} \frac{\Omega}{(s + \varepsilon \omega_p)^2 + \Omega_p^2}$$
(1.3.13)

d'où :

$$G(t) = \frac{e^{-\varepsilon \omega_p t}}{m\Omega} \sin(\Omega t) \operatorname{avec} \Omega = \omega_p \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$
(1.3.14)

Dans ce cas, la réponse est périodique d'amplitude décroissant exponentiellement (figure 1.3.1), de pseudo-période T' fonction de l'amortissement d'après la définition de  $\Omega$  (1.3.14).



FIGURE 1.3.1 - Réponse de l'oscillateur élémentaire en fonction de l'amortissement

#### 3.3 Réponse générale de l'oscillateur

Pour la transformée de Laplace de la réponse u(t), on a trouvé la forme donnée en (1.3.6):

$$U(s) = \frac{F(s)}{ms^2 + cs + k} + \frac{u_0(ms + c) + m\dot{u}_0}{ms^2 + cs + k}$$

- si f(t) = 0, le régime est libre, et le mouvement est complètement défini à partir des conditions initiales  $u_0$  et  $\dot{u}_0$
- si les conditions initiales sont homogènes (corps initialement au repos), le mouvement est complètement défini par f(t)
- dans le cas général, on a superposition des 2

#### 3.3.1 Étude des régimes libres

Par rapport à la réponse impulsionnelle étudiée ci-dessus, les oscillations libres dépendent des conditions initiales en déplacement et en vitesse :  $u(t = 0) = u_0$  et  $\dot{u}(t = 0) = \dot{u_0}$  (figure 1.3.2)

al amortissement sur-critique :  $\varepsilon > 1$ 

On pose  $\Omega = \omega_p \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ . La recherche de l'original de la transformée de Laplace rappelée dans (1.3.6) conduit à :

$$u(t) = e^{-\varepsilon \omega_p t} \left( u_0 \cosh\left(\Omega t\right) + \frac{\varepsilon \omega_p u_0 + \dot{u_0}}{\Omega} \sinh\left(\Omega t\right) \right)$$
(1.3.15)

b/ amortissement critique :  $\varepsilon = 1$ 

Dans ce cas :  $u(t) = u_0 + (\omega_p u_0 + \dot{u_0})te^{-\omega_p t}$ 

c/ amortissement sous-critique :  $\varepsilon < 1$ 

On obtient pour la réponse une forme assez similaire au cas de l'amortissement sur-critique, les racines étant imaginaires, les fonctions hyperboliques



FIGURE 1.3.2 – Dépendance de la réponse de l'oscillateur élémentaire vis-à-vis des conditions initiales  $u_0$  et  $\dot{u}_0$ 

sont remplacées par des fonctions trigonométriques :

$$u(t) = e^{-\varepsilon \omega_p t} \left( u_0 \cos\left(\Omega t\right) + \frac{\varepsilon \omega_p u_0 + \dot{u_0}}{\Omega} \sin\left(\Omega t\right) \right)$$
(1.3.16)

ce qui peut également se mettre sous une forme similaire à (1.2.12), faisant intervenir l'amplitude de la réponse *B* et le déphasage  $\varphi$ :

$$u(t) = Be^{-\varepsilon \omega_p t} \cos\left(\Omega t - \varphi\right) \tag{1.3.17}$$

avec :

$$\Omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

$$B = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\varepsilon \omega_p u_0 + \dot{u_0}}{\Omega}\right)^2}$$

$$- \tan \varphi = \frac{\varepsilon \omega_p u_0 + \dot{u_0}}{\Omega \omega_p}$$

La réponse est périodique (figure 1.3.3). La pseudo-période T' est fonction de l'amortissement et est reliée à la période propre T du même système :

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} > T = \frac{2\pi}{\omega_p} \tag{1.3.18}$$

#### 3.3.2 Exemples de régimes forcés

#### Excitation brève sous forme de créneau

On considère une excitation de type créneau définie à partir de la fonction échelon - Heaviside, notée E(t). L'amortissement considéré est sous-critique et les conditions initiales sont homogènes :

- 
$$f(t) = F_0(E(t) - E(t - \alpha))$$
  
-  $\Omega = \omega_p \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ 

d'après la table des transformées de Laplace (*Annexes - Tableau A-2.1*)  $\mathcal{L}(f(t)) = \frac{F_0}{s} [1 - e^{-\alpha s}]$ . u(t) étant la réponse temporelle, cherchons sa transformée U(s). En utilisant la fonction de transfert de l'oscillateur élémentaire définie en (1.3.7b), on obtient directement la transformée U(s) de la réponse temporelle :

$$U(s) = H(s).F(s) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(s + \varepsilon \omega_p)^2 + \Omega^2} \frac{1}{s} \left(1 - e^{-\alpha s}\right)$$
(1.3.19)


FIGURE 1.3.3 – Réponse en régime libre sous-critique de l'oscillateur élémentaire

aprés décomposition en éléments simples de ces fractions, il vient :

$$U(s) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega^2} \left[ \frac{1}{s} - \frac{s + \varepsilon \omega_p}{(s + \varepsilon \omega_p)^2 + \Omega^2} - \frac{\varepsilon \omega_p}{\Omega} \frac{\Omega}{(s + \varepsilon \omega_p)^2 + \Omega^2} \right] \left( 1 - e^{-\alpha s} \right) \quad (1.3.20)$$

d'où l'on tire la réponse temporelle u(t) :

$$u(t) = \frac{F_0}{k} \left[ 1 - e^{-\varepsilon \omega_p t} \left( \cos\left(\Omega t\right) + \frac{\varepsilon \omega_p}{\Omega} \sin\left(\Omega t\right) \right) \right] \\ - \frac{F_0}{k} E(t - \alpha) \left[ 1 - e^{-\varepsilon \omega_p (t - \alpha)} \left( \cos\left(\Omega(t - \alpha)\right) + \frac{\varepsilon \omega_p}{\Omega} \sin\left(\Omega(t - \alpha)\right) \right) \right]$$
(1.3.21)

Cette réponse est représentée sur la figure (1.3.4) où l'on remarque clairement qu'au front montant de la sollicitation créneau correspond un réponse amortie telle qu'on l'a vue précédemment. Elle est suivie, au front descendant de la sollicitation, d'une autre réponse sous-amortie du même type mais d'amplitude moyenne nulle.

Si le système est conservatif, la dissipation  $\varepsilon$  est nulle. La réponse temporelle est purement pèriodique, de pèriode fixe *T* la pèriode propre du système (figure 1.3.5 :

$$u(t) = \frac{F_0}{k} [(1 - \cos(\omega_p t)) - E(t - \alpha) + (1 - \cos(\omega_p (t - \alpha)))]$$
  
= 
$$\begin{cases} \sin t < \alpha : \frac{F_0}{k} (1 - \cos(\omega_p t)) \\ \sin t > \alpha : \frac{F_0}{k} 2 \sin\left(\frac{\omega_p \alpha}{2}\right) \sin\left(\omega_p \left(t - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \end{cases}$$
(1.3.22)

#### **Excitation harmonique permanente**

La sollicitation pèriodique suivante de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $F_0$  constante est choisie :  $f(t) = F_0 cos \omega t$ . La transformée de cette sollicitation est immédiate :

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{F_0 s}{s^2 + \omega^2}$$



FIGURE 1.3.4 – Réponse à une sollicitation de type échelon de l'oscillateur élémentaire sous-amorti.



FIGURE 1.3.5 – Réponse à une sollicitation de type échelon de l'oscillateur élémentaire non-amorti

Comme dans le cas de la sollicitation échelon ci-dessus, en utilisant l'impédance de l'oscillateur élémentaire définie en (1.3.7b), on va rechercher la transformée de la réponse :

$$U(s) = H(s).F(s) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(s + \varepsilon \omega_p)^2 + \Omega^2} \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$
(1.3.23)

que l'on décompose en éléments simples pour pouvoir rechercher la transformée inverse :

$$U(s) = \frac{F_0}{m} \left[ \frac{1}{(\omega_p^2 - \omega^2)\Omega} \frac{\Omega}{(s + \varepsilon \omega_p)^2 + \Omega^2} + \frac{1}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega_p^2 \omega^2} \frac{(\omega_p^2 - \omega^2)s + 2\varepsilon \omega_p \omega}{s^2 + \omega^2} \right]$$
$$u(t) = \frac{F_0}{m} \left[ \frac{1}{(\omega_p^2 - \omega^2)\Omega} e^{-\varepsilon \omega_p t} \sin(\Omega t) + \frac{1}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega_p^2 \omega^2} \left( (\omega_p^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + 2\varepsilon \omega_p \omega \sin(\omega t) \right) \right]$$
$$(1.3.24)$$

Cette solution est la somme de 2 termes :

- le premier : en produit avec  $e^{-\varepsilon \omega_p t}$ , le terme que l'on retrouve dans la réponse impulsionnelle de l'oscillateur élémentaire sous-amorti (1.3.14). Il s'agit de la réponse *transitoire*, qui prévaut aux temps courts et tend ensuite vers zéro ;
- le second : il correspond à la solution *permanente*, valable en *régime établi* dont la période est celle de la sollicitation.

Étudions plus précisément la solution permanente :

$$u(t) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega_p^2 \omega^2} \left( (\omega_p^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + 2\varepsilon \omega_p \omega \sin(\omega t) \right) \quad (1.3.25)$$

qui peut encore se mettre sous la forme pèriodique déphasée, similaire à la forme (1.2.12), en introduisant  $\beta$  le rapport des pulsations propre et d'excitation, et le déphasage  $\varphi$ :

$$u(t) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_p^2} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\epsilon^2 \beta^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$
  
avec  $\beta = \frac{\omega}{\omega_p}$ ,  $\tan \varphi = \frac{2\epsilon\beta}{1-\beta^2}$   
(1.3.26)

₩

$$u(t) = \frac{F_0}{k} \mu(\beta) \cos(\omega t - \varphi(\beta)) \quad \text{avec } \mu(\beta) = \left((1 - \beta^2)^2 + 4\epsilon^2 \beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

On voit apparaître les dépendances de  $\mu$  et du déphasage  $\varphi$  vis à vis du rapport  $\beta$  de la fréquence propre et de la fréquence d'excitation. On a donc :

- une réponse permanente déphasée de φ par rapport à l'excitation
- la réponse statique (sollicitation du ressort seul) est amplifiée par le facteur  $\mu(\beta)$  appelé *coefficient d'amplification dynamique*
- lorsque  $\omega = \omega_p \sqrt{1 2\epsilon^2}$ , appelée *pulsation de résonance*, le coefficient d'amplification devient maximum :

 $\mu(\beta) = \frac{1}{2\epsilon\sqrt{1-\epsilon^2}}$ . Il est donc clair que si le système est conservatif ( $\epsilon = 0$ ), cette amplitude tend vers l'infini (voir figure 1.2.4). On observe alors le phénomène de *résonance* décrit au paragraphe 2.2.2 et dont les conséquences peuvent être irréversibles quant à l'intégrité du système (voir paragraphe 2.2.3).

Deuxième partie

\_\_\_\_\_

Dynamique analytique des systèmes discrets

# - 1 -

# **Principe des travaux virtuels**

### Sommaire

1.1	Cas d	u point matériel			
1.2	Les contraintes cinématiques				
	1.2.1	Liaisons holonômes			
	1.2.2	Liaisons non-holonômes			
1.3	Notio	n de coordonnée généralisée			

L'utilisation du Principe des travaux Virtuels (*PPV/PTV*) répond à une nécessité de caractériser l'équilibre mécanique d'une structure en manipulant des quantités scalaires (travail/énergie) plutôt que des quantités vectorielles et tensorielles. Cette formulation intégrale s'accommode de plus très bien avec les formulations variationnelles (voir *Annexes - Chapitre 3*), outils privilégiés dans la recherche d'extrema de *fonctionnelles* (fonctions de fonctions), et constituent également la base de la formulation des méthodes numériques devenues usuelles aujourd'hui.

Dans ce chapitre, nous nous limiterons au *PTV* dans le cas des systèmes discrets, *i.e.* ensembles de points matériels associés à des masses ponctuelles indéformables. On rappelle que le *PTV* se substitue au *PPV* dans le cadre des systèmes linéaires (linéarité matérielle *et* géométrique).

### **1.1 Cas du point matériel**

Considérons un point matériel k, associé à une masse  $m_k$ :

- soumis a un champ de forces  $\vec{X}$  de composante  $X_i$ , i = 1, 2, 3, qui peuvent être des forces volumiques données ou bien des efforts de réaction dûs aux conditions cinématiques imposées au système
- l'équilibre dynamique est caractérisé par le PFD (partie 1 1.2.4) :

$$m_k \ddot{u}_i - X_i = 0$$

Imaginons une trajectoire  $\vec{u}'(t)$  distincte de  $\vec{u}(t)$ , mais suffisamment proche. On définit le déplacement virtuel  $\delta \vec{u}$  par  $\delta \vec{u} = \vec{u}' - \vec{u}$  (figure 2.1.1). Par définition le déplacement virtuel est arbitraire pour  $t_1 < t < t_2$ , il représente un écart par rapport au déplacement réel. C'est en cherchant à minimiser cet écart que la formulation variationnelle permet de trouver le champ réel, seule solution de l'équilibre.



FIGURE 2.1.1 – Trajectoire virtuelle.

Les conditions aux limites cinématiques doivent être vérifiées par le champ de déplacement réel, qui est dit Cinématiquement Admissible (C.A.). Il faut donc que le champ virtuel soit Cinématiquement Admissible à 0 (C.A.(0)), c'est à dire que les conditions aux limites cinématiques soient vérifiées, et que les déplacements imposés soient annulés. En effet, si au point *P* le déplacement  $\vec{u}_d$  est imposé, l'écart à cette quantité donnée ne peut qu'être nulle, puisque le champ réel est *C.A.* (2.1.1). Ce raisonnement tient aussi pour les Conditions Initiales (en temps), et le champ virtuel devra être nul aux bornes  $t_1$  et  $t_2$ , il sera noté *C.I.*(0).

L'énoncé du PTV pour les systèmes discrets de dimension N est donc le suivant :

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} (m_k \ddot{u}_{ik} - X_{ik}) \,\delta u_{ik} = 0, \,\forall \delta u_{ik} \, C.A.(0), C.I.(0)$$
(2.1.2)

Réciproquement, si le *PTV* est vérifié, quelque soit le champ virtuel répondant aux restrictions ci-dessus, alors l'équilibre est satisfait. Comme dans le cas des systèmes

continus, il représente la contribution énergétique des puissances développées, dans un champ de déplacement virtuel C.A.(0), par d'une part les efforts d'origine inertielle et d'autre part les efforts extérieurs au système.

### **1.2** Les contraintes cinématiques

Pour un système discret libre constitué de *N* points, sans aucune contrainte cinématique, son état est entièrement défini à partir de ses 3*N* degrés de liberté. On passe de la configuration de référence  $x_{ik}$  à la configuration courante (à l'instant *t*), caractérisée par les positions  $\xi_{ik}(t)$ , via les déplacements  $u_{ik}$ :

$$\xi_{ik}(t) = x_{ik} + u_{ik}(x_{ik}, t)$$

Dans la réalité, les points matériels sont soumis à des contraintes cinématiques qui restreignent leur liberté de mouvement et définissent les *relations de liaison* entre les points. Ces liaisons interviennent dans l'étude des systèmes mécaniques, car selon leur type, les équations caractérisant le mouvement varieront en nombre et en genre. La *paramétrisation minimale* d'un système passe par l'étude de ces liaisons.

### 1.2.1 Liaisons holonômes

Ces relations sont les plus courantes, elles sont définies par des relations implicites, reliant entre elles les positions dans la configuration instantanée  $\xi_{ik}$  sans faire intervenir les vitesses :

$$f(\boldsymbol{\xi}_{ik},t)=0$$

Si une relation holonôme dépend **explicitement** du temps, elle est dite *rheonôme*, sinon est elle dite *scléronôme*. Une relation holonôme permet de réduire d'une unité le nombre de *ddl* du système.

#### Exemple

Pour un système spatial de 2 masses  $m_1$  et  $m_2$  reliées par une barre rigide de longueur l, les positions instantanées  $\xi_{i1}$  et  $\xi_{i2}$  sont reliées par une relation scléronôme de type  $f(\xi_{ik}) = 0$ :

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\xi_{i2} - \xi_{i1}\right)^2 = l^2$$

Finalement, parmi les 6 *ddl* du système, la connaissance de 5 est suffisante pour caractériser l'ensemble des positions de cette barre.

### 1.2.2 Liaisons non-holonômes

Ces relations ne répondent pas à la définition précédente, elles sont souvent du type :

$$f(\xi_{ik}, \dot{\xi}_{ik}, t) = 0$$
 où les  $\dot{\xi}_{ik}$  sont les vitesses associées aux  $\xi_{ik}$ 

La relation n'étant généralement pas intégrable, une relation non-holonôme ne permet pas de réduire le nombre de *ddl* du système.

### Exemple

On considère l'exemple d'une sphère (S), rapportée au repère  $(C, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$ , de rayon R et dont les coordonnées de son centre sont données par  $(x_c, y_c, z_c)$  dans le repère de référence  $(R_0)$ . Cette sphère est assujettie à rester en contact avec le plan  $(\lambda)$  repéré par  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} = \vec{0})$ . Le système, se résumant ici à la sphère, comporte 6 paramètres de situations :  $x_c, y_c, z_c, \psi, \theta, \phi$  tels que :

 $\vec{OC} = x_c \vec{x} + y_c \vec{y} + z_c \vec{z}$  et  $\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\vec{z} + \dot{\theta}\vec{x}_1 + \dot{\phi}\vec{z}_s$  (angles d'Euler)



FIGURE 2.1.2 – Roulement sans glissement de la sphère (S) sur le plan ( $\lambda$ )

Les différentes liaisons possibles sont les suivantes :

a) Contact avec le plan :

 $z_c = R$  (liaison holonôme)

b) Roulement sans glissement :

La vitesse du point de contact I entre la sphère et le plan est nulle, elle est la

même dans (S) et ( $\lambda$ ), ce qui se traduit par :

$$\vec{V}(I \in S/R_0) = \vec{V}(I \in \lambda/R_0) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{V}(C \in S/R_0) = \vec{C}I \wedge \vec{\Omega}(S/R_0)$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \dot{x} = R(-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi) \\ \dot{y} = R(-\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi - \dot{\theta}\sin\psi) \end{cases} (2 \ liaisons \ non-holon \ non-h$$

c) Roulement sans pivotement :

On impose que la sphère ne tourne pas autour de son axe vertical :  $\vec{\Omega}(S/R_0) \cdot \vec{z} = 0$ :

$$\dot{\Psi} + \dot{\varphi}\cos\theta = 0$$
 (1 liaison non-holonôme)

Conclusion sur le paramètrage du système :

- initialement 6 paramètres
- 1 contrainte holonôme
- 3 contraintes non-holonômes

Seule la liaison holonôme contraint suffisamment les liaisons pour qu'un *ddl* soit supprimé. Au final, il reste 5 *ddl* pour caractériser le mouvement de la sphère. Les contraintes non-holonômes agissent comme des contraintes de comportement. Elles ne restreignent pas les configurations possibles du système, mais imposent le chemin pour atteindre ces configurations.

### 1.3 Notion de coordonnée généralisée

Les *coordonnées généralisées* sont introduites en mécanique lagrangienne afin d'aboutir au paramètrage minimum des problèmes à résoudre. On désigne par coordonnée généralisée les paramètres de configuration en fonction desquels on exprime les déplacements de tous les points du système. Par la suite on raisonnera uniquement en termes de coordonnées généralisées, notées  $q_i$ , et des vitesses associées  $\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t}$ .

Dans le cadre général, pour N points matériels, reliés par R liaisons cinématiques holonômes, on a  $3N - R \, ddl$ . Il faut donc définir n = 3N - R paramètres de configurations, ou coordonnées généralisées notées  $\bar{q} = (q_1, \dots, q_n)$ , qui permettent de définir les déplacements des points du système sous la forme :

$$u_{ik}(x_{ik},t) = U_{ik}(q_1,\dots,q_n,t)$$
(2.1.3)

On remarque que la dépendance de la position par rapport au temps (2.1.3) n'apparaît pas implicitement à travers les  $q_i$ , mais explicitement à travers le temps t directement. C'est dans ce cadre que la classification des liaisons revêt une importance

particulière : si les liaisons sont holonômes, alors les *coordonnées généralisées sont indépendantes* puisque les relations entre les *ddl* surabondants sont pris en compte par les liaisons implicites. Si de plus les liaisons sont scléronômes alors la position  $U_{ik}$  ne dépend pas explicitement du temps.

#### **Exemple : le pendule double**

On considère le cas d'un pendule double constitué de 2 masses ponctuelles  $m_1$  et  $m_2$  situées à l'extrémité de 2 barres rigides de longueur  $\ell_1$  et  $\ell_2$  (figure 2.1.3). Ces 2 barres sont reliées entre elles au point  $P_1$ , l'extrémité de la première barre; cette barre étant reliée à son autre extrémité à l'origine O du repère ( $R_0$ ). Les liaisons sont supposées parfaites. Sur cet exemple simple, on peut mettre en évidence la démarche de paramétrisation minimale d'un problème à résoudre.



FIGURE 2.1.3 – Pendule double constitué de 2 masses  $m_i$  situées à l'extrémité de 2 barres rigides de longueur  $\ell_i$ 

Dans ce problème plan, la position des points  $P_1$  et  $P_2$  est repérée, en premier lieu par les coordonnées cartésiennes dans le repère  $(R_0)$  :

$$\vec{OP}_1 = f(\xi_{i1}, \xi_{i2})$$
 et  $\vec{OP}_2 = f(\xi_{i1}, \xi_{i2})$ 

où  $\xi_{ik}$  est la  $i^{ieme}$  coordonnée du point k. Il faut donc au total 4 paramètres de position indépendants pour définir l'ensemble des points de ce système ( $\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{21}, \xi_{22}$ ).

Il existe aux points O et  $P_1$  des liaisons parfaites, qui nous indiquent les deux relations holonômes supplémentaires suivantes :

$$\begin{cases} \xi_{11}^2 + \xi_{21}^2 = \ell_1^2 \\ (\xi_{12} - \xi_{11})^2 + (\xi_{22} - \xi_{21})^2 = \ell_2^2 \end{cases}$$

Il reste donc au final 2 *ddl* pour caractériser la position de l'ensemble des points du système. On choisit donc 2 coordonnées généralisées en fonction desquelles le système peut être décrit. Ici le choix est simple, on prend les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , respectivement la position angulaire de la barre 1 et de la barre 2 par rapport à l'axe  $(O\vec{x}) : u_{ik} = U_{ik}(\theta_1, \theta_2)$ . On a alors les coordonnées des points géométriques associés aux masses :

$$\begin{cases} \xi_{11} = \ell_1 \cos \theta_1 \\ \xi_{21} = \ell_1 \sin \theta_1 \\ \xi_{12} = \ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \\ \xi_{22} = \ell_1 \sin \theta_1 + \ell_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

D'après cet exemple simple, on voit que s'il n'y a pas de contraintes non-holonômes, les coordonnées généralisées  $q_i$  sont indépendantes et elles peuvent varier de manière arbitraire sans contrevenir aux contraintes cinématiques. On peut donc poser, en utilisant la définition du champ de déplacement à partir des *n* coordonnées généralisées (2.1.3), le champ virtuel suivant :

$$\delta u_{ik} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial U_{ik}}{\partial q_s} \delta q_s \tag{2.1.4}$$

L'équation du travail virtuel (2.1.2) devient alors :

$$\sum_{s=1}^{n} \left[ \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \left( m_k \ddot{u}_{ik} - X_{ik} \right) \frac{\partial U_{ik}}{\partial q_s} \right] \delta q_s = 0, \ \forall \delta q_s C.A.(0), C.I.(0)$$
(2.1.5)

En mettant le second terme de cette expression sous la forme  $\sum_{s=1}^{n} Q_s \delta q_s$ , on fait apparaître l'expression de la force généralisée conjuguée (associée) au *ddl*  $q_s$  dans l'expression du *PTV* :

$$Q_s = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} X_{ik} \frac{\partial U_{ik}}{\partial q_s}$$
(2.1.6)

Quant au premier terme du *PTV*, il représente la contribution des efforts d'inertie dans l'équilibre du système. Il peut lui aussi s'exprimer en fonction des coordonnées généralisées, c'est ce qui est montré dans le chapitre suivant.

# - 2 -

# Principe de Hamilton - Équations de Lagrange

### Sommaire

2.1	Énerg	gies potentielles et cinétiques 39	
2.2	Énoncé du principe de Hamilton		
2.3	Forme proposée par Lagrange		
	2.3.1	Structure de l'énergie cinétique	
	2.3.2	Conservation de l'énergie dans un système à liaisons scléronômes 4	5
2.4	Classi	ification des forces généralisées	
	2.4.1	Forces intérieures	
	2.4.2	Forces extérieures	
2.5	Équat	tions de Lagrange dans le cas général	

# 2.1 Énergies potentielles et cinétiques

Comme il est rappelé en *Annexes* - *Chapitre 1*, l'énergie cinétique d'un système discret (S) constitué de N partitions de masse  $m_k$  et dont le mouvement est décrit par leur centre d'inertie  $P_k$  est par définition :

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{V}^2 (P_k \in S/R_0)$$
(2.2.1)

On peut exprimer les vitesses en fonction des coordonnées et déplacements généralisés :

$$\dot{u}_{ik} = \frac{\partial U_{ik}}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial U_{ik}}{\partial q_s} \dot{q}_s$$
(2.2.2)

ce qui conduit à l'expression suivante de l'énergie cinétique qui sera détaillée ultérieurement :

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} m_k \dot{u}_{ik}(t, q_s, \dot{q}_s) \dot{u}_{ik}(t, q_s, \dot{q}_s)$$
(2.2.3)

La définition de l'énergie potentielle, dans le cas des systèmes discrets, se déduit de l'expression des efforts extérieurs et des efforts de liaison intérieurs. On suppose ici que ces efforts  $X_{ik}$  dérivent d'un potentiel V. En écrivant le travail virtuel  $\delta W_{Q_s}$  (ou le travail élémentaire) des efforts généralisés :

$$\delta \mathcal{W}_{Q_s} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} X_{ik} \delta u_{ik} = \sum_{s=1}^{n} Q_s \delta q_s = -\delta V(q_s)$$
(2.2.4)

On a ainsi l'expression des efforts généralisés et du potentiel correspondant qui se déduit de l'expression du travail virtuel :

$$\exists V(q_s) / \frac{\partial V(q_s)}{\partial q_s} = -Q_s \quad \left(\delta V = \sum_{n=1}^s \frac{\partial V(q_s)}{\partial q_s} \delta q_s\right) \tag{2.2.5}$$

D'un point de vu calculatoire, l'expression du travail virtuel des efforts extérieurs est utilisée pour déterminer les contributions des efforts généralisés connaissant les déplacements virtuels (voir *exemple wagon+pendule figure 2.2.1*).

## 2.2 Énoncé du principe de Hamilton

Le principe de Hamilton est une expression intégrée dans le temps du PTV (2.1.2) :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^3 \left( m_k \ddot{u}_{ik} - X_{ik} \right) \delta u_{ik} \right) dt = 0, \ \forall \delta u_{ik} C.A.(0), C.I.(0)$$
(2.2.6)

Nous allons exprimer ce principe en utilisant des formes potentielles. On peut remarquer l'identité suivante, concernant les effort d'origine inertielle :

$$\frac{d}{dt}(m_k \dot{u}_{ik} \delta u_{ik}) = m_k \ddot{u}_{ik} \delta u_{ik} + m_k \dot{u}_{ik} \delta \dot{u}_{ik}$$
$$= m_k \ddot{u}_{ik} \delta u_{ik} + \delta \left[\frac{1}{2}m_k \dot{u}_{ik} \dot{u}_{ik}\right]$$
(2.2.7)

on retrouve la définition de l'énergie cinétique (2.2.1) (2.2.7)

$$\frac{d}{dt}(m_k \dot{u}_{ik} \delta u_{ik}) = m_k \ddot{u}_{ik} \delta u_{ik} + \delta T(u_{ik}, \dot{u}_{ik}, t)$$

Ayant posé le potentiel pour les efforts extérieurs (2.2.4), et connaissant l'expression ci-dessus (2.2.7), le principe de Hamilton (2.2.6) peut s'écrire :

$$\left[\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}-m_{k}\dot{u}_{ik}\,\delta u_{ik}\right]_{t_{1}}^{t_{2}}+\delta\int_{t_{1}}^{t_{2}}\left(T(q_{s},\dot{q}_{s},t)-V(q_{s})\right)\,dt\,=\,0,\,\forall\delta u_{ik}\,C.A.(0),C.I.(0)$$
(2.2.8)

compte-tenu des restrictions sur les valeurs du champ virtuel en  $t_1$  et  $t_2$ , le premier terme de cette expression est nul et on obtient l'énoncé du Principe de Hamilton. La dépendance par rapport aux coordonnées généralisées apparaît naturellement via la définition des vitesses des points k (2.2.2) :

#### Principe de Hamilton pour les systèmes conservatifs

La trajectoire réelle du système est celle qui rend stationnaire l'intégrale  $\int_{t_1}^{t_2} (T(q_s, \dot{q}_s, t) - V(q_s)) dt$ par rapport à toute variation arbitraire de déplacement *C.A.*(0) entre 2 instants  $t_1$  et  $t_2$ , mais s'annulant aux extrémités de l'intervalle :

$$\begin{cases} \delta \int_{t_1}^{t_2} (T(q_s, \dot{q}_s, t) - V(q_s)) dt = 0 \\ \delta q_s(t_1) = \delta q_s(t_2) = 0 \end{cases}$$
(2.2.9)

### 2.3 Forme proposée par Lagrange

La forme proposée par Lagrange est beaucoup plus générale car elle ne se limite pas aux systèmes conservatifs. On exprime les équations du mouvement en fonction des coordonnées généralisées. Pour la variation de l'énergie cinétique,  $T(q_s, \dot{q}_s, t)$ , on obtient :

$$\delta T(\mathcal{S}, R_0) = \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial T}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right)$$
(2.2.10)

On connaît également la forme du potentiel des efforts extérieurs (2.2.4) en fonction des coordonnées généralisées. On peut donc écrire le principe de Hamilton (2.2.9) sous la forme suivante :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial T}{\partial q_s} + Q_s \right) \delta q_s + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right) dt = 0, \ \forall \delta q_s C.A.(0), C.I.(0)$$
(2.2.11)

On intègre par parties le second terme :

Finalement, l'équilibre est équivalent à :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{s=1}^n \left[ -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_s} + Q_s \right] \delta q_s \right) dt = 0, \ \forall \delta q_s C.A.(0), C.I.(0) \quad (2.2.13)$$

cette égalité étant vraie quelque soit le champ virtuel, la condition (2.2.13) équivaut donc à n équations scalaires, appelées *Équations de Lagrange*, valables pour l'instant dans le cadre d'un système conservatif :

$$\underbrace{-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)}_{a} + \underbrace{\frac{\partial T}{\partial q_s}}_{b} + \underbrace{\mathcal{Q}_s}_{c} = 0 \quad , s = 1 \dots n$$
(2.2.14)

les termes *a*, *b* représentant les forces d'inertie généralisées associées au *ddl*  $q_s$ , et le terme *c* représentant les forces généralisées extérieures (et intérieures comme nous le préciserons dans la suite).

On reconnaît dans la structure de ces équations, la condition de minimisation des fonctionnelles d'Euler-Lagrange (voir *Annexes - eq. A-3.47*), pour la fonctionnelle présentée dans le principe de Hamilton (2.2.9). Cette expression est complétée par la suite dans le cadre des systèmes dissipatifs.

### 2.3.1 Structure de l'énergie cinétique

Par définition, l'énergie cinétique (2.2.1) dépend des vitesse  $\dot{u}_{ik}$  qui s'expriment elle-mêmes en fonction du temps, et des coordonnées et déplacements généralisés  $(t,q_s,\dot{q}_s)$  (2.2.2), ce qui donne une nouvelle expression de l'énergie cinétique pour le système (S) formé de N partitions. Cette expression se développe en 3 termes distincts :

$$T(q_s, \dot{q}_s, t) = T_0(q_s, t) + T_1(q_s, \dot{q}_s, t) + T_2(q_s, \dot{q}_s)$$
 (2.2.15)

a) énergie cinétique d'entraînement du système lorsque ses  $ddl q1, ..., q_n$  sont figés ( $\dot{q}_s = 0$ ). De degrés 0 par rapport aux  $\dot{q}_s$ .

$$T_0(q_s, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} m_k \left(\frac{\partial U_{ik}}{\partial t}\right)^2$$
(2.2.16)

b) énergie cinétique mutuelle. De degrés 1 par rapport aux  $\dot{q}_s$  et  $q_s$ .

$$T_1(q_s, \dot{q}_s, t) = \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U_{ik}}{\partial t} m_k \frac{\partial U_{ik}}{\partial q_s} \dot{q}_s \qquad (2.2.17)$$

c) énergie cinétique relative qui reste seule lorsqu'on *supprime la dépendance explicite des vitesses*  $\dot{u}_{ik}$  *en fonction du temps.* 

$$T_2(q_s, \dot{q}_s) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^3 m_k \frac{\partial U_{ik}}{\partial q_s} \frac{\partial U_{ik}}{\partial q_r} \dot{q}_s \dot{q}_r \qquad (2.2.18)$$

On peut noter les relations suivantes liées à la qualité des fonctions homogènes :

$$T_1(q_s, \dot{q}_s, t) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \dot{q}_s \frac{\partial T_1(q_s, \dot{q}_s, t)}{\partial \dot{q}_s} \quad \text{et } T_2(q_s, \dot{q}_s) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \dot{q}_s \frac{\partial T_2(q_s, \dot{q}_s)}{\partial \dot{q}_s} \quad (2.2.19)$$

On voit clairement que la structure de l'énergie cinétique va dépendre de la formulation du problème, et notamment de la présence explicite du temps dans l'expression des vitesses. Pour mettre en évidence ces dépendances, on peut, à partir de cette nouvelle expression de l'énergie cinétique, réécrire la variation intervenant dans les équations de Lagrange (2.2.14a-b) :

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_s} = \\ -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T_1(q_s, \dot{q}_s, t)}{\partial \dot{q}_s}\right) - \sum_{r=1}^n \left[\frac{\partial^2 T_1(q_s, \dot{q}_s, t)}{\partial \dot{q}_s \partial q_r} \dot{q}_r\right] - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2(q_s, \dot{q}_s)}{\partial \dot{q}_s}\right)$$
(2.2.20)  
$$+\frac{\partial}{\partial q_s}(T_0(q_s, t) + T_1(q_s, \dot{q}_s, t) + T_2(q_s, \dot{q}_s))$$
  
$$a \qquad c \qquad b$$

Il apparaît d'après cette expression les dépendances par rapport aux vitesses et au temps. Les termes sont mis en évidence en prenant les composantes du vecteurs vitesse  $\vec{u}_k$  nulles successivement

- a :  $\dot{q}_s = 0 \rightsquigarrow$  forces d'inertie d'entraînement
- b :  $\frac{\partial U_{ik}}{\partial t} = 0 \rightarrow$  forces d'inertie relatives (pour les liaisons indépendantes du temps)
- c : forces d'inertie complémentaires. Ce sont les forces gyroscopiques ( $F_s$ ) on montre que l'antisymétrie de ces efforts ( $g_{rs} = -g_{sr}$ ) implique que la puissance instantanée qu'elles livrent est nulle : $\sum_{s=1}^{n} F_s \dot{q}_s = 0$

#### Compléments sur la structure de l'énergie cinétique : exemple

Afin d'illustrer les diverses termes de l'énergie cinétique, considérons l'exemple suivant (figure 2.2.1) constitué d'un pendule simple *P* fixé à un solide mobile (*S*), de masse *M*, en translation par rapport au repère galliléen du mouvement ( $R_0$ ) associé au bâti fixe. Le pendule est une masse ponctuelle de masse *m* positionnée en *G* à l'extrémité d'une barre rigide de longueur  $\ell$ , reliée au solide mobile (*S*) par une articulation parfaite au point *A*. On associe au solide un repère ( $R_S$ ) et au pendule un repère ( $R_P$ ). Le solide est relié au bâti ( $R_0$ ) par un ressort de rappel de raideur *k* et de masse négligeable. On supposera que la position repos du système correspond à la configuration  $x_A(t = 0) = 0; \theta(t = 0) = 0.$ 

La position du point *G* dans la configuration courante peut être donnée par la forme classique  $u_i(x_i,t) = U_i(q_1,...,q_n,t)$ . Il faut bien veiller à faire apparaître toutes les dépendances, et notamment par rapport au temps. Ici par exemple, on pourrait supposer la vitesse  $V_A(t)$  connue, elle est alors appelée vitesse d'entraînement (par exemple pour un déplacement rectiligne uniformément accéléré :  $x_a(t) = \frac{1}{2}\gamma t^2$ ) du repère ( $R_P$ ) par



FIGURE 2.2.1 – Pendule entraîné par le solide (S) en translation rectiligne uniforme

rapport à  $(R_0)$ , et dépend de façon *explicite* du temps (2.1.3) :

$$\vec{OG}(\vec{x},t) = y_A \cdot \vec{y}_0 + \vec{U}(x_a,\theta) = y_A \cdot \vec{y}_0 + x_A \cdot \vec{x}_0 + \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \end{pmatrix}_{(R_P)} = \begin{pmatrix} x_A + \ell \sin \theta \\ y_A - \ell \cos \theta \end{pmatrix}_{(R_0)}$$
  
$$\rightsquigarrow \vec{OG}(\vec{x},t) = y_A \cdot \vec{y}_0 + \vec{U}(\theta,t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\gamma t^2 + \ell \sin \theta \\ y_A - \ell \cos \theta \end{pmatrix}_{(R_0)}$$
(2.2.21)

Cette dépendance explicite par rapport au temps, qui représente en fait une connaissance complémentaire, va changer la forme de l'énergie cinétique du système : elle fera apparaître le terme d'énergie cinétique d'entraînement (2.2.25), alors que lorsque cette fonction du temps est inconnue, cette contribution apparaît dans l'énergie cinétique relative (2.2.23). Ci-dessous ces expressions sont détaillées :

 $- x_a(t)$  inconnue :

La vitesse du point *G* est donnée soit par dérivation du vecteur position, soit en reprenant la définition générale des vitesses associées aux coordonnées généralisées (2.2.2):

$$\vec{V}(G \in P/R_0)_{(R_0)} = \begin{pmatrix} \dot{x}_A + \ell \dot{\theta} \cos \theta \\ \ell \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix}_{(R_0)}$$
(2.2.22)

D'où l'expression de l'énergie cinétique :

$$2T(S \cup P, R_0) = 2T(S, R_0) + 2T(P, R_0)$$
  
= 
$$\underbrace{2m \dot{x}_A \ell \dot{\theta} \cos \theta + (m+M) \dot{x}_A^2 + m \ell^2 \dot{\theta}^2}_{T_2(\theta, x_A, \dot{\theta}, \dot{x}_A)}$$
(2.2.23)

 $- x_A = \frac{1}{2}\gamma t^2$ 

Lorsque la vitesse d'entraînement est connue, on 'perd' la variable  $x_A$  au profit

de la dépendance (connue) explicite par rapport au temps :

$$\vec{V}(G \in P/R_0)_{(R_0)} = \begin{pmatrix} \gamma t + \ell \dot{\theta} \cos \theta \\ \ell \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix}_{(R_0)}$$
(2.2.24)

D'où l'expression de l'énergie cinétique, qui fait intervenir l'énergie cinétique d'entraînement :

$$2T(S \cup P, R_0) = 2T(S, R_0) + 2T(P, R_0)$$
  
=  $\underbrace{(m+M)(\gamma t)^2}_{T_0(\theta, t)} + \underbrace{2m\gamma t \, \ell\dot{\theta}\cos\theta}_{T_1(\theta, \dot{\theta}, t)} + \underbrace{m\ell^2\dot{\theta}^2}_{T_2(\theta, \dot{\theta})}$   
(2.2.25)

### 2.3.2 Conservation de l'énergie dans un système à liaisons scléronômes

On rappelle que pour des liaisons scléronômes, les coordonnées sont indépendantes et ne dépendent pas explicitement du temps. Donc les vitesses  $\dot{u}_{ik}$  dépendent uniquement des coordonnées généralisées (2.2.2). En conséquence, suite aux remarques précédentes concernant la décomposition de l'énergie cinétique en 3 parties distinctes (2.2.15), l'expression de l'énergie cinétique se limite à la partie relative pour les systèmes à liaisons scléronômes.

$$T(q_s, \dot{q}_s, t) = T_2(q_s, \dot{q}_s) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \dot{q}_s \frac{\partial T(q_s, \dot{q}_s)}{\partial \dot{q}_s} \,\mathrm{d'après} \,(2.2.19)$$

On peut exprimer les équations de Lagrange dans le cas particulier où l'énergie cinétique se limite à cette forme quadratique des vitesses généralisées. Pour cela calculons  $\frac{dT(q_s, \dot{q}_s)}{dt}$ . D'après (2.2.26) :

$$2\frac{dT(q_s, \dot{q}_s)}{dt} = \sum_{s=1}^n \ddot{q}_s \frac{\partial T(q_s, \dot{q}_s)}{\partial \dot{q}_s} + \sum_{s=1}^n \dot{q}_s \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T(q_s, \dot{q}_s)}{\partial \dot{q}_s}\right)$$
(2.2.27)

mais cette dérivation peut également se calculer directement par rapport aux  $q_s$  et  $\dot{q}_s$ :

$$\frac{dT(q_s, \dot{q}_s)}{dt} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial T(q_s, \dot{q}_s)}{\partial \dot{q}_s} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial T(q_s, \dot{q}_s)}{\partial q_s}\right) \frac{\partial q_s}{\partial t} 
= \sum_{s=1}^n \ddot{q}_s \frac{\partial T(q_s, \dot{q}_s)}{\partial \dot{q}_s} + \sum_{s=1}^n \dot{q}_s \frac{\partial T(q_s, \dot{q}_s)}{\partial q_s}$$
(2.2.28)

En faisant la différence (2.2.27)-(2.2.28), il vient :

$$\frac{dT(q_s, \dot{q}_s)}{dt} = \sum_{s=1}^n \dot{q}_s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T(q_s, \dot{q}_s)}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T(q_s, \dot{q}_s)}{\partial q_s} \right] = \sum_{s=1}^n \dot{q}_s Q_s$$
(2.2.29)

Dans le cas des systèmes conservatifs, on sait qu'il existe un potentiel  $V(q_s)$  tel que les efforts généralisés dérivent de ce potentiel (2.2.4). On peut donc remplacer les efforts généralisés  $Q_s$  dans (2.2.29) par leur expression dérivée du potentiel V. On retrouve alors l'expression de la dérivée par rapport au temps du potentiel V :

$$\frac{dT(q_s, \dot{q}_s)}{dt} = \sum_{s=1}^n \dot{q}_s \frac{\partial V(q_s)}{\partial q_s} = -\frac{dV(q_s)}{dt}$$
(2.2.30)

ou encore (on rappelle qu'ici  $T(q_s, \dot{q}_s, t) = T_2(q_s, \dot{q}_s))$ ,

$$\frac{d}{dt}\left(T(q_s, \dot{q}_s) + V(q_s)\right) = 0, \Leftrightarrow \boxed{T(q_s, \dot{q}_s) + V(q_s) = \varepsilon}$$
(2.2.31)

#### L'énergie $\varepsilon$ est constante dans un système conservatif à liaisons scléronômes.

Cette démonstration pour les systèmes à liaisons scléronômes doit se généraliser aux systèmes possédant des liaisons non-dissipatives en général.

### 2.4 Classification des forces généralisées

Les forces généralisée *intérieures* et *extérieures* au système peuvent être classées selon leur type (élastiques, conservatives, dissipatives, ...) ce qui permet de formuler les équations de Lagrange dans un cadre tout à fait général. Ces forces sont dites conservatives si le travail virtuel associé est récupérable.

### 2.4.1 Forces intérieures

### Forces de liaison

Les forces de liaison sont internes au systèmes, elles résultent des contraintes cinématiques imposées. Exemple, une liaison entre 2 masses  $:X_{i1} + X_{i2} = 0$  (action réaction). Le travail virtuel associé au déplacement virtuel ( $\delta u_{i1}, \delta u_{i2}$ ) est nul puisque nous avons vu que le champ virtuel est *C.A.*(0), c'est-à-dire que les déplacements virtuels imposés sont nuls.

En conséquence, les forces de liaison ne contribuent pas aux forces généralisées agissant sur l'ensemble du système. C'est un des attraits essentiels la mécanique Lagrangienne.

#### Forces élastiques

Dans un corps déformable, le travail est stocké sous forme récupérable. Les forces élastiques dérivent d'un potentiel élastique, ou potentiel de déformation (voir *Annexes* - A-1.27-b), qui s'exprime en calculant le travail virtuel  $\delta W_{el}$  effectué par ces effort internes dans le déplacement virtuel  $\delta \vec{u}$ :

$$\delta \mathcal{W}_{el} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V_{int}(q_s)}{\partial u_{ik}} \delta u_{ik} = \sum_{s=1}^{n} Q_s \delta q_s = -\delta V_{int}(q_s)$$
(2.2.32)

On en déduit l'expression des forces internes généralisées et du potentiel de déformation :

$$\exists V_{int}(q_s) / Q_s = -\frac{\partial V_{int}(q_s)}{\partial q_s}$$
(2.2.33)

#### **Forces dissipatives**

Ces forces sont de sens opposé au vecteur vitesse, orientées dans la même direction. Elles sont fonction du module du vecteur vitesse.

Les liaisons non-parfaites peuvent être dissipatives, c'est souvent le cas dans les systèmes réels. Un autre exemple de force dissipative est l'effort de rappel d'origine visqueuse d'un amortisseur tel que dans l'oscillateur élémentaire (voir *Partie 1 - eq. 1.2.9*).

On montre que le travail virtuel de ces forces dissipatives agissant sur le systèmes est non-nul. On introduit un *potentiel de dissipation* D:

$$\exists \mathcal{D}(\dot{q}_s) / - \frac{\partial \mathcal{D}(\dot{q}_s)}{\partial \dot{q}_s} = Q_s$$

La puissance dissipée est donnée par :

$$\mathcal{P}_{diss} = \sum_{s=1}^{n} Q_s \dot{q}_s = -\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{D}(\dot{q}_s)}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s$$

On montre que la fonction  $\mathcal{D}(\dot{q}_s)$  est homogène d'ordre *m* en fonction des vitesses généralisées, donc d'ordre m-1 pour les forces dissipatives généralisées qui en dérivent :

-m = 1: frottement sec

-m = 2: frottement visqueux

— m = 3: traînée aérodynamique (turbulence)

Donc la puissance dissipée vaut :

$$\mathcal{P}_{diss} = -\sum_{s=1}^{n} m \mathcal{D}(\dot{q}_s) \dot{q}_s$$

On peut noter que les forces extérieures peuvent également être dissipatives.

### 2.4.2 Forces extérieures

#### **Forces conservatives**

Comme nous l'avons vu précédemment, elles dérivent d'un potentiel (2.2.5) :

$$\exists V_{ext}(q_s) / Q_s = -\frac{\partial V_{ext}}{\partial q_s}$$

Le travail virtuel de ces forces sur un cycle est nul :

$$\delta \mathcal{W}_{ext-cons} = \oint Q_s \delta q_s = 0$$

#### **Forces non-conservatives**

Leur travail virtuel ne peut se simplifier comme dans les cas précédents, il s'exprime en fonction des efforts extérieurs (2.2.4) et des déplacements courants dérivés par rapport aux coordonnées généralisées :

$$\begin{split} \delta \mathcal{W}_{non-cons} &= -\sum_{s=1}^{n} Q_s \delta q_s = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} X_{ik} \delta u_{ik} \\ &= \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \sum_{s=1}^{n} X_{ik} \frac{\partial u_{ik}}{\partial q_s} \delta q_s \end{split}$$

Ce qui donne l'expression des efforts généralisés associés :

$$Q_s(t) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{N} X_{ik} \frac{\partial u_{ik}}{\partial q_s}$$

Au bilan la prise en comptes des forces non-conservatives internes et externes dans le calcul du bilan énergétique du système donne :

$$\frac{d}{dt}(T(q_s, \dot{q}_s, t) + V(q_s, \dot{q}_s)) = -m\mathcal{D}(\dot{q}_s) + \sum_{s=1}^n \mathcal{Q}_s(t)\dot{q}_s$$

où le potentiel total  $V(q_s) = V_{int}(q_s) + V_{ext}(q_s)$ 

### 2.5 Équations de Lagrange dans le cas général

Dans le cas général d'un système non-conservatif à liaisons cinématiques holonômes, les équations de Lagrange prennent en compte les forces intérieures et extérieures, dissipatives et conservatives, introduites précédemment. Au final, le mouvement du système est caractérisé par *s* équations :

### Équations de Lagrange pour les sytèmes non-conservatifs

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T(q_s, \dot{q}_s, t)}{\partial \dot{q}_s}\right) + \frac{\partial T(q_s, \dot{q}_s, t)}{\partial q_s} - \frac{\partial V(q_s)}{\partial q_s} - \frac{\partial \mathcal{D}(\dot{q}_s)}{\partial \dot{q}_s} + Q_s(t) = 0 \quad , s = 1 \dots n$$
(2.2.34)

ou encore, en détaillant les différents termes :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2(q_s, \dot{q}_s)}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial T_2(q_s, \dot{q}_s)}{\partial q_s} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T_1(q_s, \dot{q}_s, t)}{\partial \dot{q}_s}\right) + \frac{\partial V^*(q_s, t)}{\partial q_s} + \frac{\partial \mathcal{D}(\dot{q}_s)}{\partial \dot{q}_s} = Q_s(t) + F_s,$$

$$s = 1 \dots n$$
(2.2.35)

avec

 $Q_s(t)$ : les forces extérieures généralisées non-conservatives  $V(q_s) = V_{int}(q_s) + V_{ext}(q_s)$ : le potentiel total  $V^*(q_s) = V(q_s) - T_0(q_s, t)$ : le potentiel modifié par l'énergie cinétique d'entraînement  $\mathcal{D}(\dot{q}_s)$ : le potentiel de dissipation  $F_s = \sum_{s=1}^n G_{rs}$  les forces gyroscopiques généralisées

### **Exemple 1 : wagon+pendule**

Reprenons l'exemple de système du pendule suspendu à un wagon en mouvement rectiligne (figure 2.2.1).Dans un premier temps la vitesse de translation du wagon  $\dot{x}_A$  est supposée inconnue. Le calcul des forces généralisées passe par la détermination du travail virtuel effectué d'une part par la force élastique du ressort, et d'autre part par la pesanteur.

— Force élastique du ressort :

— Pesanteur :

$$\begin{split} \delta \mathcal{W}_{pes} &= m \vec{g} \cdot \delta \vec{y}_G \\ &= -m g \vec{y}_0 \cdot \delta (y_A - \ell \cos \theta) \vec{y}_0 \\ &= -m g \ell \sin \theta \, \delta \theta \\ & \downarrow \\ Q_{pes} &= -m g \ell \sin \theta \\ V_{pes} &= m g \ell (1 - \cos \theta) \qquad (V_{pes} (\theta(t=0)) = -m g \ell \cos \theta + C^{ste} = 0) \end{split}$$

Finalement, les grandeurs énergétiques du systèmes sont complètement déterminées (2.2.38), et les équations de Lagrange correspondantes sont les suivantes :

$$\begin{cases} 2T(\theta, x_A, \dot{\theta}, \dot{x}_A) = (m+M)\dot{x}_A^2 + 2m\dot{x}_A\dot{\theta}\,\ell\cos\theta + m\,\ell^2\dot{\theta}^2 \\ V(\theta, x_A) = \frac{1}{2}kx_A^2 + mg\ell(1-\cos\theta) \end{cases}$$
(2.2.38)

(2.2.37)

$$/x_A : (m+M)\ddot{x}_A + m\ell\left(\cos\theta\ddot{\theta} - \sin\theta\dot{\theta}^2\right) + kx_A = 0 \qquad (2.2.39a)$$

$$\theta : \cos\theta \ddot{x}_A + \ell \ddot{\theta} + g \sin\theta = 0 \qquad (2.2.39b)$$

Dans le cas où la vitesse de translation du wagon est connue ( $x_A(t) = \frac{1}{2}\gamma t^2$ ), les grandeurs énergétiques du système sont les suivantes :

$$\begin{cases} 2T(\theta,\dot{\theta},t) = (m+M)(\gamma t^2)^2 + 2m\gamma t\,\ell\dot{\theta}\cos\theta + m\,\ell^2\dot{\theta}^2 \\ V(\theta,t)) = \frac{1}{2}k\left(\frac{\gamma t^2}{2}\right)^2 + mg\ell(1-\cos\theta) \end{cases}$$

et les équations de Lagrange se limitent à une équation par rapport à  $\theta$  le seul paramètre inconnu de ce système, identique à l'équation (2.2.39-b) du système dans sa formulation indépendante du temps explicitement :

$$/\theta : \gamma \cos \theta + \ell \dot{\theta} + g \sin \theta = 0 \qquad (2.2.40)$$

#### **Exemple 2 : Pendule double**

Reprenons l'exemple du pendule double présenté précédemment (page 36), avec cette fois-ci les barres pesantes de masses  $m_1$  et  $m_2$  et de centre de gravité  $G_1$  et  $G_2$ . De plus, un ressort de rappel de raideur k et de masse négligeable fixé au repère du mouvement  $R_0$  est relié en A au système. Au point B s'exerce une force d'intensité constante  $F_y$  portée par une direction colinéaire à l'axe  $O\vec{y}$  (figure 2.2.2).

On montre que l'énergie cinétique et le potentiel dont dérivent les efforts s'écrivent :

$$\begin{cases} T(\mathcal{S}, R_0) = \frac{1}{2} \frac{m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2}{3} + \frac{1}{2} m_2 \left( \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{\ell_2^2}{3} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \ell_1 \ell_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \right) \\ V(\mathcal{S}, R_0) = \frac{1}{2} k \ell_1^2 \sin^2 \theta_1 - F_y (\ell_1 \sin \theta_1 + \ell_2 \sin (\theta_1 + \theta_2)) \\ + \frac{m_1 g \ell_1}{2} (1 - \cos \theta_1) + m_2 g \left( \ell_1 (1 - \cos \theta_1) + \frac{\ell_2}{2} (1 - \cos (\theta_1 + \theta_2)) \right) \\ (2.2.41) \end{cases}$$



FIGURE 2.2.2 – Pendule double

On en déduit les équations de Lagrange de ce système :

Troisième partie

Oscillations des systèmes à N degrés de liberté

Dans cette partie, les concepts introduits dans la partie précédente sont étendus pour exprimer l'équilibre des systèmes discrets à *N ddl*, mais également caractériser la stabilité de cet équilibre. Grâce à une *linéarisation* des équations d'équilibre autour d'un point d'équilibre, la stabilité du système peut être caractérisée. On verra également que l'*analyse modale*, c'est-à-dire la projection des équations d'équilibre dans la base des modes propres, permet d'étendre assez simplement les concepts utilisables dans le cas des systèmes à 1 *ddl* : analyse de la réponse libre, forcée, amortie, ... C'est d'ailleurs ce type d'analyse qui est à la base des résolutions numériques utilisées couramment dans les codes de calculs.

# - 1 -

# Concepts de stabilité des équilibres

### Sommaire

1.1	Définition d'un équilibre	58
1.2	Petites oscillations autour d'une configuration d'équilibre	58
1.3	Stabilité d'un équilibre paramétrique	59
1.4	Linéarisation des énergies	60
1.5	Équations des oscillations libres - Linéarisation du pendule double avec ressort de rappel	61

Nous avons vu dans les parties précédentes que les équations de Lagrange caractérisent l'équilibre dynamique d'un système (2.2.34). Ces équations différentielles d'ordre 2 peuvent être résolues, de façon numérique ou encore analytique.

Dans le cas d'une résolution numérique, l'équilibre peut être recherché par diverses méthodes : intégration de Newmark par exemple ou encore  $\theta$ Wilson. Ces méthodes de résolution sont souples, et vont permettre de trouver rapidement les solutions de l'équilibre du système étudié. Par contre, ces méthodes doivent être adaptées à chaque famille de cas, notamment en fonction de l'amortissement du système considéré, comme nous le verrons dans la suite.

Les résolutions analytiques ne sont possibles que dans les cas simples. Pourtant ces méthodes de résolution fournissent les bases des résolution numériques. On peut grâce à ces approches :

- déterminer des positions d'équilibre
- déterminer le mouvement au voisinage de cette position
- déterminer des mouvements stationnaires
- déterminer les oscillations autour des mouvements stationnaires

### 1.1 Définition d'un équilibre

L'équilibre au temps  $t_0$  peut être par rapport à un seul paramètre ou paramétrique :

— équilibre par rapport à un paramètre  $q_j$  ( $q_j$  est donné, et n'évolue pas dans le temps)

$$\begin{array}{l} q_i(t_0) = q_{i0}, \quad \dot{q}_i(t_0) = \dot{q}_{i0}, \quad \text{si } i \neq j \\ q_i(t_0) = q_{je}, \quad \dot{q}_i(t_0) = 0, \quad \text{si } i = j \end{array} \right\} \ q_j(t) = q_{je} \ , \forall t$$

équilibre paramétrique

$$\begin{array}{c} q_i(t_0) = q_{ie}, \quad \forall i \\ \dot{q}_i(t_0) = 0 \quad \forall i \end{array} \right\} q_i(t) = q_{ie}, \ \forall t, \ \forall i \end{array}$$

### 1.2 Petites oscillations autour d'une configuration d'équilibre

Comme nous l'avons vu précédemment (2.2.14), pour un système à liaisons scléronômes, l'énergie cinétique se limite à la partie quadratique en vitesse (relation 2.2.18 :  $T(t, \bar{q}, \bar{\dot{q}}) = T_2(\bar{q}, \bar{\dot{q}})$ ). Ce qui donne pour les équations de Lagrange exprimées pour l'équilibre paramétrique  $\bar{q}_e = (q_{1e}, q_{2e}, q_{3e}, ..., q_{ne})$ :

$$\underbrace{-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_2(\bar{q}_e, \bar{q}_e)}{\partial \dot{q}_i}\right)}_{0} + \underbrace{\frac{\partial T_2(\bar{q}_e, \bar{q}_e)}{\partial q_i}}_{0} = \underbrace{-Q_i = \frac{\partial V(\bar{q}_e)}{\partial q_i}}_{\Downarrow}, \forall i$$

$$\underbrace{V(\bar{q})}_{V(\bar{q})}$$

$$(3.1.1)$$

avec le premier terme qui s'annule car la variation de l'énergie cinétique par rapport aux vitesses est une forme linéaire des vitesses uniquement, le second terme quant à lui étant invariant par nullité des vitesses autour de l'équilibre. Remarque : pour un système en translation rectiligne uniforme, l'énergie cinétique relative reste inchangée, ces conclusions restent donc valables.

On voit donc que l'équilibre dépend du potentiel (des efforts extérieurs et intérieurs dans le cas général), résultat classique de la statique pour un système conservatif : l'énergie fournie par les efforts extérieurs est intégralement stockée en énergie intérieure (de déformation). Pour la solution  $\bar{q}_e$ , ce potentiel sera un minimum relatif (V(0) = K), et un minimum absolu si le potentiel est strictement convexe ( $\frac{\partial^2 V}{\partial q_i^2} > 0$ ). La condition nécessaire et suffisante pour cet équilibre s'exprime simplement :

$$\frac{\partial V(\bar{q}_e)}{\partial q_i} = 0, \ \forall i$$

Ceci se généralise pour tout système, caractérisé par les équations de Lagrange dans le cas général (2.2.34). Dans ce cas le potentiel est modifié pour tenir compte de l'énergie cinétique d'entraînement :

$$rac{\partial V^*(ar{q}_e)}{\partial q_i} = 0, \ \forall i \quad ext{avec } V^* = V - T_0$$

L'équilibre étant caractérisé, il faut maintenant pouvoir répondre à la question essentielle de la stabilité de cet équilibre :

- $\diamond$  l'équilibre est-il stable ?
- ♦ que se passe-t-il si on décale légèrement de cette position d'équilibre ?

### 1.3 Stabilité d'un équilibre paramétrique

Par définition, un équilibre est dit *stable* si le système étant dans des conditions initiales *voisines* de l'équilibre, la trajectoire du système reste dans un voisinage de la position d'équilibre. Ceci s'écrit de façon formelle :

l'état  $\bar{q_e} = (q_{1e}, q_{2e}, q_{3e}, ..., q_{ne})$  est dit stable si et seulement si

$$\left. \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{c} \epsilon > 0 \\ \mu > 0 \end{array} \right\} \ \exists \begin{array}{c} \eta > 0 \\ \nu > 0 \end{array} \right\} \ / \ \forall \begin{array}{c} q_i(t_0) = q_{i0} \\ \dot{q}_i(t_0) = \dot{q}_{i0} \end{array} \right\} \ \text{v\'erifiant} \ \begin{array}{c} \left| q_{i0} - q_{ie} \right| \le \eta \\ \left| \dot{q}_{i0} \right| \le \nu \end{array} \right\}$$
on ait  $\forall t \ge t_0, \ \exists \begin{array}{c} \left| q_i(t) - q_{ie} \right| \le \epsilon \\ \left| \dot{q}_i(t) \right| \le \mu \end{array} \right\}$ 

Si  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont 'petits', la stabilité est dite conditionnelle, et si  $\varepsilon$  et v sont  $\infty$ , la stabilité est dite globale. Ces expressions indiquent que l'évolution de la position courante est nécessairement bornée en déplacement et en vitesse. Ou de façon énergétique, la stabilité d'un équilibre s'énonce de la façon suivante : la position d'équilibre est stable lorsqu'il existe une borne d'énergie  $\varepsilon^*$  telle que, si l'énergie communiquée est  $\varepsilon < \varepsilon^*$ , on a  $T \le \varepsilon$  à tout instant ultérieur, l'égalité n'ayant lieu qu'à l'équilibre. Cette caractérisation de l'équilibre nécessite la résolution des équations différentielles traduisant le mouvement autour de la position d'équilibre lorsque l'on décale le système par rapport à sa position instantanée. Ces équations étant souvent non-linéaires, il est bien souvent impossible de les résoudre directement. Nous verrons dans le paragraphe suivant une approximation de ces équations d'équilibre.

Pour le moment, on peut proposer une définition plus intuitive de la stabilité. Nous avons vu que l'équilibre d'un système conservatif à liaisons scléronômes est caractérisé par l'invariance de la somme du potentiel des efforts conservatifs et de l'énergie cinétique (Eq 2.2.31 :  $\frac{d}{dt}$  ( $T(\bar{q}, \bar{q}) + V(\bar{q})$ ) = 0). Le potentiel des efforts extérieurs V étant défini à une constante prés, posons  $\bar{q}(t_0) = 0$ . Ceci implique que  $V(t_0) = 0$ . Un système sera stable si et seulement si l'énergie cinétique du système diminue pour toute position à un instant ultérieur, ce qui se traduit par un minimum relatif, autour de la position d'équilibre, du potentiel des efforts extérieurs du système (Eq. 3.1.2).

$$T(\bar{q}, \bar{q}) + V(\bar{q}) = \varepsilon \quad \text{à} \ t = t_0 \quad \text{,or } V(0) = 0$$
  

$$\Rightarrow T(t_0) = \varepsilon \quad \text{et } T(t) \le \varepsilon \quad (<\varepsilon^*)$$

$$\Rightarrow V(t) \ge 0 \quad \text{, alors } V(t_0) \quad \text{est un minimum relatif}$$
(3.1.2)



FIGURE 3.1.1 – Pendule simple dans une configuration (a) stable et (b) instable.

On voit que la stabilité dépend donc du potentiel des efforts. Ceci se comprend aisément avec l'exemple de base du pendule simple (Figure 3.1.1). Ce concept s'étend grâce au théorème de Lejeune-Dirichlet qui fournit, sous certaines hypothèses, une condition suffisante de stabilité de l'équilibre :

Théorème de Lejeune-Dirichlet : soit un système S dont les liaisons sont indépendantes du temps, soumis à des forces dérivant d'un potentiel indépendant du temps. Si pour une position d'équilibre  $\bar{q}_e$  du système, le potentiel est un *minimum strict*, alors  $\bar{q}_e$  est une position d'équilibre stable.

La stabilité dépendra donc de la convexité du potentiel. C'est un résultat classique, à la base du traitement des problèmes d'instabilité des structures par exemple.

### 1.4 Linéarisation des énergies

Afin d'étudier la stabilité des équilibres, nous venons de voir qu'il faut pouvoir caractériser la convexité de l'énergie potentielle. Pour rechercher cette convexité, il faut évaluer les termes quadratiques du potentiel des efforts conservatifs. Procédons à un développement linéaire de ce potentiel, au voisinage de la configuration d'équilibre  $\bar{q}_0 = \bar{0}$ :

$$V(\bar{q}) = V(0) + \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial q_s}\right)_{|\bar{q}_0=\bar{0}} q_s + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_r}\right)_{|\bar{q}_0=\bar{0}} q_s q_r + O(\bar{q}^3)$$

Puisque le système est en équilibre  $\frac{\partial V}{\partial q_s} = 0$ , et le potentiel étant défini à une constante près, on a également V(0) = 0. Finalement, la courbure du potentiel est donnée par le seul terme restant, qui doit être positif pour que la stabilité soit assurée :

$$V(\bar{q}) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} k_{rs} q_s q_r > 0 \text{ pour } \bar{q} \neq 0$$
avec :

$$k_{rs} = k_{sr} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_r}\right)_{|\bar{q}_0 = \bar{0}}$$

Matriciellement la partie quadratique du potentiel s'écrit :

$$V(\bar{q}) = \frac{1}{2} \bar{q}^t \,\overline{\overline{K}} \, \bar{q} > 0 \text{ pour } \bar{q} \neq \bar{0}$$

K, *matrice de raideur linéaire* du système, est donc symétrique et définie positive pour assurer la stabilité.

De même pour l'énergie cinétique, on se limite au cas où le système ne subit pas d'entraînement. L'énergie cinétique se réduit donc à l'énergie cinétique relative qui est une forme quadratique des vitesses (relation 2.2.18). La linéarisation autour de l'équilibre ( $\bar{q}_0 = \bar{0}, \bar{q}(t_0) = 0$ ) conduit également à éliminer les dépendances par rapport aux coordonnées généralisées. Le développement s'effectue donc uniquement par rapport aux vitesses :

$$T_{2}(\bar{q},\bar{\dot{q}}) = T_{2}(0) + \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial T_{2}}{\partial \dot{q}_{s}}\right)_{|\bar{q}_{0}=\bar{0}} \dot{q}_{s} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial^{2} T_{2}}{\partial \dot{q}_{s} \partial \dot{q}_{r}}\right)_{|\bar{q}_{0}=\bar{0}} \dot{q}_{s} \dot{q}_{r} + O(\bar{q}^{3})$$

$$\Downarrow$$

$$T_{2}(\bar{\dot{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} m_{rs} \dot{q}_{s} \dot{q}_{r} \quad \text{avec } m_{rs} = m_{sr} = \left(\frac{\partial^{2} T_{2}}{\partial \dot{q}_{s} \partial \dot{q}_{r}}\right)_{|\bar{q}_{0}=\bar{0}}$$

Matriciellement la partie quadratique de l'énergie cinétique s'écrit avec *M* la *matrice de masse linéaire* symétrique et définie positive (voir 2.2.18) du système :

$$T_2(\bar{q}) = \frac{1}{2} \, \bar{q}^t \, \overline{\overline{M}} \, \bar{q} > 0 \quad \text{pour } \bar{q} \neq \bar{0}$$

# **1.5** Équations des oscillations libres - Linéarisation du pendule double avec ressort de rappel

Autour d'une configuration d'équilibre ( $\bar{q}(t_0) = 0$  et  $\bar{q}(t_0) = 0$ ), les équations *linéarisées* du mouvement pour un système conservatif deviennent :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \underbrace{\frac{\partial T}{\partial q_i}}_{\overline{\overline{M}}\overline{\overline{q}} - \overline{\overline{0}}} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial q_i}}_{\overline{\overline{N}}\overline{\overline{q}} = \overline{0}} = 0, \forall i$$

$$\overline{\overline{M}}\overline{\overline{q}} + \overline{\overline{K}}\overline{\overline{q}} = \overline{0} \quad \rightsquigarrow \quad \overline{\overline{M}}\overline{\overline{q}} + \overline{\overline{K}}\overline{\overline{q}} = \overline{0} \quad (\text{éq. de Lagrange})$$

$$(3.1.3)$$

le second terme étant nul du fait de la linéarisation autour de la position d'équilibre. C'est à partir de cette formulation matricielle que les problèmes sont formulés, résolus par éléments finis par exemple. Dans le cas du pendule double vu précédemment, au §2.5 page 50, les équations d'équilibre sont non-linéaires. Afin de résoudre analytiquement ce problème, on linéarise ces équations en utilisant les développements limités des paramètres cinématiques autour de leur configuration à l'équilibre :

$$\sin \theta \simeq \theta \text{ et } \cos \theta \simeq 1 \\ 1 - \cos \theta \simeq 1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \simeq \frac{\theta^2}{2}$$

Ce qui donne pour le pendule double, la forme matricielle suivante pour l'énergie cinétique :

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2} t \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta_1} \\ \dot{\theta_2} \end{array} \right\} \cdot \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \frac{m1\ell_1^2}{3} + m_2 \left( \ell_1 \left( \ell_1 + \ell_2 \right) + \frac{\ell_2^2}{3} \right) & m_2 \ell_2 \left( \frac{\ell_2}{3} + \frac{\ell_1}{2} \right) \\ m_2 \ell_2 \left( \frac{\ell_2}{3} + \frac{\ell_1}{2} \right) & \frac{m_2 \ell_2^2}{3} \end{array} \right]}_{[M] : matrice \ de \ masse \ \grave{a} \ coefficients \ constants} \quad \cdot \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta_1} \\ \dot{\theta_2} \end{array} \right\}$$

et pour la contribution de la pesanteur et du ressort de rappel dans le potentiel extérieur :

$$V_{g}(\mathcal{S}/R_{0}) = \frac{1}{2} t \left\{ \begin{array}{c} \theta_{1} \\ \theta_{2} \end{array} \right\} \cdot \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \frac{m1g\ell_{1}}{2} + m_{2}g\left(\ell_{1} + \frac{\ell_{2}}{2}\right) + k\ell_{1}^{2} & \frac{m_{2}g\ell_{2}}{2} \\ \frac{m_{2}g\ell_{2}}{2} & \frac{m_{2}g\ell_{2}}{2} \end{array} \right]}_{[K] : matrice de raideur à coefficients constants} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \theta_{1} \\ \theta_{2} \end{array} \right\}$$

[K] : matrice de raideur à coefficients constants

En introduisant le vecteur des efforts extérieurs  $\{F\}$  tel que :

$$V_F(\mathcal{S}/R_0) = - t \left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} F_y(\ell_1 + \ell_2) \\ F_y\ell_2 \end{array} \right\}$$

Finalement l'équilibre est caractérisé par les équations classiques :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\}$$

## - 2 -

## Modes normaux de vibration

#### Sommaire

2.1	K et N	1-Orthogonalité des modes propres	64	
2.2	Oscillations libres résultant de conditions initiales non-homogènes			
	2.2.1	Exemple de calcul modal : Pendule double avec masses		
		ponctuelles	67	
2.3	Décomposition modale d'un vecteur quelconque ou d'une matrice			
	2.3.1	Exemple : Pendule triple	70	
	2.3.2	Exemple de calcul modal : Système à 2 masses et ressorts		
		de rappel	71	
2.4	Réponse harmonique forcée		74	
	2.4.1	Analyse en l'absence de modes rigides	75	
	2.4.2	Application au système de 2 masses et ressorts	77	
	2.4.3	Système possédant des modes rigides	79	
2.5	Répor	nse à une sollicitation quelconque extérieure	80	
2.6	<b>5</b> Fonction de transfert		81	
	2.6.1	Analogie avec l'oscillateur élémentaire	81	
	2.6.2	Signification physique	82	
	2.6.3	Domaine temporel	82	
	2.6.4	Application au système à 2 masses + ressorts	83	

Pour résoudre l'équation des oscillations libres présentée ci-dessus (3.1.3), on cherche une solution de type particulier dans laquelle toutes les coordonnées généralisées suivent, à un facteur prés, la même loi temporelle :

$$\bar{q} = \bar{X}\phi(t)$$

avec  $\bar{X}$  la forme propre du mouvement. D'où la nouvelle expression de l'équilibre linéarisé :

$$\ddot{\phi}(t)\overline{\overline{M}}\overline{X} + \phi(t)\overline{\overline{K}}\overline{X} = \overline{0}$$

Dans le cas des systèmes à position d'équilibre, les matrices  $\overline{\overline{K}}$  et  $\overline{\overline{M}}$  sont définies positives, d'où l'équilibre est caractérisé par :

$$\overline{\overline{K}}\overline{X} = \lambda \overline{\overline{M}}\overline{X}$$
, avec  $\lambda = -\frac{\phi(t)}{\phi(t)}$  (3.2.1)

avec  $\overline{K}\overline{X}$  et  $\overline{\overline{M}}\overline{X}$  non-nuls pour  $\overline{X} \neq \overline{0}$ . On montre facilement que  $\lambda$  est réel et positif : Démonstration : on considère le cas le plus général où le mode propre  $\overline{X} = \overline{a} + i\overline{b}$  est complexe, l'équilibre 3.2.1 devient :

$$\overline{\overline{K}}\left(\bar{a}+i\bar{b}\right)=\lambda\overline{\overline{M}}\left(\bar{a}+i\bar{b}\right)$$

en multipliant à gauche par  $\bar{a} - i\bar{b}$ , le conjugué de  $\bar{X}$ , et en notant que la symétrie de  $\overline{\overline{K}}$  et  $\overline{\overline{M}}$  entraîne que :

$$\begin{cases} \bar{a}^t \overline{\overline{K}} \bar{b} = \left( \bar{a}^t \overline{\overline{K}} \bar{b} \right)^t = \bar{b}^t \overline{\overline{K}} \bar{a} & \text{forme quadratique définie positive} \\ \bar{a}^t \overline{\overline{M}} \bar{b} = \left( \bar{a}^t \overline{\overline{M}} \bar{b} \right)^t = \bar{b}^t \overline{\overline{M}} \bar{a} & \text{forme quadratique définie positive} \end{cases}$$

on exprime le coefficient  $\lambda$  positif :

$$\lambda = \frac{\bar{a}^t \,\overline{\overline{K}} \,\bar{a} + \bar{b}^t \,\overline{\overline{K}} \,\bar{b}}{\bar{a}^t \,\overline{\overline{M}} \,\bar{a} + \bar{b}^t \,\overline{\overline{M}} \,\bar{b}} > 0$$

On pose donc  $\lambda = \omega^2 = -\frac{\ddot{\varphi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}$ . Le système (3.2.1) devient alors  $\left(\overline{\overline{K}} - \omega^2 \overline{\overline{M}}\right) \overline{X} = \overline{0}$ , un système de *n* équations linéaires et homogènes. La solution non-triviale de ce système correspond à  $det\left(\overline{\overline{K}} - \omega^2 \overline{\overline{M}}\right) = 0$ , ce qui correspond à un problème aux valeurs propres. *n valeurs propres* réelles et positives sont déduites de ce problème  $(\omega_r^2, r = 1, ..., n)$  auxquelles correspondent des *vecteurs propres*  $\overline{X}_r$  appelés *modes propres*. Ces valeurs propres étant positives, la solution en temps correspondante est harmonique :  $\phi_r(t) = \alpha_r \cos \omega_r t + \beta_r \sin \omega_r t$ .

Cas particulier : le système admet des modes de déplacement de type corps rigide

- ces mouvements de corps rigide correspondent à des modes propres de pulsation nulle, ce sont des mouvements d'ensemble qui n'induisent aucune déformation élastique du système. Les configurations d'équilibre sont indifférentes,
- ces modes vérifient  $\overline{K}\overline{U} = \overline{0}$ , ce qui correspond à une singularité de la matrice de raideur (pivot nul)
- les modes restants sont des modes propres élastiques

#### 2.1 K et M-Orthogonalité des modes propres

Les propriétés d'orthogonalité décrites ici sont les fondements des calculs dans les *bases modales*. Ces projections permettent de découpler les équations d'équilibre et sont utilisées dans les résolutions analytiques, mais surtout aujourd'hui dans les codes de calcul par éléments finis. Ces projections permettent en effet de réduire considérablement la taille des systèmes à résoudre.

Partant du calcul des valeurs propres ( $\omega_r$ ), le système s'écrit en utilisant les modes propres associés ( $\bar{X}_r$ ) :

$$\overline{\overline{K}}\overline{X}_r = \omega_r^2 \overline{\overline{M}}\overline{X}_r$$

en multipliant à gauche par  $\bar{X}_s^t$ , avec la valeur propre associée  $\omega_s$  différente de  $\omega_r$ , puis à droite :

$$\bar{X}_{s}^{t}\overline{\overline{K}}\bar{X}_{r} = \omega_{r}^{2}\bar{X}_{s}^{t}\overline{\overline{M}}\bar{X}_{r} \tag{3.2.2}$$

$$\bar{X}_r^t \overline{\overline{K}} \bar{X}_s = \omega_s^2 \bar{X}_r^t \overline{\overline{M}} \bar{X}_s \tag{3.2.3}$$

soit au final (3.2.2 - 3.2.3), en utilisant les propriétés de symétrie des matrices de masse et de raideur :

$$\left(\omega_r^2 - \omega_s^2\right) \bar{X}_s^t \overline{\overline{M}} \bar{X}_r = 0$$

Ayant des valeurs propres distinctes,  $\omega_r \neq \omega_s$ , on déduit :

$$\bar{X}_s^t \overline{\overline{M}} \bar{X}_r = 0$$

et en reportant dans (3.2.2):

$$\bar{X}_s^t \overline{\overline{K}} \bar{X}_r = 0$$

Ces relations sont les relations d'*orthogonalité des modes propres*. Plus exactement, les modes sont dits K et *M-orthogonaux*. La signification physique de ces relations d'orthogonalité est la suivante :

- le travail virtuel des forces d'inertie du mode *r* lors d'un déplacement selon le mode *s* est nul :  $\overline{\overline{M}}\overline{X}_r = \overline{F}_r^{\omega} \Rightarrow \delta \overline{X}_s^t \overline{F}_r^{\omega} = 0$
- le travail virtuel des forces élastiques du mode *r* lors d'un déplacement selon le mode *s* est nul :  $\overline{\overline{K}}\overline{X}_r = \overline{F}_r^e \Rightarrow \delta \overline{X}_s^t \overline{F}_r^e = 0$

On définit la *masse généralisée* du mode considéré  $\bar{X}_r^t \overline{M} \bar{X}_r = \mu_r$ , et la *raideur* généralisée  $\bar{X}_r^t \overline{K} \bar{X}_r = \gamma_r$  correspondante qui sont reliées par :

$$\gamma_r = \omega_r^2 \mu_r$$

On notera que ces deux grandeurs sont définies à une constante multiplicative près, tout comme les vecteurs propres. L'indétermination sur l'amplitude de  $\bar{X}_r$  (mode propre définit à une constante multiplicative prés) peut être levée en choisissant une norme. Par exemple, on choisit  $sup(X_r^i) = 1$ , ou on fixe la masse généralisée  $\mu_r$  à l'unité. Dans ce dernier cas les relations entre masse et raideur généralisées deviennent :

$$\frac{\bar{X}_{r}^{t}\overline{K}\bar{X}_{r}}{\bar{X}_{r}^{t}\overline{\overline{M}}\bar{X}_{r}} = \frac{\gamma_{r}}{\mu_{r}} = \omega_{r}^{2} \implies \bar{X}_{r}^{t}\overline{\overline{K}}\bar{X}_{r} = \omega_{r}^{2}$$
(3.2.4)

Au final, on notera que seul le rapport des raideur et masse généralisées est important puisque ces deux grandeurs sont définies à une constante multiplicative près. En conclusion, pour les vecteurs normés pour une masse généralisée unitaire on a :

$$\bar{X}_{r}^{t}\overline{\overline{K}}\bar{X}_{s} = \omega_{r}^{2}\delta_{rs}$$

$$\bar{X}_{r}^{t}\overline{\overline{M}}\bar{X}_{s} = \delta_{rs}$$

$$(3.2.5)$$

avec  $\delta_{rs}$  le symbole de Kronecker.

**Théorème de dégénérescence** : lorsqu'une racine  $\omega_p^2$  est multiple, il y correspond autant de vecteurs propres linéairement indépendants que le degré de multiplicité de la racine. En corollaire, les relations d'orthogonalité restent valables.

# 2.2 Oscillations libres résultant de conditions initiales non-homogènes

Considérons l'équilibre discret énoncé précédemment (3.1.3), et fixons les conditions initiales non-homogènes :

$$\overline{\overline{M}}\overline{\ddot{q}}+\overline{\overline{K}}\overline{q}=0~~{
m avec}~ar{q}(0)=ar{q}_0~{
m et}~ar{q}(0)=ar{q}_0~{
m donn\acute{e}s}$$

Pour résoudre ce problème, on réécrit le vecteur déplacement comme le produit de 2 grandeurs indépendantes, l'une étant fonction uniquement du temps et l'autre étant formée par les vecteurs propres. Pour cela, on forme le système matricielle suivant, en introduisant la *matrice modale*  $\overline{\overline{X}} = [\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n]$  où les modes propres sont normés par rapport à  $\overline{\overline{M}}$  ( $\overline{X}_r^t \overline{\overline{M}} \overline{X}_r = 1$ ), et le vecteur des *coordonnées normales* associé  $\overline{\eta}^t = [\eta_1, \dots, \eta_n]$ . Finalement, le vecteur des inconnues généralisées devient :

$$\bar{q}(t) = \sum_{s=1}^{n} \bar{X}_s \eta_s(t) = \overline{\overline{X}} \bar{\eta}(t)$$

L'équilibre du système s'écrit alors :

$$\overline{\overline{M}}\overline{\ddot{q}} + \overline{\overline{K}}\overline{q} = 0 \Leftrightarrow \overline{\overline{M}}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\ddot{\eta}}(t) + \overline{\overline{K}}\,\overline{\overline{X}}\,\overline{\eta}(t) = 0$$

en multipliant à gauche par  $\overline{\overline{X}}$  et en tenant compte des relations d'orthogonalité :

$$\overline{\overline{X}}^t \, \overline{\overline{M}} \, \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{I}} \, \text{ et } \, \overline{\overline{X}}^t \, \overline{\overline{K}} \, \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{\Omega^2}} = diag[\omega_1^2, \dots, \omega_n^2]$$

on aboutit au système d'équations linéaires écrites en temps uniquement, ce qui se traduit dans la base modale par les *n équations normales découplées* :

$$\overline{\ddot{\eta}}(t) + \overline{\overline{\Omega^2}}\overline{\eta}(t) = \overline{0} \Leftrightarrow \ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = 0, \ \forall r = 1, \dots, n$$

dont chaque solution est harmonique ( $\omega^2 > 0$ ) :

$$\eta_r = \alpha_r \cos \omega_r t + \beta_r \sin \omega_r t$$

ce qui conduit à :

$$\bar{q}(t) = \sum_{s=1}^{n} \left( \alpha_s \cos \omega_s t + \beta_s \sin \omega_s t \right) \bar{X}_s$$

Les conditions initiales non-homogènes vont nous permettre d'exprimer les 2n inconnues.

$$\bar{q}_0 = \sum_{s=1}^n \alpha_s \bar{X}_s$$
 et  $\bar{q}_0 = \sum_{s=1}^n \beta_s \omega_s \bar{X}_s$ 

 $\alpha_s$  et  $\beta_s$  apparaissent comme les coefficients de la décomposition de  $\bar{q}_0$  et  $\bar{q}_0$  suivant les modes propres. En fait, il est nécessaire, pour pouvoir les utiliser, de projeter ces conditions initiales dans la base modale dans laquelle est exprimé dorénavant notre problème. En multipliant à gauche par  $\bar{X}_r^t \overline{M}$ , et en utilisant les relations d'orthogonalité, ces coefficients s'expriment très simplement en fonction des conditions initiales :

$$\bar{X}_r^t \overline{\overline{M}} \, \bar{q}_0 = \sum_{s=1}^n \alpha_s \bar{X}_r^t \overline{\overline{M}} \bar{X}_s = \alpha_r \mu_r$$

et

$$\bar{X}_r^t \, \overline{M} \, \bar{\dot{q}}_0 = \sum_{s=1}^n \beta_s \omega_s \bar{X}_r^t \overline{M} \bar{X}_s = \beta_r \omega_r \mu_r$$

Donc les coefficients s'expriment en fonction des conditions initiales projetées dans la base modale :

$$\alpha_r = \frac{\bar{X}^t \,\overline{M} \,\bar{q}_0}{\mu_r} \text{ et } \beta_r = \frac{\bar{X}^t \,\overline{M} \,\bar{\dot{q}}_0}{\mu_r \omega_r} \tag{3.2.6}$$

ce qui conduit finalement à l'expression de la solution de l'équilibre :

$$\bar{q}(t) = \left(\sum_{s=1}^{n} \frac{\bar{X}_{s} \bar{X}_{s}^{t} \overline{\overline{M}}}{\mu_{s}} \cos \omega_{s} t\right) \bar{q}_{0} + \left(\sum_{s=1}^{n} \frac{\bar{X}_{s} \bar{X}_{s}^{t} \overline{\overline{M}}}{\mu_{s} \omega_{s}} \sin \omega_{s} t\right) \bar{q}_{0}$$
(3.2.7)

#### 2.2.1 Exemple de calcul modal : Pendule double avec masses ponctuelles

Pour simplifier les calculs nous considérerons le cas du pendule double traité précédemment (figure 1.3 reportée également page 68) avec cette fois-ci des masses pesantes  $m = m_1 = m_2$  situées aux extrémités des barres rigides de longueur  $\ell_1 = \ell_2 = 2\ell$ . On considérera des conditions initiales homogènes.

Le système caractérisant l'équilibre linéarisé du pendule double s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 4\ell & 2\ell \\ 2\ell & 2\ell \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\theta_1} \\ \ddot{\theta_2} \end{array} \right\} + \begin{bmatrix} 2g & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

Les carrés des pulsations propres de ce système, réels positifs par construction, sont :



FIGURE 3.2.1 – Pendule double constitué de masses ponctuelles

$$\omega_1^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{g}{l}$$
$$\omega_2^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{g}{l}$$

et les vecteurs propres associés (normés par le  $sup(|X_i|)$ ) sont :

$$\bar{X}_1 = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \end{array} \right\}$$
$$\bar{X}_2 = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{array} \right\}$$

Les masses et raideurs généralisées associées sont :

$$\mu_1 = 4(2 - \sqrt{2})\ell$$
  $\mu_2 = 4(2 + \sqrt{2})\ell$   
 $\gamma_1 = 4g$   $\gamma_2 = 4g$ 

En utilisant la projection dans la base modale ( $\bar{q} = \overline{X}\bar{\eta}(t)$ ), le problème est découplé. Il faut au préalable former la matrice [X] de projection dans la base modale, à partir des vecteurs propres :

$$\{q\} = \left\{ \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{c} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{array} \right\} = [X] \{\eta\}$$

qui s'écrit, en pré-multipliant par  $[X]^t$ :

$$[X]^{t}[M][X]\{\ddot{\eta}\} + [X]^{t}[K][X]\{\eta\} = \{0\}$$

ce qui conduit, compte-tenu des K et M-orthogonalités au système diagonal suivant dont les coefficients sont les masses et raideurs généralisées :

$$\begin{bmatrix} (2-\sqrt{2})\ell & 0\\ 0 & (2+\sqrt{2})\ell \end{bmatrix} \begin{cases} \ddot{\eta_1}(t)\\ \ddot{\eta_2}(t) \end{cases} + \begin{bmatrix} g & 0\\ 0 & g \end{bmatrix} \begin{cases} \eta_1(t)\\ \eta_2(t) \end{cases} = \begin{cases} 0\\ 0 \end{cases}$$

ou encore ( $\omega_r^2 \mu_r = \gamma_r$ )

$$\ddot{\eta}_r(t) + \eta_r(t)\omega_r^2 = 0, \quad \forall r = 1,2$$

### 2.3 Décomposition modale d'un vecteur quelconque ou d'une matrice

Le développement modal d'un vecteur ou d'une matrice carrée s'exprime en utilisant la même démarche que précédemment, à la différence que les relations d'orthogonalité ne sont par vérifiées pour un vecteur ou une matrice quelconque.

Considérons un vecteur  $\overline{X}$  qui s'exprime dans la base modale  $(\overline{X}_s)$  :  $\overline{X} = \sum_{s=1}^n \alpha_s \overline{X}_s$ . Les composantes  $\alpha_s$  sont déterminées en projetant  $\overline{X}$  dans la base, en multipliant à gauche par  $\overline{X}_r^t \overline{\overline{M}}$  (Eq. 3.2.6 p. 67), ce qui conduit au développement :

$$lpha_s = rac{ar{X}_s^t\,\overline{ar{M}}\,ar{X}}{\mu_s} \; \Rightarrow \; ar{X} = \sum_{s=1}^n rac{ar{X}_s\,ar{X}_s^t\,\overline{ar{M}}}{\mu_s}ar{X}$$

On a par exemple pour la matrice unité :

$$\bar{\bar{I}} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\bar{X}_s \bar{X}_s^t \overline{M}}{\mu_s}$$

on en déduit le développement spectral de toute matrice carrée  $\overline{\overline{A}}$  :

$$\overline{\overline{A}} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\overline{X}_{s} \overline{X}_{s}^{t} \overline{\overline{M}}}{\mu_{s}} \overline{\overline{A}}$$

On peut également recourir à la décomposition dans la *base d'inertie*. Par exemple pour exprimer les efforts, comme nous le verrons par la suite :

$$ar{P} = \sum_{s=1}^n \varphi_s \overline{\overline{M}} \, ar{X}_s$$

ce qui donne, en multipliant à gauche par un vecteur propre :

$$\bar{X}_r^t \bar{P} = \sum_{s=1}^n \varphi_s \bar{X}_r^t \overline{\overline{M}} \bar{X}_s = \varphi_r \mu_r \Rightarrow \varphi_r = \frac{\bar{X}_r^t \bar{P}}{\mu_r} : facteur \ de \ participation \ modale \ de \ \bar{P}$$

#### 2.3.1 Exemple : Pendule triple

Considérons le système représenté sur la figure 3.2.2, constitué de 3 pendules de masse *m* et de longueur de bras  $\ell$ , reliés par des ressorts de rappel de rigidité *k*. La pesanteur est prise en compte.



FIGURE 3.2.2 – Pendule triple

L'équilibre du système s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} mg\ell + kl^2 & -k\ell^2 & 0\\ -k\ell^2 & mg\ell + 2kl^2 & -k\ell^2\\ 0 & -k\ell^2 & mg\ell + kl^2 \end{bmatrix} \begin{cases} \theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3 \end{cases} + \begin{bmatrix} m\ell^2 & 0 & 0\\ 0 & m\ell^2 & 0\\ 0 & 0 & m\ell^2 \end{bmatrix} \begin{cases} \ddot{\theta_1}\\ \ddot{\theta_2}\\ \ddot{\theta_3} \end{cases} = \begin{cases} F\sin\omega t\\ 0\\ 0 \end{cases}$$

Le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres de ce système donne :

$$\omega_1^2 = \frac{g}{\ell} \qquad \rightsquigarrow \quad \bar{X}_1 = \begin{cases} 1\\ 1\\ 1 \\ \end{cases}$$
$$\omega_2^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{k}{m} \qquad \rightsquigarrow \quad \bar{X}_2 = \begin{cases} 1\\ 0\\ -1 \\ \end{cases}$$
$$\omega_3^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{3k}{m} \qquad \rightsquigarrow \quad \bar{X}_3 = \begin{cases} 1\\ -2\\ 1 \end{cases}$$

On constate clairement (figure 3.2.3) que le premier mode propre correspond à un mode de corps rigide, *i.e.* aucune déformation élastique n'est générée par ce mouvement. Et en l'absence de gravité la pulsation associée  $\omega_1$  serait nulle.

On peut alors projeter le problème dans la base modale. Pour cela faisons le changement de base  $\bar{q}(t) = \overline{\overline{X}} \bar{\eta}(t)$ :

$$\{q\} = \left\{ \begin{array}{c} \theta_{1}(t) \\ \theta_{2}(t) \\ \theta_{3}(t) \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \eta_{1}(t) \\ \eta_{2}(t) \\ \eta_{3}(t) \end{array} \right\} = [X] \{\eta\}$$



FIGURE 3.2.3 – Modes propres du pendule triple

en reportant ce changement de base dans l'équation initiale en régime forcé (effort  $F \sin \omega t$  appliqué à masse 1), et en pré-multipliant par  $[X]^t$ , on aboutit compte-tenu des K et M-orthogonalités, à des matrices diagonales caractérisant un système découplé qui s'écrit dans le cas présent :

$$\begin{bmatrix} 3m\ell^2 & 0 & 0\\ 0 & 2m\ell^2 & 0\\ 0 & 0 & 6m\ell^2 \end{bmatrix} \begin{cases} \ddot{\eta_1}\\ \ddot{\eta_2}\\ \ddot{\eta_3} \end{cases} + \begin{bmatrix} 3mg\ell & 0 & 0\\ 0 & 2mg\ell + 2k\ell^2 & 0\\ 0 & 0 & 6mg\ell + 18k\ell^2 \end{bmatrix} \begin{cases} \eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3 \end{cases} = \begin{cases} F\sin\omega t\\ F\sin\omega t\\ F\sin\omega t \end{cases}$$

## 2.3.2 Exemple de calcul modal : Système à 2 masses et ressorts de rappel

Afin d'illustrer le calcul modal, on travaillera sur l'exemple introduit précédemment, représenté à nouveau sur la figure 3.2.4, où l'action de la pesanteur sera négligée devant les efforts d'origine inertielle mis en jeu. Ce système unidimensionnel est composé de 2 masses m repérées 1 et 2, reliées par 3 ressorts de raideur k.



FIGURE 3.2.4 – système élémentaire

**Formulation du problème** L'expression de l'énergie cinétique pour ce système est directe et s'écrit :

$$2T(\mathcal{S}, r_0) = m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$$

L'expression du potentiel des efforts des ressorts se déduit de l'expression du travail élémentaire développé par ces efforts :

- action du ressort 1 sur la masse 1 :  $F_{r_1 \rightarrow m_1} = -kx_1$
- action du ressort 2 sur la masse 1 :  $F_{r_2 \to m_1} = -k(x_1 x_2)$

- action du ressort 2 sur la masse 2 :  $F_{r_2 \to m_2} = -k(x_2 x_1)$
- action du ressort 3 sur la masse 2 :  $F_{r_3 \rightarrow m_2} = -kx_2$

L'expression du travail élémentaire, et donc du potentiel est :

$$\delta \mathcal{W}_{ress} = F_{r_1 \to m_1} \delta x_1 + F_{r_2 \to m_1} \delta x_1 + F_{r_2 \to m_2} \delta x_2 + F_{r_3 \to m_2} \delta x_2 \quad (= -\delta V_{ress})$$

$$= -k x_1 \delta x_1 - k (x_1 - x_2) \delta x_1 - k (x_2 - x_1) \delta x_2 - k x_2 \delta x_2$$

$$\Downarrow$$

$$V_{ress} = \frac{1}{2} \left( k x_1^2 + k (x_2 - x_1)^2 + k x_2^2 \right) \quad (x_i (t = 0) = 0)$$
(3.2.8)

Dans ce cas très simple, le système s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} \ddot{x_1} \\ \ddot{x_2} \end{cases} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \Leftrightarrow [M] \{ \ddot{q} \} + [K] \{ q \} = \{ 0 \}$$

**Calcul modal** La méthode d'analyse modale consiste à utiliser la base formée par les vecteurs propres pour exprimer le problème de manière plus simple. Il faut calculer au préalable les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants, déduits en posant la condition classique  $det([K] - \omega^2[M]) = 0$ :

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}$$
$$\omega_2^2 = \frac{3k}{m}$$

en reportant ces valeurs propres dans le système, on obtient les vecteurs propres correspondants :

$$\bar{X}_1 = \left\{ \begin{array}{c} 1\\1 \end{array} \right\} \text{ pour } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$\bar{X}_2 = \left\{ \begin{array}{c} 1\\-1 \end{array} \right\} \text{ pour } \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

On peut alors projeter le problème dans la base modale. Pour cela faisons le changement de base  $\bar{q}(t) = \overline{\overline{X}} \bar{\eta}(t)$ :

$$\{q\} = \left\{\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array}\right\} = \left[\{X_1\}\{X_2\}\right] \left\{\begin{array}{c} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{array}\right\} = \left[X\right]\{\eta\}$$

en reportant ce changement de base dans l'équation initiale  $[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{F\}$ en régime forcé (effort  $f_1(t)$  appliqué sur la masse 1, et effort  $f_2(t)$  appliqué sur la masse 2), et en pré-multipliant par  $[X]^t$ :

$$[X]^{t}[M][X] \{ \ddot{\eta} \} + [X]^{t}[K][X] \{ \eta \} = [X]^{t} \{ F \}$$

on aboutit à des matrices diagonales compte-tenu des K et M-orthogonalités. On a alors un système découplé qui s'écrit dans le cas présent :

$$\begin{bmatrix} 2m & 0\\ 0 & 2m \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\eta_1}\\ \ddot{\eta_2} \end{array} \right\} + \left[ \begin{array}{c} 2k & 0\\ 0 & 6k \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} \eta_1\\ \eta_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} f_1(t) + f_2(t)\\ f_1(t) - f_2(t) \end{array} \right\}$$

Ce qui se met bien sous la forme connue ( $\omega_r^2 \mu_r = \gamma_r$ ) pour les oscillations libres :

$$\ddot{\eta}_r(t)\mu_r + \eta_r(t)\gamma_r = 0, \quad \forall r = 1,2$$

et en introduisant les facteurs de participation modale des efforts extérieurs  $\varphi_r$  pour les oscillations forcées :

$$\ddot{\eta}_r(t) + \eta_r(t)\omega_r^2 = \varphi_r, \quad \forall r = 1, 2$$

en remarquant que les masses généralisées et raideurs généralisées, et facteurs de participation sont ici :

$$\mu_1 = \overline{X}_1^t \overline{\overline{M}} \, \overline{X}_1 = 2m \qquad \mu_2 = \overline{X}_2^t \overline{\overline{M}} \, \overline{X}_2 = 2m$$
  

$$\gamma_1 = \overline{X}_1^t \overline{\overline{K}} \, \overline{X}_1 = 2k \qquad \gamma_2 = \overline{X}_2^t \overline{\overline{K}} \, \overline{X}_2 = 6k$$
  

$$\phi_1(t) = \frac{\overline{X}_1^t \, \overline{F}}{\mu_1} = \frac{f_1(t) + f_2(t)}{2m} \quad \phi_2(t) = \frac{\overline{X}_2^t \, \overline{F}}{\mu_2} = \frac{f_1(t) - f_2(t)}{2m}$$

#### 2.4 Réponse harmonique forcée

La réponse d'un système dynamique à une réponse harmonique forcée est essentielle. En effet, dans les systèmes réels (industriels), la connaissance explicite de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle est souvent impossible. On recourt donc à l'identification expérimentale des propriétés vibratoires (modes propres de résonnance, amortissement) et mécaniques des systèmes. Pour ce faire, on peut solliciter le système à l'aide de signaux harmoniques imposés. La réponse du système à ces excitations permet d'en déduire les propriétés, qui peuvent d'ailleurs être sélectionnées en changeant l'amplitude et/ou la fréquence de la sollicitation. De plus, les vibrations résultant de l'apparition de balourds par exemple peuvent être atténuées par des excitations extérieures agissant en opposition de phase (*antirésonance*).

Partons de l'équilibre du système soumis à une excitation d'amplitude  $\overline{F}$  constante et de pulsation  $\omega$  donnée :

$$\overline{\overline{M}}\overline{\overline{q}} + \overline{\overline{K}}\overline{q} = \overline{F}\cos\omega t$$

Nous cherchons une réponse forcée en phase avec la sollicitation, soit  $\bar{q} = \bar{X} \cos \omega t$ . En substituant ce déplacement dans l'expression de l'équilibre, il vient :

$$\left(\overline{\overline{K}} - \omega^2 \overline{\overline{M}}\right) \overline{X} = \overline{F}$$
(3.2.9)

ce qui conduit, si  $(\overline{\overline{K}} - \omega^2 \overline{\overline{M}})$  est non singulier, à :

$$\bar{X} = \left(\overline{\overline{K}} - \omega^2 \overline{\overline{M}}\right)^{-1} \bar{F}$$

la matrice  $\left(\overline{K} - \omega^2 \overline{M}\right)^{-1}$  étant appelée la *résolvante* ou *matrice des coefficients d'influence dynamique* du système. L'élément  $a_{kl}(\omega^2)$  de cette matrice est l'amplitude du *ddl q<sub>k</sub>* lorsqu'une amplitude vibratoire unitaire de pulsation  $\omega$  est imposée au *ddl q<sub>l</sub>* :

$$\left(\overline{\overline{K}} - \omega^2 \overline{\overline{M}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}(\omega^2) & \dots & a_{1n}(\omega^2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_{nn}(\omega^2) \end{pmatrix}$$

Afin d'analyser ces coefficients d'influence, on peut utiliser la décomposition spectrale de la résolvante :

$$\bar{X} = \sum_{s=1}^{n} \beta_s \bar{X}_s$$

l'identification des  $\beta_s$  se fait de manière classique en multipliant (??) à gauche par  $\bar{X}_s^t$ :

$$\begin{split} \bar{X}_{s}^{t} \left(\overline{K} - \omega^{2}\overline{M}\right) \sum_{r=1}^{n} \beta_{r} \bar{X}_{r} &= \bar{X}_{s}^{t} \bar{F} \\ \sum_{r=1}^{n} \beta_{r} \left(\bar{X}_{s}^{t} \overline{\overline{K}} \bar{X}_{r} - \omega^{2} \bar{X}_{s}^{t} \overline{\overline{M}} \bar{X}_{r}\right) &= \bar{X}_{s}^{t} \bar{F} \\ \beta_{s} \left(\gamma_{s} - \omega^{2} \mu_{s}\right) &= \bar{X}_{s}^{t} \bar{F} \qquad (\gamma_{s} = \omega_{s}^{2} \mu_{s}) \\ \beta_{s} \left(\omega_{s}^{2} \mu_{s} - \omega^{2} \mu_{s}\right) &= \bar{X}_{s}^{t} \bar{F} \\ \beta_{s} &= \frac{\bar{X}_{s}^{t} \bar{F}}{(\omega_{s}^{2} - \omega^{2}) \mu_{s}} \\ \text{soit} \left[ \overline{X} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\bar{X}_{s} \bar{X}_{s}^{t}}{(\omega_{s}^{2} - \omega^{2}) \mu_{s}} \right] \end{split}$$

On notera que le produit  $\bar{X}_s \bar{X}_s^t$  génère un tenseur d'ordre 2, ce qui est cohérent avec la représentation matricielle de la résolvante introduite précédemment.

Il faut également noter que dans les systèmes réels, des modes de corps rigides peuvent exister. La décomposition doit donc prendre en compte ces modes, et devient pour *m* modes rigides  $\bar{u}_i$ :

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{u}_i + \sum_{s=1}^{n-m} \beta_s \bar{X}_s$$

ce qui conduit à l'expression modifiée en conséquence des coefficients d'influence dynamique :

$$\alpha_{i} = -\frac{1}{\omega^{2}} \sum_{i=1}^{m} \frac{\bar{u}_{i}^{t}}{\mu_{i}} \Rightarrow a_{kl}(\omega^{2}) = -\frac{1}{\omega^{2}} \sum_{i=1}^{m} \frac{u_{i}^{k} u_{i}^{l}}{\mu_{i}} + \sum_{s=1}^{n-m} \frac{X_{s}^{k} X_{s}^{l}}{(\omega_{s}^{2} - \omega^{2})\mu_{s}}$$
(3.2.10)

avec la notation indicielle  $u_i^k$  désignant la  $k^{i i m e}$  composante du  $i^{i i m e}$  vecteur  $\bar{u}$ .

#### 2.4.1 Analyse en l'absence de modes rigides

Si le système ne possède pas de mode rigide, la résolvante tend vers l'inverse de la matrice de rigidité  $(\overline{\overline{K}}^{-1})$  lorsque la pulsation d'excitation  $\omega$  tend vers 0. On retrouve donc un problème de statique tout à fait classique. On peut introduire dans ce cas la *matrice des coefficients d'influence statiques* dont les termes sont définis par décomposition spectrale de la matrice  $\overline{\overline{K}}$ :

$$g_{kl} = \sum_{s=1}^{n} \frac{X_s^k X_s^l}{\omega_s^2 \mu_s}$$
(3.2.11)

On remarque alors que les coefficients d'influence dynamique (3.2.10) sont directement proportionnels aux coefficient d'influence statiques, à un facteur multiplicatif  $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_s^2}\right)^{-1}$  prés pour chaque rang *s*. On note immédiatement que le phénomène de résonance ( $\omega^2 = \omega_s^2$ ) se traduira par une amplification de tous les coefficients d'influence statique qui tendront vers l'infini dans les systèmes conservatifs considérés jusqu'à présent.

Observons un coefficient diagonal  $a_{kk}(\omega^2)$ , il possède la propriété fondamentale suivante :

$$\frac{da_{kk}}{d\omega^{2}} = \sum_{s=1}^{n} \frac{(X_{s}^{k})^{2}}{(\omega_{s}^{2} - \omega^{2})^{2} \mu_{s}} > 0$$

Les coefficients diagonaux de la matrice des coefficients d'influence dynamique sont donc des fonctions strictement croissantes de la pulsation d'excitation  $\omega$ . Les pulsations de résonance faisant tendre les coefficients d'influence dynamiques vers l'infini, fonctions strictement croissantes de la pulsation, il existe des pulsations pour lesquelles ces coefficients vont s'annuler. Ainsi, entre 2 pulsations de resonance successives  $\omega_r$ et  $\omega_{r+1}$ , il existe une pulsation d'antirésonance que l'on notera  $\omega_r^k$ 

$$\omega_r < \omega_r^k < \omega_{r+1}$$

et qui dépend du ddl k uniquement, contrairement aux pulsations de resonance qui affectent tous les ddl. Ceci est parfaitement illustré sur la figure 3.2.5.



FIGURE 3.2.5 – Coefficient d'influence dynamique principal pour un système dépourvu de modes rigides.

Les pulsations de résonance  $\omega_s$  sont des racines du terme  $a_{kk}(\omega)$ , qui peut s'exprimer en fonction des coefficients d'influence statique. On montre que ce terme diagonale d'influence dynamique s'écrit comme le rapport de 2 polynômes, le dénominateur étant de degré *n* en  $\omega^2$  et le numérateur de degré *n* – 1 en  $\omega^2$ . Les racines du dénominateur étant  $\omega_s^2$  et celles du numérateur  $(\omega_s^k)^2$  :

$$a_{kk}(\boldsymbol{\omega}^2) = g_{kk} \frac{\prod_{s=1}^{n-1} \left( 1 - \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}_s^k}\right)^2 \right)}{\prod_{s=1}^n \left( 1 - \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}_s}\right)^2 \right)}$$

#### 2.4.2 Application au système de 2 masses et ressorts

Reprenons l'exemple du système composé de 2 masses reliées par des ressorts, présenté sur la figure 3.2.4.

**Coefficients d'influence dynamique** La résolvante peut être calculée directement à partir des matrices de masse et de raideur identifiées précédemment :

$$\overline{\overline{A}} = \left(\overline{\overline{K}} - \omega^2 \overline{\overline{M}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2k - \omega^2 m}{3k^2 - 4k\omega^2 m + \omega^4 m^2} & \frac{k}{3k^2 - 4k\omega^2 m + \omega^4 m^2} \\ \frac{k}{3k^2 - 4k\omega^2 m + \omega^4 m^2} & \frac{2k - \omega^2 m}{3k^2 - 4k\omega^2 m + \omega^4 m^2} \end{bmatrix}$$

Ces expressions se retrouvent également en utilisant la forme générale des  $a_{kl}$  proposée en (3.2.10) pour un système sans modes de corps rigide :

$$a_{kl}(\omega^2) = \sum_{s=1}^n \frac{X_s^k X_s^l}{(\omega_s^2 - \omega^2)\mu_s}$$

Par exemple :

$$a_{11}(\omega^{2}) = \frac{1}{(\omega_{1}^{2} - \omega^{2})\mu_{1}} + \frac{1}{(\omega_{2}^{2} - \omega^{2})\mu_{2}}$$

$$= \frac{1}{2m} \frac{\omega_{1}^{2} + \omega_{2}^{2} - 2\omega^{2}}{\omega_{1}^{2}\omega_{2}^{2} - \omega^{2}(\omega_{1}^{2} + \omega_{2}^{2}) + \omega^{4}}$$

$$= \frac{1}{2m} \frac{\frac{4k}{m} - 2\omega^{2}}{\frac{3k^{2}}{m} - \omega^{2}\frac{4k}{m} + \omega^{4}}$$

$$= \frac{2k - \omega^{2}m}{3k^{2} - 4k\omega^{2}m + \omega^{4}m^{2}}$$
(3.2.12)

Calculons les coefficients d'influence statiques d'après (3.2.11), on obtient :

$$\overline{\overline{g}} = \sum_{s=1}^{n} \frac{X_s^k X_s^l}{\omega_s^2 \mu_s} = \frac{1}{2m\omega_1^2 \omega_2^2} \begin{bmatrix} \omega_1^2 + \omega_2^2 & \omega_1^2 - \omega_2^2 \\ \omega_1^2 - \omega_2^2 & \omega_1^2 + \omega_2^2 \end{bmatrix}$$

**Réponse fréquentielle** Afin d'observer la réponse du système, supposons qu'on applique les efforts suivants harmoniques :

$$\bar{F} = \left\{ \begin{array}{c} F \cos \omega t \\ 0 \end{array} \right\}$$

Comme indiqué dans le cours, la réponse recherchée est supposée harmonique et en phase avec la sollicitation. Cette hypothèse est une première approximation et se justifie soit compte-tenu des conditions initiales supposées homogènes, ou bien parce que seule la réponse en régime permanent (plus d'effets des conditions initiales) est considérée :

$$\begin{split} \bar{q} &= \bar{X}\cos\omega t = \sum_{s=1}^{n} \beta_{s} \bar{X}_{s} \cos\omega t = \sum_{s=1}^{n} \frac{\bar{X}_{s} \bar{X}_{s}^{t}}{(\omega_{s}^{2} - \omega^{2})\mu_{s}} \bar{F}\cos\omega t \\ \begin{cases} x_{1}(t) \\ x_{2}(t) \end{cases} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} F \\ 0 \end{array} \right\}}{2m(\omega_{1}^{2} - \omega^{2})} \cos\omega t + \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} F \\ 0 \end{array} \right\}}{2m(\omega_{2}^{2} - \omega^{2})} \cos\omega t \\ \\ &= \begin{cases} \frac{F}{2m} \left( \frac{1}{\omega_{1}^{2} - \omega^{2}} + \frac{1}{\omega_{2}^{2} - \omega^{2}} \right) \cos\omega t \\ \frac{F}{2m} \left( \frac{1}{\omega_{1}^{2} - \omega^{2}} - \frac{1}{\omega_{2}^{2} - \omega^{2}} \right) \cos\omega t \end{cases} \\ \\ &= \begin{cases} \frac{F}{6k} \left( \frac{3}{1 - \frac{\omega^{2}}{\omega_{1}^{2}}} + \frac{1}{1 - \frac{\omega^{2}}{\omega_{2}^{2}}} \right) \cos\omega t \\ \frac{F}{6k} \left( \frac{3}{1 - \frac{\omega^{2}}{\omega_{1}^{2}}} - \frac{1}{1 - \frac{\omega^{2}}{\omega_{2}^{2}}} \right) \cos\omega t \end{cases} \end{split}$$

On notera que les n-1 pulsations d'antirésonance sont bien les racines du numérateur des coefficients d'influence dynamique. Ici, le système possédant 2 *ddl*, il existe une seule pulsation d'antirésonance qui peut être calculée en partant de (3.2.12) ou (3.2.13) :

$$\omega_1^1 = \sqrt{\frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2)} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{n}}$$

L'évolution des deux composantes du vecteur déplacement solution est représentée sur la figure 3.2.6 en fonction de la pulsation d'excitation extérieure. On voit clairement que pour les 2 pulsations de résonance  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , le phénomène de résonance apparaît pour les 2 *ddl*, tandis que pour la pulsation d'antirésonance  $\omega_1^1$ , l'amplitude de  $x_1(t)$  seule est nulle. On retrouve également les inégalités énoncées dans le cours pour des systèmes à *n ddl* :

$$\omega_1 < \omega_1^1 < \omega_2 \iff \sqrt{\frac{k}{m}} < \sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{m}} < \sqrt{3}\sqrt{\frac{k}{m}}$$



FIGURE 3.2.6 – Réponse fréquentielle du système à 2 masses.

#### 2.4.3 Système possédant des modes rigides

Dans le cas d'un système de taille n possédant m modes rigides, il y a autant de pulsations d'antirésonance que de résonance :

$$\boldsymbol{\omega}_m (= 0) < \boldsymbol{\omega}_m^k < \boldsymbol{\omega}_{m+1} \ldots < \boldsymbol{\omega}_{n-m}$$

Ceci apparaît tout à fait clairement sur le figure 3.2.7.

Lorsque la pulsation d'excitation tend vers 0, c'est-à-dire quand les modes de corps rigides sont seuls sollicités, les coefficients diagonaux deviennent :

$$\lim_{\omega^2 \to 0} \omega^2 a_{kk}(\omega^2) = -\frac{1}{I_{kk}} < 0$$

où  $I_{kk}$  est l'*inertie apparente* du système lorsqu'on le sollicite suivant le *ddl*  $q_k$ . Finalement, les coefficients diagonaux d'influence dynamique s'écrivent non plus en fonction des coefficients d'influence statique, mais en fonction des inerties apparentes, représentant la modification d'inertie induite par la prise en compte des modes de corps rigides :

$$a_{kk}(\boldsymbol{\omega}^2) = \frac{1}{\boldsymbol{\omega}^2 I_{kk}} \frac{\prod_{s=1}^{n-m} \left(1 - \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}_s^k}\right)^2\right)}{\prod_{s=1}^{n-m} \left(1 - \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}_s}\right)^2\right)}$$



FIGURE 3.2.7 – Coefficient d'influence dynamique principal pour un système possédant *m* modes rigides.

#### 2.5 Réponse à une sollicitation quelconque extérieure

Soit  $\bar{p}(t)$  une excitation extérieure connue en fonction du temps. On s'intéresse maintenant à la réponse transitoire régie par les équations d'équilibre linéarisées :

$$\overline{\overline{M}}\overline{\ddot{q}} + \overline{\overline{K}}\overline{q} = \overline{p}(t)$$
 avec  $\overline{q}(0) = \overline{q}_0$  et  $\overline{\dot{q}}(0) = \overline{\dot{q}}_0$  donnés

Exprimons la réponse  $\bar{q}(t)$  dans la base modale :  $\bar{q}(t) = \sum_{s=1}^{n} \eta_s(t) \bar{X}_s$ . Cette solution conduit à la nouvelle expression de l'équilibre

$$\sum_{s=1}^{n} \ddot{\eta}_{s}(t) \bar{X}_{s} \overline{\overline{M}} + \sum_{s=1}^{n} \eta_{s}(t) \bar{X}_{s} \overline{\overline{K}} = \bar{P}(t)$$

soit en multipliant à gauche par  $\bar{X}_r^t$ , et compte-tenu des relations d'orthogonalité :

$$\ddot{\eta}_r(t)\mu_r + \eta_r(t)\gamma_r = \bar{X}_r^t \bar{p}(t)$$

soit

$$\left| \ddot{\eta}_r(t) + \omega_r^2 \eta_r(t) = \varphi_r(t) = \frac{\bar{X}_r^t \bar{p}(t)}{\mu_r} \quad r = 1, \dots, n \right|$$

avec  $\varphi_r(t)$  le *facteur de participation du mode r à l'excitation*. Les équations obtenues sont dites *équations normales*, elles montrent qu'en l'absence d'amortissement, l'étude des oscillations forcées d'un système à *n* degré de liberté se ramène à celle de *n* oscillateurs élémentaires découplés et excités par des forces extérieures. Ce concept sera par la suite étendu aux systèmes amortis dont l'amortissement peut se mettre sous forme diagonale.

#### 2.6 Fonction de transfert

Nous avons vu que la résolution de l'équilibre du système en régime forcé peut se faire, de manière découplée, dans la base modale :

$$\overline{\overline{M}}\overline{\overline{q}} + \overline{\overline{K}}\overline{q} = \overline{p}(t) \text{ avec } \overline{q}(t) = \sum_{s=1}^{n} \eta_s(t)\overline{X}_s$$

Les nouvelles expressions des équations d'équilibre peuvent, comme dans le cas de l'oscillateur élémentaire, être résolues en utilisant les transformées de Laplace. Posons :

$$\bar{P}(s) = \mathcal{L}(\bar{p}(t)); \, \bar{Q}(s) = \mathcal{L}(\bar{q}(t)); \, \bar{H}_r(s) = \mathcal{L}(\bar{\eta}_r(t))$$

Dans le cas de conditions initiales homogènes, on a :

d'où l'expression de  $H_r(s)$  :

$$H_r(s) = \frac{\bar{X}_r^t \bar{P}(s)}{\mu_r(s^2 + \omega_r^2)}$$
(3.2.14)

Le développement modal de la réponse recherchée doit également être exprimée dans l'espace des transformées de Laplace :

$$\mathcal{L}\left(\bar{q}(t) = \sum_{r=1}^{n} \eta_r(t)\bar{X}_r\right) \to \bar{Q}(s) = \sum_{r=1}^{n} H_r(s)\bar{X}_r$$

d'où on tire l'expression de la *matrice de transfert*  $\overline{\overline{H}}(s)$  à l'aide de (3.2.14) :

$$\bar{Q}(s) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\bar{X}_{r}^{t} \bar{P}(s)}{\mu_{r}(s^{2} + \omega_{r}^{2})} \bar{X}_{r}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{Q}(s) = \overline{H}(s) \bar{P}(s) \text{ avec } H_{kl}(s) = \sum_{r=1}^{n} \frac{X_{r}^{k} X_{r}^{l}}{\mu_{r}(s^{2} + \omega_{r}^{2})}$$

qui relie la transformée de Laplace de la réponse à la transformée de Laplace de l'excitation.

#### 2.6.1 Analogie avec l'oscillateur élémentaire

On remarque que la relation établie ci-dessus pour  $H_r(s)$  (3.2.14) possède une forme analogue à la fonction de transfert établie dans la partie 1 de ce document pour

l'oscillateur élémentaire. On rappelle que dans ce dernier cas l'équation d'équilibre écrite sous forme canonique était (1.3.3):

$$\ddot{u}(t) + 2\varepsilon \dot{u}(t) + \omega_p^2 u(t) = \frac{1}{m} f(t)$$

et la fonction de transfert correspondante pour des conditions initiales homogènes et un amortissement nul (c = 0) :

$$U(s) = F(s) \frac{1}{m(s^2 + \omega_p^2)} = F(s)H(s)$$

On note alors clairement les similitudes entre ces 2 fonctions de transfert, la première (3.2.14) étant une généralisation pour un système à *n ddl* du résultat établi sur l'oscillateur élémentaire à 1 *ddl*.

#### 2.6.2 Signification physique

On considère une impulsion de Dirac  $\delta(t)$  appliquée au  $j^{ième} ddl$  du système, soit le vecteur impulsion, et sa transformée de Laplace :

$$\bar{p}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \delta(t) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} j \rightarrow \bar{P}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} j$$

La transformée de la de la *i<sup>ième</sup>* composante du vecteur inconnu s'écrit :

$$Q_i(s) = \sum_{j=1}^n H_{ij}(s) P_j(s) = H_{ij}(s)$$

Conclusion, le terme  $H_{ij}(s)$  est la transformée de Laplace de la réponse du  $i^{i \wr me} ddl$  lorsqu'on excite le  $j^{i \wr me} ddl$  du système avec une impulsion unitaire.

#### 2.6.3 Domaine temporel

Comme dans le cas de l'oscillateur élémentaire, la fonction de Green (temporelle) correspondant à  $\overline{\overline{H}}(s)$  est la transformée inverse dans l'espace réel. Notons  $G_{ij}(t)$  la réponse temporelle du  $i^{i \wr m e} ddl$  lorsqu'on excite le  $j^{i \wr m e} ddl$  du système avec une impulsion unitaire. On a, en utilisant les tables de transformées inverses :

$$H_{ij}(s) = \mathcal{L}\left(G_{ij}(t)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$G_{ij}(t) = \sum_{r=1}^{n} \frac{X_r^i X_r^j}{\mu_r \omega_r} \sin \omega_r t$$

et

$$\bar{q}(t) = \overline{\overline{G}}(t) * \bar{p}(t) \Rightarrow \left[ \bar{q}(t) = \int_0^t \overline{\overline{G}}(t-\tau) \bar{p}(\tau) d\tau = \int_0^t \overline{\overline{G}}(\tau) \bar{p}(t-\tau) d\tau \right]$$

On retrouve ici la définition de l'*intégrale de convolution* ou *intégrale de Duhamel*, telle que présentée dans *Annexes - Chapitre 2*, étendue au cas des systèmes à *n ddl*.

#### 2.6.4 Application au système à 2 masses + ressorts

La réponse temporelle peut également être établie en passant par les transformées de Laplace. Dans le cas de conditions initiales homogènes, la fonction de transfert est connue, et ainsi la fonction de Green en est déduite. Par rapport à l'approche précédente, la forme de la réponse n'est pas posée *a priori*.

D'un point de vu calculatoire, on notera que les termes de chaque rang dans la somme de  $\overline{\overline{G}}$  ont une forme similaire aux termes de la somme définissant le tenseur des coefficients d'influence statiques  $\overline{\overline{g}}$  (3.2.11). Dans notre cas, le tenseur  $\overline{\overline{G}}$  s'écrit :

$$\overline{\overline{G}}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( \sum_{r=1}^{n} \frac{\overline{X}_{r} \overline{X}_{r}^{t}}{\mu_{r} \left(s^{2} + \omega_{r}^{2}\right)} \right) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\overline{X}_{r} \overline{X}_{r}^{t}}{\mu_{r} \omega_{r}} \sin \omega_{r} t$$
$$= \frac{F}{2m} \left[ \begin{array}{c} \frac{\sin \omega_{1} t}{\omega_{1}} + \frac{\sin \omega_{2} t}{\omega_{2}} & \frac{\sin \omega_{1} t}{\omega_{1}} - \frac{\sin \omega_{2} t}{\omega_{2}} \\ \frac{\sin \omega_{1} t}{\omega_{1}} - \frac{\sin \omega_{2} t}{\omega_{2}} & \frac{\sin \omega_{1} t}{\omega_{1}} + \frac{\sin \omega_{2} t}{\omega_{2}} \end{array} \right]$$

Compte-tenu du chargement choisi ( $f_1(t) = F \cos \omega t$  et  $f_2(t) = 0$ ), la réponse temporelle  $x_1(t)$  va dépendre exclusivement de  $G_{11}$ :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \sum_{j=1}^n \int_0^t G_{1j}(t-\tau) f_j(\tau) \, d\tau \\ &= \frac{F}{2m} \int_0^t G_{11}(t-\tau) F \cos \omega \tau \, d\tau \\ &= \frac{F}{2m} \int_0^t \left( \frac{\sin \omega_1(t-\tau)}{\omega_1} + \frac{\sin \omega_2(t-\tau)}{\omega_2} \right) F \cos \omega \tau \, d\tau \\ &= \frac{F}{2m} \left( \frac{\cos \omega t - \cos \omega_1 t}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\cos \omega t - \cos \omega_2 t}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \end{aligned}$$

La réponse  $x_1(t)$  peut encore se mettre sous la forme d'une somme d'un terme en phase avec l'excitation extérieure  $x_1^p(t)$  et d'un terme dépendant des pulsations propres du système  $x_1^d(t)$ :

$$x_1(t) = \underbrace{\frac{F\cos\omega t}{2m} \left(\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2}\right)}_{x_1^p(t)} + \underbrace{-\frac{F}{2m} \left(\frac{\cos\omega_1 t}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\cos\omega_2 t}{\omega_2^2 - \omega^2}\right)}_{x_1^d(t)}$$

On constate que la réponse temporelle complète (figure 3.2.8) est différente de la forme proposée précédemment, et qui se limitait à la réponse  $x_1^p(t)$  en phase avec

l'excitation, et était utilisée pour caractériser les phénomènes de résonance et d'antirésonance. On vérifie en effet que le premier terme de la réponse en  $\omega t$  ne suffit pas à satisfaire la condition initiale de déplacement nul. Ce qui est par contre le cas pour la réponse calculée par les transformées de Laplace qui inclue des composantes harmoniques de pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  modifiant la réponse à tout temps *t* ultérieure à  $t_0 = 0$ , mais permettent d'avoir  $x_1(0) = 0$ .



FIGURE 3.2.8 – Réponse temporelle  $x_1(t)$  du système à 2 masses.

Il faut ici replacer les 2 types d'approches dans leur cadre respectif. L'analyse 'fréquentielle' de la réponse forcée menée précédemment et dans laquelle ont été introduits les concepts de coefficients d'influence dynamique, est essentiellement une approche de type 'RdM'. Cette approche est principalement destinée à identifier les pulsations propres et d'antirésonance, notamment à partir d'excitations harmoniques contrôlées dont la fréquence est la variable principale. Les amplitudes étant pour leur part mesurées en fonction de ces fréquences plus qu'en fonction du temps. Finalement, les amplitudes sont rarement étudiées, du moins dans le cadre restrictif des structures conservatives. Par contre, l'approche par les transformées de Laplace est beaucoup plus générale et prend en compte les amplitudes des réponses forcées. Toute-fois, ces réponses incluant les pulsations de résonance dans des fonctions non-linéaires du temps, il semble dés lors plus complexe d'identifier ces pulsations en mesurant les amplitudes des déplacements. Ces 2 approches sont complémentaires.

# Méthodes variationnelles de

- 3 -

## caractérisation des valeurs propres

#### Sommaire

3.1	Le quotient de Rayleigh		
	3.1.1	Recherche itérative des modes et valeurs propres	87
	3.1.2	Application au pendule double avec masses ponctuelles	91
3.2	Mode à des o	s et fréquences propres de vibration d'un système soumis contraintes : principe de monotonic	94

Les pulsations propres du système, et les modes propres associés, ont été jusqu'à présent caractérisés par la résolution d'un problème aux valeurs propres formulé à partir de la linéarisation des énergies autour d'une configuration d'équilibre. Bien évidemment, la connaissance de ces valeurs propres est essentielle dans l'étude dy-namique d'un système, d'une part c'est un préalable au calcul dans la base modal, et d'autre part les phénomènes vibratoires critiques tels que la résonance dépendent principalement de ces valeurs propres. Comme on s'en rend compte, le calcul de ces valeurs propres nécessite de résoudre des problèmes qui deviennent très rapidement imposants.

Analytiquement ou numériquement, ces calculs sont coûteux. C'est pourquoi d'autres méthodes ont été mises au point pour calculer ces grandeurs caractéristiques. Nous présentons une de ces méthodes, très utilisée analytiquement : calcul direct du quotient de Rayleigh et calculs par récurrence à partir de ce quotient. Numériquement, des algorithmes spécifiques, souvent itératifs, existent pour l'extraction de ces valeurs propres : méthode de la puissance, vecteurs de Ritz, méthode de Lanczos, suites de Sturm, ...

#### 3.1 Le quotient de Rayleigh

Rappelons le principe de Hamilton (2.2.9) établi pour un système conservatif :

$$\left\{\begin{array}{l} \delta \int_{t_1}^{t_2} (T(\bar{q}, \bar{\dot{q}}, t) - V(\bar{q})) dt = 0\\ \delta \bar{q}(t_1) = \delta \bar{q}(t_2) = 0 \end{array}\right\} \text{ avec } T(\bar{q}, \bar{\dot{q}}, t) = \frac{1}{2} \bar{\dot{q}}^t \overline{\overline{M}} \, \bar{\dot{q}} \text{ et } V(\bar{q}) = \frac{1}{2} \bar{q}^t \overline{\overline{K}} \, \bar{q}$$

Dans un mode propre, les coordonnées généralisées vibrent en phase comme nous l'avons vu précédemment, d'où le calcul des énergies se développant pour chacun de ces modes propres :

$$\bar{q} = \bar{X}\cos(\omega t + \varphi) \quad (\rightsquigarrow \bar{q} = -\omega \bar{X}\sin(\omega t + \varphi))$$

$$\Downarrow$$

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 \bar{X}^t \overline{\overline{M}} \bar{X}\sin^2(\omega t + \varphi) = T_{max}\sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$V = \frac{1}{2} \bar{X}^t \overline{\overline{K}} \bar{X}\cos^2(\omega t + \varphi) = V_{max}\cos^2(\omega t + \varphi)$$

Les variations de ces quantités dans l'énoncé du principe de Hamilton (2.2.9) rappelé ci-dessus proviennent des variations spatiales uniquement, le principe de Hamilton étant équivalent au PPV intégré dans le temps. En conséquence les variations se calculent aisément :  $\delta \bar{q} = \delta \bar{X} \cos(\omega t + \varphi)$ . De plus,  $\delta \bar{q}$  doit vérifier les conditions de nullité en  $t_1$  et  $t_2$ . On peut choisir par exemple :  $\omega t_1 + \varphi = -\frac{\pi}{2}$  et  $\omega t_2 + \varphi = \frac{\pi}{2}$ . Calculons les intégrales :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T(\bar{q}, \bar{q}, t) = \delta(T_{max})_x \int_{t_1}^{t_2} \frac{1 - \cos^2(\omega t + \varphi)}{2} dt = \frac{1}{2} (t_2 - t_1) \,\delta(T_{max})_x$$
$$\int_{t_1}^{t_2} \delta V(\bar{q}) = \delta(V_{max})_x \int_{t_1}^{t_2} \frac{1 + \cos^2(\omega t + \varphi)}{2} dt = \frac{1}{2} (t_2 - t_1) \,\delta(V_{max})_x$$

Le principe de Hamilton s'écrit alors sous la forme suivante, dite *principe de Rayleigh* :

$$\delta(T_{max})_x = \delta(V_{max})_x$$
 Principe de Rayleigh (3.3.1)

Les équations du mouvement découlent de ce principe que doit satisfaire chaque mode propre :

$$\left(\overline{\overline{K}} - \omega^2 \overline{\overline{M}}\right) \bar{X} = \bar{0}$$

Comme nous l'avons précédemment indiqué en début de cette troisième partie, du fait de la convexité et la symétrie de l'énergie potentielle et l'énergie cinétique, la pulsation solution de ce problème est positive, elle est appelée *quotient de Rayleigh* et s'écrit :

$$\omega^2 = \frac{\bar{X}^t \,\overline{\bar{K}} \,\bar{X}}{\bar{X}^t \,\overline{\bar{M}} \,\bar{X}} \tag{3.3.2}$$

Au vecteur propre  $\bar{X}_r$  correspond exactement (cf eq 3.2.4) :

$$\omega_r^2 = \frac{\bar{X}_r^t \, \overline{K} \, \bar{X}_r}{\bar{X}_r^t \, \overline{\overline{M}} \, \bar{X}_r} = \frac{\gamma_r}{\mu_r}$$

Lorsque l'on forme le quotient de Rayleigh, en commettant une erreur du 1<sup>*er*</sup> ordre sur le vecteur propre  $\bar{X}_r : \bar{X} = \bar{X}_r + \varepsilon \bar{y}$ , on commet une erreur du 2<sup>*nd*</sup> ordre sur la valeur propre associée  $\omega_r^2$ . Le quotient de Rayleigh est stationnaire au voisinage d'une valeur propre du système. Ce résultat est très intéressant dans la pratique, tant du point de vu analytique (approximations) que du point de vu numérique.

Le quotient de Rayleigh est le point de départ d'une procédure variationnelle de détermination des pulsations et modes propres par récurrence qui aboutit au résultat suivant : La  $r^{i eme}$  valeur propre  $\omega_r^2$  et le vecteur propre  $\bar{X}_r$  correspondant sont la valeur minimale et le point minimum de la fonction  $\omega^2 = \frac{\bar{X}^t \overline{\bar{K}} \bar{X}}{\bar{X}^t \overline{\bar{M}} \bar{X}}$  dans le sous-espace orthogonal aux (r-1) premiers vecteurs propres  $\left\{ \bar{X} / \bar{X}_j^t \overline{\overline{M}} \bar{X}_i = 0, \forall j = 1, \dots, r-1 \right\}$ .

Ceci s'applique également aux cas continus et se généralise à la méthode de Rayleigh-Ritz. Le principe est de choisir un vecteur déplacement approché et de déduire par des itérations successives les valeurs et vecteurs propres associés. La convergence de la solution est d'autant plus rapide que le vecteur 'test' est proche de la solution exacte. On prend généralement comme vecteur de départ la solution en statique du problème. Cette démarche est illustrée dans l'exemple ci-dessous pour un système discret, et sera également utilisée pour les milieux continus de type poutres dans la 4<sup>*ième*</sup> partie.

#### 3.1.1 Recherche itérative des modes et valeurs propres

Le principe de Rayleigh peut être mis en œuvre dans les meilleures conditions dans les systèmes où la réponse statique est connue. C'est le cas de nombreux problèmes, notamment dans les milieux continus. Nous verrons ces applications par la suite. Les pulsations propres sont recherchées simplement en prenant une approximation du mode. Cette approximation est utilisée pour calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle, le rapport de ces 2 grandeurs formant le quotient de Rayleigh. La pulsation étant d'autant mieux approchée que le vecteur déplacement approximé est proche du mode propre correspondant à la pulsation.

La recherche itérative décrite ci-dessous peut, par contre, être mise en œuvre dans les cas généraux. Cette recherche étant numérique, on commet des erreurs d'approximation. Compte-tenu de ces erreurs, on met en œuvre 3 étapes différentes : la recherche de la plus petite valeur propre, la recherche de la plus grande valeur propre, et la recherche des valeurs intermédiaires. Nous l'appliquons ici au pendule double avec masses ponctuelles traité précédemment. On réécrit le problème de base :

$$\left(\overline{\overline{K}} - \omega^2 \overline{\overline{M}}\right) \overline{X} = \overline{0}$$

$$\overline{\overline{K}} \overline{X} - \omega^2 \overline{\overline{M}} \overline{X} = \overline{0}$$

$$\overline{\overline{M}}^{-1} \overline{\overline{K}} \overline{X} = \omega^2 \overline{X} \quad \text{ou encore} \quad \overline{\overline{K}}^{-1} \overline{\overline{M}} \overline{X} = \frac{1}{\omega^2} \overline{X}$$
(3.3.3)

cette relation est valable quelles que soient les pulsations propres et les vecteurs propres associés. Cherchons donc les différentes pulsations propres  $\omega_i$  et les vecteur propres associés  $\bar{X}_i$ . Prenons le premier vecteur d'essai  $\tilde{X}_{(1)}$ , l'indice (1) indiquant qu'il s'agit du vecteur déplacement obtenu à l'itération 1, formé d'une approximation dans la base modale :

$$\tilde{X}_{(1)} = C_1 \bar{X}_1 + C_2 \bar{X}_2 + \dots$$
 (3.3.4)

avec  $C_1, C_2, \ldots$  des constantes.

#### Recherche de la plus petite pulsation

Introduisons cette approximation (3.3.4) dans l'équilibre linéarisé (3.3.3), en utilisant le tenseur  $\overline{\overline{D}} = \overline{\overline{K}}^{-1} \overline{\overline{M}}$  appelé le *tenseur dynamique* :

$$\overline{\overline{D}}\widetilde{\overline{X}}_{1(1)} = C_1\overline{\overline{D}}\overline{X}_1 + C_2\overline{\overline{D}}\overline{X}_2 + \dots$$
$$= C_1\frac{1}{\omega_1^2}\overline{X}_1 + C_2\frac{1}{\omega_2^2}\overline{X}_2 + \dots$$

Prenons un vecteur d'essai  $\tilde{X}_{1(2)}$  proportionnel à l'approximation (3.3.4) de  $\bar{X}_1$  telle que :

$$\widetilde{X}_{1(2)} = C_1 \frac{1}{\omega_1^2} \overline{X}_1 + C_2 \frac{1}{\omega_2^2} \overline{X}_2 + \dots$$

ce qui conduit finalement à l'approximation de ce second vecteur d'essai :

$$\overline{\overline{D}}\widetilde{X}_{1(2)} = C_1 \frac{1}{\omega_1^2} \overline{\overline{D}} \overline{X}_1 + C_2 \frac{1}{\omega_2^2} \overline{\overline{D}} \overline{X}_2 + \dots$$
$$= C_1 \frac{1}{\omega_1^4} \overline{X}_1 + C_2 \frac{1}{\omega_2^4} \overline{X}_2 + \dots$$

En répétant ce processus, un nombre suffisant de fois, on arrive à :

$$\overline{\overline{D}}\widetilde{\overline{X}}_{1(n)} = C_1 \frac{1}{\omega_1^{2(n-1)}} \overline{\overline{D}} \overline{X}_1 + C_2 \frac{1}{\omega_2^{2(n-1)}} \overline{\overline{D}} \overline{X}_2 + \dots$$
$$\simeq C_1 \frac{1}{\omega_1^{2n}} \overline{X}_1 \qquad \text{car } \omega_1 < \omega_2 < \dots$$

Le nombre d'itérations est d'autant plus petit que  $\omega_1$  est différent de  $\omega_2$ . Comme nous recherchons la plus basse pulsation propre, on sait que le quotient de Rayleigh formé par le rapport des itérations successives est :

$$\overline{\overline{D}}\widetilde{X}_{1(n)} \simeq C_1 \frac{1}{\omega_1^{2n}} \overline{X}_1 \quad \text{et} \quad \overline{\overline{D}}\widetilde{X}_{1(n+1)} \simeq C_1 \frac{1}{\omega_1^{2(n+1)}} \overline{X}_1 \quad \text{d'où} \quad \frac{\overline{D}\overline{X}_{1(n)}}{\overline{\overline{D}}\widetilde{\overline{X}}_{1(n+1)}} = \widetilde{\omega}_1^2$$
(3.3.5)

Dans les itérations, on commet des approximations sur les vecteurs propres, et donc sur les pulsations propres mais d'un ordre inférieur, c'est d'ailleurs l'intérêt de l'utilisation de Rayleigh. Après un nombre suffisant d'itérations on tend vers :

$$\overline{\overline{D}}\widetilde{\overline{X}}_{1(n)} \simeq C_1 \frac{1}{\widetilde{\omega}_{1(n)}^{2n}} \widetilde{\overline{X}}_{1(n)}$$
(3.3.6)

On s'arrangera pour ne pas conserver dans les itérations successives le rapport  $\frac{C_1}{\omega_1^2}$ . D'ailleurs, l'approximation de  $\bar{X}_1$ , après un nombre suffisant d'itérations, doit conduire à une décomposition modale du vecteur d'essai uniquement en fonction du premier mode, soit  $C_1 = 1$  dans l'expression (3.3.4). Comme seul le rapport entre les approximations successives est essentiel, l'approximation  $\frac{C_1}{\widetilde{\omega}_{1(n)}^2}$  est prise égale à 1 à l'itération (n+1), donc après (n+1) itérations on tend vers l'inverse de la pulsation recherchée :

$$\frac{C_1}{\widetilde{\omega}_{1(n)}^2} \xrightarrow{(n) \to (n+1)} 1 \Rightarrow \frac{C_1}{\widetilde{\omega}_{1(n+1)}^{2(n+1)}} \to \frac{1}{\widetilde{\omega}_{1(n+1)}^2}$$
(3.3.7)

Le système de départ de la détermination par itérations des valeurs et vecteur propres est donc :

d'après (3.3.5) 
$$\overline{D}\widetilde{X}_{1(n)}\frac{1}{\widetilde{\omega}_{1}^{2}} = \overline{D}\widetilde{X}_{1(n+1)}$$
  
et d'après (3.3.6)  $\simeq \frac{C_{1}}{\widetilde{\omega}_{1(n+1)}^{2(n+1)}}\widetilde{X}_{1(n+1)}$ 

et finalement, d'après (3.3.7) :

$$\boxed{\overline{\overline{D}}\widetilde{X}}_{1(n)} = \frac{1}{\widetilde{\omega}_{1(n+1)}^2} \widetilde{X}_{1(n+1)}$$
(3.3.8)

#### Recherche de la plus grande pulsation

Contrairement à l'approximation de la plus basse pulsation, on partira ici du système inverse, écrit en utilisant le *tenseur statique*  $\overline{\overline{D}}^{-1} = \overline{\overline{M}}^{-1} \overline{\overline{K}}$ . Ce qui conduit en utilisant l'approximation du déplacement (3.3.4) à :

$$\overline{\overline{D}}^{-1}\widetilde{\overline{X}}_{m(n)} \simeq C_m \omega_m^{2n} \overline{X}_m \qquad \text{avec } \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_m$$

d'où

$$\frac{\overline{\overline{D}}^{-1}\widetilde{\overline{X}}_{m(n+1)}}{\overline{\overline{D}}^{-1}\widetilde{\overline{X}}_{m(n)}} = \widetilde{\omega}_m^2$$
(3.3.9)

La remarque concernant  $C_1 = 1$  peut être faite concernant la constante  $C_m = 1$ , le vecteur d'essai se décomposant au finale uniquement en fonction du dernier mode  $\bar{X}_r$ . L'expression de départ des itérations de recherche des plus hautes pulsations est basée sur :

$$\overline{\overline{D}}^{-1}\widetilde{\overline{X}}_{m(n+1)} = \overline{\overline{D}}^{-1}\widetilde{\overline{X}}_{m(n)}\widetilde{\omega}_m^2 \text{ d'après (3.3.9)}$$
$$= \widetilde{\omega}_{m(n+1)}^2\widetilde{\overline{X}}_{m(n+1)}$$

et s'écrit donc :

$$\overline{\overline{D}}^{-1}\widetilde{X}_{m(n+1)} = \widetilde{\omega}_{m(n+1)}^2 \widetilde{X}_{m(n+1)}$$
(3.3.10)

#### Convergence vers les pulsations intermédiaires

Une fois déterminé un des modes  $\overline{X}_i$  et la valeur propre associée  $\omega_i$ , on sait que le nouveau vecteur d'essai  $\widetilde{X}_{(1)}$  doit être *K* et *M*-orthogonal à ce vecteur propre. Ceci permet d'écrire pour le nouveau vecteur d'essai, par exemple en utilisant la *M*-orthogonalité :

$$\bar{X}_i^t \overline{\overline{M}} \widetilde{\bar{X}}_{(1)} = 0$$

Ce qui permet d'exprimer la forme générale des vecteurs d'essais à construire à chaque rang d'itération. On obtient une relation de la forme :

$$c_{11}\widetilde{X}_{(1)}^{1} + c_{12}\widetilde{\bar{X}}_{(1)}^{2} + \dots + c_{1n}\widetilde{\bar{X}}_{(1)}^{n} = 0$$
$$\hookrightarrow \widetilde{\bar{X}}_{(1)}^{1} = -\frac{c_{12}}{c_{11}}\widetilde{\bar{X}}_{(1)}^{1} - \dots - \frac{c_{1n}}{c_{11}}\widetilde{\bar{X}}_{(1)}^{n}$$

où  $\widetilde{X}_{r(p)}^{i}$  est la coordonnée *i* de l'approximation  $\widetilde{\overline{X}}_{r}$  du vecteur propre de rang *r* obtenu à l'itération *p*. Ce système se met sous forme matricielle :

$$\widetilde{X}_{(1)} = \begin{cases} \widetilde{X}_{(1)}^{1} \\ \widetilde{X}_{(1)}^{2} \\ \vdots \\ \widetilde{X}_{(1)}^{n} \end{cases} = \underbrace{ \begin{bmatrix} 0 & -\frac{c_{12}}{c_{11}} & \dots & \dots & -\frac{c_{1n}}{c_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \atop \begin{bmatrix} \widetilde{X}_{(1)}^{1} \\ \widetilde{X}_{(1)}^{2} \\ \vdots \\ \widetilde{X}_{(1)}^{n} \end{bmatrix}$$

Le nouveau système dérivant de l'équation (3.3.3) initiale prend en compte cette relation de *M*-orthogonalité :

$$[D] [S_1] \{X\}_{(1)} = \frac{1}{\omega^2} \{X\}_{(1)}$$

ces relations convergeant vers  $\{X_2\}$  et  $\omega_2$ . Le vecteur d'essai à l'itération 3 doit être à son tour *K* et *M*-orthogonal, ce qui permet de déterminer  $[S_2]$ .

Ces calculs s'automatisent sans problème. Les estimations des n valeurs et vecteurs propres d'un système à  $n \, ddl$  conduisent à n-1 système  $[S]_i$ . En fait le dernier de ces systèmes,  $[S]_{n-1}$ , ne présente pas d'intérêt puisque les conditions de M ou Korthogonalité conduisent à déterminer de façon unique l'expression du vecteur propre. La pulsation propre est alors directement connue à partir de l'expression de ce vecteur propre. Il faut noter que dans la réalité, le dernier vecteur propre ne sera jamais recherché car les erreurs numériques augmentent avec le rang des valeurs et vecteurs propres. On déterminera plutôt ces dernières valeurs en partant de la plus grande pulsation. On notera également que les système continus possèdent une infinité de ddlauxquels correspondent une infinité de valeur propres, si bien que ce problème ne se posera jamais en pratique pour les milieux continus.

#### **3.1.2** Application au pendule double avec masses ponctuelles

#### Recherche de la plus basse pulsation

Calculons la matrice dynamique  $\overline{\overline{D}} = \overline{\overline{K}}^{-1} \overline{\overline{M}}$  dans notre cas :

$$[D] = [K]^{-1}[M] = \frac{l}{g} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 4\\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \frac{l}{g} \begin{bmatrix} 2 & 1\\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Le système de départ de recherche itérative des pulsations les plus basses et des vecteurs propres associés s'écrit en partant de la forme de l'expression (3.3.8):

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{cases} \widetilde{X}_1^1 \\ \widetilde{X}_1^2 \end{cases} \frac{l}{g} = \frac{1}{\widetilde{\omega}_{(n+1)}^2} \begin{cases} \widetilde{X}_1^1 \\ \widetilde{X}_1^2 \end{cases} _{(n+1)}$$
(3.3.11)

Pour débuter les itérations, on forme par exemple le vecteur d'essai unité. La première itération permet de constituer  $\overline{D}\overline{X}_{1(0)}$ , ce qui donne le premier couple  $(\overline{X}_{1(1)}, \widetilde{\omega}_{1(1)}^2)$  dont le produit est égal à cette quantité. On peut normer ce produit, par exemple par le  $sup(|X_r^i|)$ , ce qui conduit à la valeur propre associée. La seconde itération débute avec ce couple, et le processus est répété jusqu'à obtenir la convergence du système. Les calculs conduisent à la suite de valeurs propres et vecteurs suivants :

itération 1 
$$\frac{g}{l}[D]{X}_{1(0)} = \begin{cases} 3\\4 \end{cases} = \frac{1}{\widetilde{\omega}_{1(1)}^2} \frac{g}{l} \begin{cases} 3\\4 \end{cases} = \frac{1}{0,25} \begin{cases} 0,75\\1 \end{cases}$$
  
itération 2  $\frac{1}{\widetilde{\omega}_{1(2)}^2} \frac{g}{l} \begin{cases} 2,5\\3,5 \end{cases} = \frac{1}{0,286} \begin{cases} 0,714\\1 \end{cases}$   
itération 3  $\frac{1}{\widetilde{\omega}_{1(3)}^2} \frac{g}{l} \begin{cases} 2,429\\3,429 \end{cases} = \frac{1}{0,292} \begin{cases} 0,708\\1 \end{cases}$   
itération 4  $\frac{1}{\widetilde{\omega}_{1(4)}^2} \frac{g}{l} \begin{cases} 2,417\\3,417 \end{cases} = \frac{1}{0,293} \begin{cases} 0,707\\1 \end{cases}$ 

Les résultats de cette recherche par itérations sont à comparer aux valeurs exactes calculées précédemment analytiquement :

Approximations 
$$\widetilde{\omega}_{1}^{2} = 0,293 \frac{g}{l}$$
  $\widetilde{X}_{1} = \begin{cases} 0,707\\ 1 \end{cases}$   
Solution exacte  $\omega_{1}^{2} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{g}{l}$   $\overline{X}_{1} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1 \end{cases}$ 

On notera la très bonne précision obtenue à partir de ces calculs. En effet, à la seconde itération l'erreur commise sur la pulsation est de moins de 2,5% et à la troisième itération l'erreur est de 0,4%. En ce qui concerne le vecteur propre associé, trois ou quatre itérations suffisent pour en obtenir une approximation raisonnable.

#### Recherche de la plus haute pulsation

Dans notre exemple, les calculs de la matrice statique  $\overline{\overline{D}}^{-1} = \overline{\overline{M}}^{-1} \overline{\overline{K}}$ , conduisent à :

$$[D]^{-1} = [M]^{-1}[K] = \frac{g}{l} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{g}{l} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
(3.3.12)

Le système de départ de la détermination par itérations des valeurs propres les plus élevées et des vecteurs propres est donc, en partant de (3.3.10) :

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} \widetilde{X}_1^1 \\ \widetilde{X}_1^2 \end{cases}_{(n)} \frac{g}{l} = \widetilde{\omega}_{2(n+1)}^2 \begin{cases} \widetilde{X}_1^1 \\ \widetilde{X}_1^2 \end{cases}_{(n+1)}$$

Pour débuter les itérations, on forme de nouveau le vecteur d'essai unité. Les calculs conduisent à la suite de valeurs propres et vecteurs suivants (normés par le  $sup(|X_r^i|)$ ):

itération 1 
$$\frac{l}{g}[D]^{-1}{X}_{2(0)} = \begin{cases} 0,5\\0 \end{cases} = \frac{l}{g}\widetilde{\omega}_{2}^{2}(1) \begin{cases} 0,5\\0 \end{cases} = 0,5 \begin{cases} 1\\0 \end{cases}$$
  
itération 2  $\frac{l}{g}\widetilde{\omega}_{2}^{2}(2) \begin{cases} 1\\-1 \end{cases} = 1 \begin{cases} 1\\-1 \end{cases}$   
itération 3  $\frac{l}{g}\widetilde{\omega}_{2}^{2}(3) \begin{cases} 1,5\\-2 \end{cases} = 2 \begin{cases} 0,75\\-1 \end{cases}$   
itération 4  $\frac{l}{g}\widetilde{\omega}_{2}^{2}(3) \begin{cases} 1,25\\-1,75 \end{cases} = 1,75 \begin{cases} 0,714\\-1 \end{cases}$   
itération 5  $\frac{l}{g}\widetilde{\omega}_{2}^{2}(5) \begin{cases} 1,214\\-1,714 \end{cases} = 1,714 \begin{cases} 0,708\\-1 \end{cases}$   
itération 6  $\frac{l}{g}\widetilde{\omega}_{2}^{2}(6) \begin{cases} 1,208\\-1,708 \end{cases} = 1,708 \begin{cases} 0,707\\-1 \end{cases}$   
itération 7  $\frac{l}{g}\widetilde{\omega}_{2}^{2}(7) \begin{cases} 1,207\\-1,707 \end{cases} = 1,707 \begin{cases} 0,707\\-1 \end{cases}$ 

La dernière valeur propre  $\widetilde{\omega}_2^2$  et le vecteur propre correspondant  $\tilde{X}_2$  sont donc déduits de ces calculs. Ces grandeurs sont à comparer aux solutions exactes obtenues précédemment :

Approximations 
$$\widetilde{\omega}_2^2 = 1,707 \frac{g}{l}$$
  $\widetilde{X}_2 = \begin{cases} 0,707\\ -1 \end{cases}$   
Solution exacte  $\omega_2^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{g}{l}$   $\overline{X}_1 = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -1 \end{cases}$ 

Ici encore la précision est très bonne, puisqu'à la quatrième itération l'erreur commise sur la pulsation est de moins de 2% et à la cinquième itération l'erreur est de 0,4%.

#### Recherche des valeurs intermédiaires

On applique cette recherche des valeurs intermédiaires dans l'exemple du pendule double dans un but uniquement pédagogique, puisque les deux seules valeurs propres sont d'ores et déjà déterminées dans notre système à deux *ddl*.

Pour calculer la seconde pulsation propre et le vecteur propre associé, on utilise les relations de M ou K-orthogonalité que doit vérifier le second mode propre par rapport à la solution que nous venons de trouver. On peut former la matrice de passage telle

que ce nouveau vecteur des inconnues soit *M*-orthogonal à  $\overline{X}_1$ :

$$\left\{ \tilde{X}_{2} \right\}^{t} [M] \left\{ \tilde{X}_{1} \right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \tilde{X}_{2}^{1} \\ \tilde{X}_{2}^{2} \end{array} \right\}^{t} \begin{bmatrix} 8m\ell^{2} & 4m\ell^{2} \\ 4m\ell^{2} & 4m\ell^{2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} 0,707 \\ -1 \end{array} \right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle \tilde{X}_{2}^{1}, \tilde{X}_{2}^{2} \rangle \left\{ \begin{array}{c} 4(1,414-1) \\ 4(0,707-1) \end{array} \right\} = 0 \rightarrow \tilde{X}_{2}^{2} = -0,707 \tilde{X}_{2}^{1}$$

$$\tilde{X}_{2} = [S_{1}] \tilde{X}_{2} = \begin{bmatrix} 0 & 0,707 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{X}_{2}^{1} \\ \tilde{X}_{2}^{2} \end{array} \right\}$$

$$(3.3.13)$$

À partir de cette relation, on forme la matrice de changement de vecteur d'essai  $[S_1]$ , qui est injectée dans la relation de base des itérations qui devient la nouvelle matrice du système permettant de déterminer les caractéristiques propres. Par exemple en considérant le problème de la plus grande valeur propre :

$$[D]^{-1}[S_1] = [M]^{-1}[K][S_1] = \frac{g}{l} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0,707 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{g}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0,207 \\ 0 & 0,293 \end{bmatrix}$$

Dans notre système possédant 2 *ddl*, la démarche systématique de formation des vecteurs d'essai s'interrompt dés  $[S_1]$ , correspondant à la recherche de la seconde valeur propre (3.3.13). De cette relation, on tire directement le vecteur en normant par le  $sup(|X^i|)$ , et la pulsation propre correspondante calculée à partir de la matrice statique (3.3.12) :

Approximations 
$$\widetilde{\omega}_{1}^{2} = 0,293 \frac{g}{l}$$
  $\widetilde{X}_{1} = \begin{cases} 0,707\\ 1 \end{cases}$   
Solution exacte  $\omega_{1}^{2} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{g}{l}$   $\overline{X}_{1} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1 \end{cases}$ 

# **3.2** Modes et fréquences propres de vibration d'un système soumis à des contraintes : principe de monotonic

Il s'agit ici de prévoir la modification du spectre des fréquences en présence de contraintes cinématiques supplémentaires. Il peut en effet être intéressant de connaître l'influence de la modification d'une liaison cinématique sur la répartition des pulsations propres, ceci dans le but par exemple de décaler le spectre des fréquences, ce qui peut contribuer à éviter la résonance.

Imposer une contrainte à un système revient à prendre en compte une équation supplémentaire du type :

$$f(q_1,\ldots,q_n)=0$$

compatible avec la position d'équilibre  $f(q_1(t = t_0), ..., q_n(t = t_0)) = 0$ . Comme il s'agit d'étudier les oscillations de petites amplitudes autour d'un configuration d'équilibre, comme pour les énergies on peut linéariser la contrainte autour de cette configuration  $\bar{q}_e$  prise nulle pour simplifier :

$$f(q_1, \dots, q_n) = f(\bar{q})_{|\bar{q}=\bar{0}} + \bar{\nabla}^t f_{|\bar{q}=\bar{0}} \bar{q} \qquad \Rightarrow \bar{\nabla} f_{|\bar{q}=\bar{0}} = \bar{0}$$

Le nouveau système possède maintenant (n-1) degrés de liberté, donc (n-1) valeurs et vecteurs propres que l'on peut distinguer par le signe  $\tilde{}$ :

$$\widetilde{\omega}_1^2 \le \widetilde{\omega}_2^2 \le \ldots \le \widetilde{\omega}_{n-1}^2$$
$$\widetilde{\bar{X}}_1, \widetilde{\bar{X}}_2, \ldots, \widetilde{\bar{X}}_{n-1}$$

Il est évident que  $\omega_1$  étant le minimum du premier quotient de Rayleigh, en l'absence de contrainte, le fait de prendre en compte une contrainte ne peut conduire qu'à un nouveau minimum  $\widetilde{\omega}_1$  non inférieur à  $\omega_1$  ( $\uparrow$  rigidité). On démontre qu'il en est de même pour les quotients de Rayleigh récursifs :

$$\omega_r^2 \leq \widetilde{\omega}_r^2 \leq \ldots \leq \omega_{r+1}^2$$

ce qui se généralise au cas où m contraintes sont imposées au système :

$$\omega_r^2 \leq \widetilde{\omega}_r^2 \leq \ldots \leq \omega_{r+m}^2$$

Application au pendule double avec masses ponctuelles On reprend l'exemple introduit précédemment avec cette fois-ci, l'articulation entre les 2 barres bloquées. Ceci correspond à  $\theta_1 = \theta_2$ . On trouve alors sans difficulté la nouvelle pulsation propre du système contraint, qui vérifie les inégalités énoncées ci-dessus. L'énergie cinétique et le potentiel deviennent :

$$2T = 20m\ell^2\dot{\theta}^2$$
 et  $2V = 6mg\ell\theta$ 

ce qui conduit à

$$\widetilde{\omega_1}^2 = \frac{3}{10} \frac{g}{\ell} \Rightarrow \widetilde{\omega_1} \simeq 1,225 \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Soit :

$$\omega_1=0,54\sqrt{\frac{g}{\ell}}\leq \widetilde{\omega}_1=1,225\sqrt{\frac{g}{\ell}}\leq \omega_2=1,306\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$
## - 4 -

## Oscillations amorties des systèmes à *n* degrés de liberté

#### Sommaire

4.1	Oscillations amorties en terme de modes propres du système conservatif associé		
4.2	Analyse des systèmes amortis visqueux dans l'espace d'état 10		
	4.2.1	Étude du cas homogène	
	4.2.2	Étude du cas non homogène	
	4.2.3	Réponse à une excitation harmonique	

Dans toutes les structures réelles, il y a dissipation de l'énergie du système. C'est d'ailleurs cette dissipation qui permet d'éviter que les phénomènes de résonance ne conduisent systématiquement à la ruine des structures. Pourtant *la prise en compte de cette dissipation présente des difficultés*, essentiellement lors de la résolution des équations d'équilibre.

Comme nous l'avons vu précédemment, la projection dans la base modale permet de découpler ces équations qui régissent l'équilibre et la stabilité du système. La prise en compte de la dissipation proportionnelle aux vitesses ( $\mathcal{D} = \frac{1}{2} \vec{q}^{t} \overline{\vec{C}} \vec{q}$ ) va conduire à des systèmes couplés, dont la résolution sera possible dans le cas *d'amortissements diagonaux* ou supposés tels, ou bien dans *l'espace d'état*. Dans ce dernier cas, il faudra s'interroger sur la stabilité de la solution obtenue. Dans les codes de calcul par éléments finis, ces hypothèses d'amortissement diagonal sont les plus courantes, bien que justifiées seulement dans les structures peu dissipatives. On trouve ces hypothèses sous la dénomination d'amortissement modal où l'on spécifie l'amortissement de chaque mode de la base modale, l'amortissement de Rayleigh où la matrice d'amortissement proportionnelle à la matrice de masse et la matrice de raideur, et l'amortissement proportionnel, utilisé pour représenter une dissipation proportionnelle aux contraintes développées dans le solide. Au final, pour les amortissements hors de ces cas précis, tout l'intérêt du découplage des équations est réduit, et il devient parfois plus rapide de résoudre le problème de dynamique hors de la base modale.

Considérons l'amortissement comme une forme quadratique des vitesses, avec  $\overline{C}$  la matrice d'amortissement symétrique non-négative. L'introduction de cette dissipation dans les équations de Lagrange conduit à l'équation des oscillations forcées amorties :

$$\overline{\overline{M}}\,\overline{\overline{q}} + \overline{\overline{C}}\,\overline{\overline{q}} + \overline{\overline{K}}\,\overline{q} = \overline{p}(t)$$
(3.4.14)

## 4.1 Oscillations amorties en terme de modes propres du système conservatif associé

Associons au système réel le système non-amorti, dont les pulsations  $\omega_{or}^2$  et modes propres  $\bar{X}_r$  sont facilement caractérisés. On peut essayer de projeter les équations d'équilibre régissant le système amorti (3.4.14), dans la base modale du système conservatif associé :

$$\bar{q} = \sum_{s=1}^{n} \eta_{s}(t) \bar{X}_{s}$$
$$\bar{X}_{r}^{t} \overline{\overline{M}} \sum_{s=1}^{n} \bar{X}_{s} \dot{\eta}_{s}(t) + \bar{X}_{r}^{t} \overline{\overline{C}} \sum_{s=1}^{n} \bar{X}_{s} \dot{\eta}_{s}(t) + \bar{X}_{r}^{t} \overline{\overline{K}} \sum_{s=1}^{n} \bar{X}_{s} \eta_{s}(t) = \bar{X}^{t} \bar{p}$$
soit  $\mu_{r} \ddot{\eta}_{r}(t) + \sum_{s=1}^{n} \bar{X}_{r}^{t} \overline{\overline{C}} \bar{X}_{s} \dot{\eta}_{s}(t) + \gamma_{r} \eta_{r}(t) = \bar{X}_{r}^{t} \bar{p}$ 

ou bien 
$$\ddot{\eta}_r(t) + \sum_{s=1}^n \frac{\beta_{rs}}{\mu_r} \dot{\eta}_s(t) + \omega_{or}^2 \eta_r(t) = \varphi_r(t)$$
 avec  $\beta_{rs} = \bar{X}_r^t \overline{\overline{C}} \bar{X}_s$ 

En l'absence d'hypothèses supplémentaires, les équations normales sont couplées par les coefficients d'amortissement  $\beta_{rs}$  et toute l'efficacité de la méthode modale applicable au cas non amorti est perdue. Pour obtenir des équations découplées, il faudrait que seuls les termes diagonaux soient non nuls ( $\beta_{kl} = 0, \forall k \neq l$ ), ce qui implique que les forces de dissipations soient réparties comme les forces d'inertie ou les forces élastiques (*K* et *M*-orthogonalités), ou soient pondérées entre les deux formes :  $\overline{\overline{C}} = a\overline{\overline{K}} + b\overline{\overline{M}}$ . Mais on ne peut, dans un cadre général, pas justifier une telle hypothèse *a priori*. Cette hypothèse est pourtant largement utilisée, c'est l'*hypothèse* ou *amortissement de Rayleigh*.

L'hypothèse qui consiste à supposer que l'amortissement est diagonal n'est pas justifiée. Toutefois, on peut montrer que cette hypothèse est cohérente avec la notion de structure faiblement dissipative. Faisons l'hypothèse que les termes d'amortissement sont d'un ordre de grandeur inférieur à ceux de raideur et d'inertie, et étudions les vibrations libres du système amorti. La solution générale est à chercher sous la forme  $\bar{q} = \bar{z} e^{\lambda t}$ ,  $\bar{z}$  et  $\lambda$  étant complexes. Pour le système associé non amorti  $\lambda_k = \pm i \omega_{0r}$  et  $\bar{z}_k = \bar{X}_k$ . L'équilibre (3.4.14) devient :

$$\left(\lambda_k^2 \overline{\overline{M}} + \lambda_k \overline{\overline{C}} + \overline{\overline{K}}\right) \bar{z}_k = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

Le système étant faiblement dissipatif, on peut admettre que la pulsation  $\lambda_k$  et le mode  $\bar{z}_k$  solution de cet équilibre en présence de termes d'amortissement diffèrent peu de  $i \omega_{0k}$  et  $\bar{X}_k$  caractéristique du système non amorti associé :

$$\lambda_k = i \omega_{0k} + \Delta \lambda_k$$
 et  $\bar{z}_k = \bar{X}_k + \Delta \bar{z}_k$ 

En reportant ces valeurs dans l'équation générale, on obtient :

$$\left(\left(-\omega_{0k}^{2}+2i\omega_{0k}\Delta\lambda_{k}+(\Delta\lambda_{k})^{2}\right)\overline{\overline{M}}+(i\omega_{0k}+\Delta\lambda_{k})\overline{\overline{C}}+\overline{\overline{K}}\right)(\bar{X}_{k}+\Delta\bar{z}_{k})=0$$

compte-tenu que  $\left(\overline{\overline{K}} - \omega_{0k}^2 \overline{\overline{M}}\right) \overline{X}_k = \overline{0}$ , et négligeant les termes d'ordre 2 :

$$\left(\overline{\overline{K}} - \omega_{0k}^2 \overline{\overline{M}}\right) \Delta \bar{z}_k + \left(2i\omega_{0k}\overline{\overline{M}} + \overline{\overline{C}}\right) \bar{X}_k \Delta \lambda_k + i\omega_{0k}\overline{\overline{C}} \left(\bar{X}_k + \Delta \bar{z}_k\right) \sim 0$$

L'amortissement étant faible, négligeons les termes  $\overline{C}\Delta\lambda_k$  et  $\overline{C}\Delta\bar{z}_k$ . L'équation se réduit à :

$$\left(\overline{\overline{K}} - \omega_{0k}^2 \overline{\overline{M}}\right) \Delta \overline{z}_k + i \omega_{0k} \left(\overline{\overline{C}} + 2\Delta \lambda_k \overline{\overline{M}}\right) \overline{X}_k \sim 0$$

En multipliant à gauche par  $\bar{X}_k^t$  on obtient :

$$\begin{split} \bar{X}_{k}^{t} \left(\overline{\overline{C}} + 2\Delta\lambda_{k}\overline{\overline{M}}\right) \bar{X}_{k} &\sim 0 \\ \bar{X}_{k}^{t}\overline{\overline{C}} \bar{X}_{k} + 2\Delta\lambda_{k} \bar{X}_{k}^{t}\overline{\overline{M}} \bar{X}_{k} &\sim 0 \\ \Delta\lambda_{k} &\sim -\frac{\beta_{kk}}{2\mu_{k}} \\ \text{ce qui conduit à} \quad \boxed{\lambda_{k} &\sim -\frac{\beta_{kk}}{2\mu_{k}} + i\omega_{0k}} \end{split}$$

Ainsi, on a mis en évidence deux aspects importants :

- L'amortissement apporte à chaque valeur propre une *correction* par le biais d'une *partie réelle négative* conférant à chaque solution le *caractère oscillatoire amorti*,
- Un *amortissement faible* ne fait apparaître que les *termes diagonaux*  $\beta_{kk}$  de la projection modale de la matrice d'amortissement.

La modification des modes propres est obtenue en décomposant  $\Delta \bar{z}_k$  suivant les modes propres du système non amorti, on trouve :

$$\bar{z}_{k} = \bar{X}_{k} + \sum_{s=1}^{n} i\omega_{0k} \frac{\beta_{rs}}{\mu_{s} \left(\omega_{0k}^{2} - \omega_{0s}^{2}\right)} \bar{X}_{k}$$

La correction apportée au mode propre provenant d'un terme imaginaire, le mode n'est plus caractérisé par un mouvement synchrone de l'ensemble des degrés de liberté.

L'hypothèse d'amortissement diagonal est souvent appelée hypothèse de Basile, elle permet de découpler les équations normales sous la forme :

$$\left|\ddot{\eta}_r + \frac{\beta_r}{\mu_r}\dot{\eta}_r + \omega_{0r}^2\eta_r = \varphi(t)\right| \quad r = 1, \dots, n$$

ou encore sous forme canonique :

$$\ddot{\eta}_r(t) + 2\varepsilon_r \omega_{0r} \dot{\eta}_r(t) + \omega_{0r}^2 \eta_r(t) = \varphi(t)$$

avec  $\varepsilon_r = \frac{\beta_r}{2\omega_{0r}\mu_r}$  l'amortissement réduit. Ce dernier résultat est l'extension des découplages mis en évidence dans les systèmes non amortis. Sous la condition que l'amortissement est diagonal, la méthode modale permet de formuler la résolution du problème à *n ddl* comme la résolution de *n* problèmes de type oscillateur élémentaire. On rappelle que dans le cas de l'oscillateur élémentaire, la forme canonique de l'équilibre s'écrit (1.3.3) :

$$\ddot{u}(t) + 2\varepsilon \omega_p \dot{u}(t) + \omega_p^2 u(t) = \frac{1}{m} f(t)$$

avec  $\omega_p^2 = \frac{k}{m}$  le carré de la pulsation propre et  $\varepsilon = \frac{c}{2m\omega_p}$  l'amortissement réduit.

## 4.2 Analyse des systèmes amortis visqueux dans l'espace d'état

Une autre façon de résoudre les équations du système amorti  $\overline{\overline{M}}\,\overline{\overline{q}} + \overline{\overline{C}}\,\overline{q} + \overline{\overline{K}}\,\overline{q} = \overline{p}(t)$ consiste à le transformer en un système de 2n équations du premier ordre que l'on peut écrire ainsi :

$$\begin{bmatrix} \overline{\overline{C}} & \overline{\overline{M}} \\ \overline{\overline{M}} & \overline{\overline{0}} \end{bmatrix} \begin{cases} \overline{\dot{q}} \\ \overline{\ddot{q}} \end{cases} + \begin{bmatrix} \overline{\overline{K}} & \overline{\overline{0}} \\ \overline{\overline{0}} & -\overline{\overline{M}} \end{bmatrix} \begin{cases} \overline{q} \\ \overline{\dot{q}} \end{cases} = \begin{cases} \overline{p}(t) \\ \overline{0} \end{cases}$$
(3.4.15)

qui prend la forme canonique :

$$\overline{\overline{\mathcal{R}}}\,\bar{r} + \overline{\overline{\mathcal{B}}}\,\bar{\bar{r}} = \bar{s}$$

avec les matrices symétriques et les vecteurs :

$$\overline{\overline{\mathcal{A}}} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{K}} & \overline{\overline{0}} \\ \overline{\overline{0}} & -\overline{\overline{M}} \end{bmatrix} \qquad \overline{\overline{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{C}} & \overline{\overline{M}} \\ \overline{\overline{M}} & \overline{\overline{0}} \end{bmatrix} \qquad \overline{r} = \begin{cases} \overline{\dot{q}} \\ \overline{\ddot{q}} \end{cases} \qquad \overline{s} = \begin{cases} \overline{p}(t) \\ \overline{0} \end{cases}$$

#### 4.2.1 Étude du cas homogène

En l'absence de sollicitations extérieures, l'équilibre s'écrit dans l'espace d'état (3.4.15) :

$$\overline{\overline{\mathcal{A}}}\bar{r} + \overline{\overline{\mathcal{B}}}\bar{\bar{r}} = \bar{0}$$

et la solution est recherchée sous la forme générale  $\bar{r} = \bar{y}e^{\lambda t}$ . On y associe l'équation aux valeurs propres :

$$\overline{\overline{\mathcal{A}}}\bar{y} + \lambda \overline{\overline{\mathcal{B}}}\bar{y} = \bar{0}$$

dont les solutions seront notées  $(\lambda_k, \bar{y}_k)$ .

#### **Relations d'orthogonalité**

Pour 2 solutions propres k et j, nous trouvons sans difficulté :

$$\bar{Y}_{i}^{t} \,\overline{\mathcal{A}} \,\bar{Y}_{k} + \lambda_{k} \,\bar{Y}_{i}^{t} \,\overline{\mathcal{B}} \,\bar{Y}_{k}^{t} = 0 \tag{3.4.16a}$$

$$\bar{Y}_{k}^{t}\overline{\overline{\mathcal{A}}}\bar{Y}_{j} + \lambda_{j}\bar{Y}_{k}^{t}\overline{\overline{\mathcal{B}}}\bar{Y}_{j}^{t} = 0$$
(3.4.16b)

Les matrices  $\overline{\overline{\mathcal{A}}}$  et  $\overline{\overline{\mathcal{B}}}$  étant symétriques, on obtient en effectuant (3.4.16a)-(3.4.16b) :

$$\left(\lambda_k - \lambda_j\right) \bar{Y}_j^t \,\overline{\mathcal{B}} \, \bar{Y}_k = 0$$

ce qui donne, pour  $\lambda_k \neq \lambda_j$ , les relations d'orthogonalité :

$$\bar{Y}_{j}^{t} \overline{\mathcal{B}} \bar{Y}_{k}^{t} = b_{k} \delta_{kj}$$
$$\bar{Y}_{j}^{t} \overline{\overline{\mathcal{A}}} \bar{Y}_{k}^{t} = a_{k} \delta_{kj}$$

Lorsque k = j, on obtient les valeurs propres données par le *quotient de Rayleigh* :

$$\lambda_k = -rac{a_k}{b_k} = -rac{ar{Y}_k^t\,\overline{\mathcal{A}}\,ar{Y}_k^t}{ar{Y}_k^t\,\overline{\overline{\mathcal{B}}}\,ar{Y}_k^t}$$

Les matrices  $\overline{\overline{\mathcal{B}}}$  et  $\overline{\overline{\mathcal{A}}}$  étant réelles, si  $(\lambda_k, \overline{Y}_k)$  est une solution alors son conjugué  $(\widetilde{\lambda_k}, \widetilde{\overline{Y}_k})$  l'est aussi.

#### Stabilité de la solution

Par définition  $\bar{r} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{q} \\ \bar{q} \end{array} \right\}$ , alors les vecteurs  $\bar{Y}_r$  s'écrivent sous la forme  $\bar{Y}_r = \left\{ \begin{array}{c} \bar{z}_r \\ \lambda_r \bar{z}_r \end{array} \right\}$ .  $\bar{z}_r$  est un vecteur propre complexe du système initial :

$$\left(\lambda_r^2 \overline{\overline{M}} + \lambda_r \overline{\overline{C}} + \overline{\overline{K}}\right) \bar{z}_r = \bar{0}$$

Multiplions à gauche par le conjugué  $\tilde{z}_r^{t}$ ; on obtient le polynôme de degré 2 en  $\lambda_r$  suivant :

$$\lambda_r^2 \overline{z}_r^{\ t} \,\overline{\overline{M}} \, \overline{z}_r + \lambda_r \overline{z}_r^{\ t} \,\overline{\overline{C}} \, \overline{z}_r + \overline{z}_r^{\ t} \,\overline{\overline{K}} \, \overline{z}_r = 0$$

ou en introduisant les masses ( $m_r > 0$ ), amortissement ( $c_r > 0$ ) et raideurs ( $k_r > 0$ ) généralisées :

$$\lambda_r^2 m_r + \lambda_r c_r + k_r = 0$$

Dans cette équation du second degrés, la somme des racines est négative  $\left(-\frac{c_r}{m_r}\right)$  et le produit est positif ou nul  $\left(\frac{k_r}{m_r}\right)$ . Les racines étant réelles négatives, ou imaginaires possédant une partie réelle négative, il en découle que la stabilité est assurée. En effet,

dans ce cas on aura la présence d'un régime sur-amorti ou critique assurant la stabilité de la solution  $\bar{r} = \bar{Y} e^{\lambda t}$ .

Plaçons nous dans le cas de régimes oscillatoires amortis, dont l'existence implique que le discriminant soit négatif. Ceci est d'autant plus justifié que dans la réalité les amortissements sous souvent faibles :

$$c_r < 2\sqrt{k_r m_r} \Rightarrow \lambda_r = -\alpha_r \pm i\omega_r$$

## 4.2.2 Étude du cas non homogène

Cherchons la solution sous la forme d'une décomposition de modes propres :

$$\bar{r} = \sum_{k=1}^{2n} \eta_k(t) \bar{Y}_k$$

En utilisant cette approximation dans l'équation du système, et en multipliant à gauche par  $\bar{Y}_j^t$ , sous l'action d'une sollicitation extérieure  $\bar{s}(t)$  le système est caractérisé par :

$$\bar{Y}_j^t \,\overline{\overline{\mathcal{A}}} \, \bar{Y}_j \eta_j + \bar{Y}_j^t \,\overline{\overline{\mathcal{B}}} \, \bar{Y}_j \dot{\eta}_j = \bar{Y}_j^t \, s(t)$$

Compte-tenu des relations d'orthogonalité, on doit résoudre 2n équations du premier ordre :

$$-\lambda_{j}\eta_{j}(t) + \dot{\eta}_{j}(t) = \varphi_{j}(t) \qquad \text{avec}$$
$$\lambda_{j} = -\frac{\bar{Y}_{j}^{t}\overline{\overline{\mathcal{A}}}\,\bar{Y}_{j}^{t}}{\bar{\overline{\mathcal{B}}}\,\bar{Y}_{j}^{t}} \quad \text{et} \quad \varphi_{j}(t) = -\frac{\bar{Y}_{j}^{t}\,\bar{s}}{\bar{Y}_{j}^{t}\overline{\overline{\mathcal{B}}}\,\bar{Y}_{j}^{t}}$$

Pour résoudre l'équation normale, on peut la multiplier par  $e^{\lambda_j t}$ :

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{e}^{-\lambda_{j}t}\eta_{j}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda_{j}t}\left(-\lambda_{j}\eta_{j} + \dot{\eta}_{j}\right) = \varphi_{j}(t)\mathrm{e}^{-\lambda_{j}t}$$

ce qui conduit à la solution :

$$\eta_j(t) = e^{\lambda_j t} \left( \int_0^t \varphi_j(\tau) e^{-\lambda_j \tau} d\tau \right) + \eta_j(0)$$

#### 4.2.3 Réponse à une excitation harmonique

Considérons une sollicitation harmonique  $\bar{s}(t) = \bar{s_0} e^{i\omega t}$ , et intéressons nous à la réponse à long terme du système, après que la solution transitoire ait disparu. Cette solution s'écrit en fonction de la partie oscillatoire seule :

$$\eta_j(t) = \mathbf{e}^{\lambda_j t} \left( \int_0^t \varphi_{0j} \, \mathbf{e}^{(i\omega - \lambda_j) \tau} \, d\tau \right) + \eta_j(0)$$

où on a posé  $\varphi_j(t) = \varphi_{0j} e^{i\omega t}$  avec  $\varphi_{0j} = \frac{\bar{Y}_j^t s_0}{\bar{Y}_j^t \overline{\overline{\mathcal{B}}}}$ , donc :

$$\eta_j(t) = \frac{\varphi_{0j} e^{i\omega t}}{i\omega - \lambda_j}$$

En utilisant cette réponse à long terme, on reconstitue la réponse réelle :

$$\bar{r} = \sum_{k=1}^{2n} \eta_k(t) \bar{Y}_k = \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{\bar{Y}_j^t \overline{\overline{\mathcal{B}}} \bar{Y}_j} \frac{\bar{Y}_j \bar{Y}_j^t}{\alpha_j + i(\omega + \omega_j)} + \frac{1}{\bar{Y}_j^t \overline{\overline{\mathcal{B}}} \bar{Y}_j} \frac{\tilde{Y}_j \tilde{Y}_j^t}{\alpha_j + i(\omega - \omega_j)} \right\} \bar{s}_0 e^{i\omega t}$$

Si nous appelons :

$$p_{j} = \overline{Y}_{j}^{t} \overline{\overline{B}} \overline{Y}_{j} \text{ la norme du } j^{i eme} \text{ vecteur propre}$$

$$p_{j} = <\overline{z}_{j}^{t}, \lambda_{j} \overline{z}_{j}^{t} > \begin{bmatrix} \overline{\overline{C}} & \overline{\overline{M}} \\ \overline{\overline{M}} & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} \overline{z}_{j} \\ \lambda_{j} \overline{z}_{j} \end{cases}$$

$$\varphi_{j}(t) = \overline{z}_{j}^{t} \overline{\overline{C}} \overline{z}_{j} + 2\lambda_{j} \overline{z}_{j}^{t} \overline{\overline{M}} \overline{z}_{j}$$

On obtient le développement spectral de la matrice des coefficients d'influence dynamique :

$$\left(\overline{\overline{K}} - \omega^2 \overline{\overline{M}} + i\omega \overline{\overline{C}}\right)^{-1} = \sum_{k=1}^n \bar{Y}_j \left\{ \frac{1}{\alpha_k + i(\omega + \omega_k)} \frac{\bar{z}_j \bar{z}_j^t}{p_k} + \frac{1}{\alpha_k + i(\omega - \omega_k)} \frac{\bar{z}_j \tilde{z}_j^t}{p_k} \right\}$$

Quatrième partie

# Systèmes continus et approximations par des méthodes cinématiques

Nous avons jusqu'à présent étudié des systèmes discrets pour lesquels les fonctions de masse, rigidité et amortissement sont dissociées. Les structures réelles sont pourtant principalement des systèmes continus pour lesquels ces caractéristiques sont confondues. Tous les concepts introduits et développés pour les système discrets restent valables pour les milieux continus. Notamment, dans ces milieux possédant une *infinité de degrés de liberté*, il existe une infinité de modes et pulsations propres associés. Nous cherchons ici à caractériser ces grandeurs de base en posant les problèmes aux valeurs propres, associés à quelques structures simples de type barre et poutre.

Pour cela, dans le chapitre 1 nous allons tout d'abord caractériser de façon générale l'équilibre dynamique d'un milieu 3D conservatif quelconque. Ceci sera ensuite appliqué dans le chapitre 2 au cas particulier des barres, cordes et enfin poutres droites. Dans le chapitre 3 les méthodes d'approximation des vibrations des poutres droites sont exposées, notamment la méthode des éléments finis dans le cas des vibrations libres.

## - 1 -

# Équilibre dynamique des milieux continus

#### Sommaire

1.1	Princi	pe de Hamilton	
1.2	Équations d'équilibre		
1.3	Propagation d'ondes dans un milieu élastique - Notions de base . 11		
	1.3.1	Équations de Navier	
	1.3.2	Ondes élastiques planes	
	1.3.3	Ondes de surface	

## 1.1 Principe de Hamilton

Dans ces systèmes continus le principe de Hamilton établi au 2.2.9 pour des systèmes conservatifs reste bien évidemment valable. On rappel que ce principe est basé sur la minimisation de la fonctionnelle appelée Lagrangien du système, définie comme la différence entre l'énergie cinétique du système et son énergie potentielle extérieure et intérieure. Dans le cas des milieux continus, cette dernière quantité est classiquement appelée énergie de déformation élastique. Le principe de Hamilton s'écrit entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  pour un système continu :

$$\begin{cases} \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\vec{u}, \vec{u}, t) \, dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left( T(\vec{u}, \vec{u}, t) - V_{ext}(\vec{u}) - W(\vec{u}) \right) \, dt = 0, \\ \forall \delta \vec{u}(\vec{x}) \, C.A.(0) \, \text{et } C.I.(0) \end{cases}$$
(4.1.1)

Les relations entre le PPV, le PTV, et le Principe de Hamilton sont explicitées plus en détails en annexe en A-1.6 page A-12. On rappel que le principe de Hamilton s'écrit à partir des potentiels des actions extérieurs et intérieurs, c'est-à-dire du potentiel de déformation pour ce dernier terme. Considérons un milieu continu  $\Omega$  quelconque de masse volumique  $\rho$  supposée constante, tel que représenté sur la figure 4.1.1. Ce milieu est en équilibre sous l'action d'efforts extérieurs volumiques  $f_i$  et surfaciques  $F_i^d$ appliqués sur sa frontière  $\partial \Omega_F$ . Les conditions aux limites cinématiques de ce milieu sont quant à elles appliquées sur la surface  $\partial \Omega_u$  ( $\vec{u}(\vec{x}) = \vec{u}^d(\vec{x})$ ,  $\forall \vec{x} \in \partial \Omega_u$ ) et l'on a les conditions suivantes sur ces deux surfaces complémentaires :  $\partial \Omega_F \cup \partial \Omega_u = \oslash$  et  $\partial \Omega_F \cap \partial \Omega_u = \partial \Omega$ 



FIGURE 4.1.1 – Solide (S) quelconque, occupant un volume  $\Omega$ , en équilibre sous l'action d'efforts extérieurs, et conditions aux limites associées.

Pour ce milieu continu, la densité d'énergie cinétique s'exprime de manière triviale et on définit  $w(\overline{\overline{\epsilon}})$  (éq. 4.1.2b) la *densité d'énergie de déformation* et  $v_{ext}(\vec{u})$  (éq. 4.1.2a) la *densité de potentiel des actions extérieures conservatives* telles que :

$$\exists v_{ext}(\vec{u}) / \begin{cases} \frac{\partial v_{ext}}{\partial \vec{u}} |_{\Omega} = -\vec{f} \quad \left(\delta v_{ext}^{vol}(\vec{u}) = -\delta w_{ext}^{vol}\right) \\ \frac{\partial v_{ext}}{\partial \vec{u}} |_{\partial\Omega_F} = -\vec{F}^d \quad \left(\delta v_{ext}^{surf}(\vec{u}) = -\delta w_{ext}^{surf}\right) \end{cases}$$
(4.1.2a)  
$$\exists w(\overline{\bar{\epsilon}}) / \frac{\partial w}{\partial \overline{\bar{\epsilon}}} = \overline{\bar{\sigma}}(\overline{\bar{\epsilon}}) \quad \left(\delta w = \overline{\bar{\sigma}}(\overline{\bar{\epsilon}}) \, \delta \overline{\bar{\epsilon}}\right)$$
(4.1.2b)

où  $\overline{\sigma}$  est le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff et  $\overline{\overline{\epsilon}}$  est le tenseur des déformations de Green-Lagrange. Sans entrer dans les détails de cette formulation en description Lagrangienne, c'est-à-dire sur la configuration non-déformée, nous nous limitons aux petites perturbations. Dans ce cas le tenseur de Green-Lagrange se réduit à sa partie linéaire classique. L'effet des pré-contraintes par exemple, telle que la pré-tension dans les cordes vibrantes, sera pris en compte ultérieurement pour ces cas spécifiques. Pour les cas généraux que nous traitons ici, le tenseur des déformations est :

$$\overline{\overline{\epsilon}}(\vec{u}) = \frac{1}{2} \left( \overline{\overline{\nabla}} \vec{u} + {}^t \overline{\overline{\nabla}} \vec{u} \right) \quad \text{ou encore, en notation indicielle } \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( u_{i,j} + u_{j,i} \right) \quad (4.1.3)$$

On définit de manière courante l'énergie interne de déformation par l'intégrale du travail fournit par les contraintes dans les déformations correspondantes, ce qui dans le cas de contraintes indépendantes explicitement du temps se ramène au calcul sur le trajet de déformation. L'énergie complémentaire, notée  $w^*(\overline{\sigma})$ , est duale et se définit par l'intégrale sur le trajet de contrainte du travail fournit par les déformations dans le solide. Ces deux grandeurs énergétiques permettent de définir la loi de comportement, relation entre contraintes et déformations. On rappelle de plus, que ces grandeurs sont bornées et égales lorsque le champ de déplacement et le champ de contrainte considérés sont solutions du problème posé :



Loi de comportement et énergies associées.

TABLE 4.1.1 – Définition des énergies de déformation et de déformation complémentaire, et leur signification physique en lien avec la loi de comportement.

On peut maintenant calculer sur le domaine entier les quantités intervenant dans le principe de Hamilton :

$$\begin{cases} V_{ext}(\vec{u}) = \int_{\Omega} v_{ext}^{vol} d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} v_{ext}^{surf} d\Omega_F = -\int_{\Omega} \vec{f}(\vec{x},t) \vec{u}(x,t) d\Omega - \int_{\partial\Omega_F} \vec{F}^d(\vec{x},t) \vec{u}(x,t) d\omega_F \\ V_{int}(\vec{u}) = \int_{\Omega} w(\vec{u}) d\Omega \left( = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \overline{\overline{\sigma}}(\overline{\overline{\epsilon}}) : \overline{\overline{\epsilon}}(\vec{u}) d\Omega \text{ pour un matériau linéaire} \right) \\ T(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\vec{u})^2 d\Omega \end{cases}$$

$$(4.1.4)$$

## 1.2 Équations d'équilibre

Partant des expressions présentées en 4.1.4, le principe de Hamilton (eq. 4.1.1) devient :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\vec{u}, \vec{u}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{\Omega} \left[ \rho \dot{u}_i \, \delta \dot{u}_i - \sigma_{ij}(\overline{\epsilon}) \, \delta \epsilon_{ij}(\vec{u}) + f_i(\vec{x}, t) \, \delta u_i \right] d\Omega + \int_{\partial \Omega_F} F_i(\vec{x}, t) \, \delta u_i \, d\Omega_F \right) dt$$
  
= 0,  $\forall \, \delta \vec{u}(\vec{x}, t) \, C.A.(0) \text{ et } C.I(0)$  (4.1.5)

en utilisant les conditions de vitesses nulles aux instants extrêmes, *i.e.* pour un champ de vitesse C.I.(0), on obtient après intégration par partie en temps du terme inertiel provenant de la variation de l'énergie cinétique :

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho \dot{u}_i \, \delta \dot{u}_i \, dt = \underbrace{[\rho \dot{u}_i \delta u_i]_{t_1}^{t_2}}_{0} - \int_{t_1}^{t_2} \rho \ddot{u}_i \, \delta u_i \, dt$$
(4.1.6)

et la variation de l'énergie de déformation s'écrit classiquement, en remarquant la symétrie du tenseur des déformations et du tenseur des contraintes, et la nullité de la variation des déplacements imposés sur  $\partial \Omega_u$  ( $\delta \vec{u}$  C.A(0)) :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\overline{\overline{\epsilon}}) \, \delta \varepsilon_{ij}(\vec{u}) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\overline{\overline{\epsilon}}) \, \delta u_{i,j} \, d\Omega$$

$$\downarrow \quad \text{Intégration par parties}$$

$$= -\int_{\Omega} \sigma_{ij,j}(\overline{\overline{\epsilon}}) \, \delta u_i \, d\Omega + \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij}(\overline{\overline{\epsilon}}) \, \delta u_i\right)_{,j} \, d\Omega$$

$$\downarrow \quad \text{Ostrogradski} \Leftrightarrow \text{th. de la divergence en}$$

$$= -\int_{\Omega} \sigma_{ij,j}(\overline{\overline{\epsilon}}) \,\delta u_i \,d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} \left(\sigma_{ij}(\overline{\overline{\epsilon}}) \,\delta u_i\right) n_j \,d\Omega_F$$
(4.1.7)

3D

Finalement, en substituant les expressions 4.1.6 et 4.1.7 dans l'expression du principe de Hamilton (eq. 4.1.5), on aboutit à une fonctionnelle faisant intervenir deux quantités distinctes, respectivement dans le solide et sur sa frontière où les efforts sont imposés :

$$\begin{split} \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\vec{u}, \vec{u}, t) \, dt &= \\ \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{\Omega} \left( -\rho \vec{u}_i + \sigma_{ij,j}(\overline{\hat{\epsilon}}) + f_i \right) \, \delta u_i \, d\Omega + \int_{\partial \Omega_F} \left( F_i^d - \sigma_{ij} \, n_j \right) \delta u_i \, d\Omega_F \right) dt \quad (4.1.8) \\ &= 0 \quad , \forall \, \delta \vec{u}(\vec{x}) \, C.A.(0) \text{ et } C.I(0) \end{split}$$

Le champ virtuel étant par définition arbitraire, et compte-tenu des conditions de nullité de ce champ aux instants extrêmes  $t_1$  et  $t_2$ , d'aprés le lemme de l'intégrale nulle, la quantité dans l'intégrale en temps est nulle quelque soit le champ virtuel continu sur  $\Omega$ . Choisissons le champ virtuel non-nul à l'intérieur du solide (4.1.9a) et nul sur sa frontière, puis nul à l'intérieur et non-nul sur sa frontière (4.1.9b). La condition de

nullité est donc satisfaite si et seulement si les équations suivantes sont vérifiées, ce sont les équations caractérisant l'équilibre dynamique :

$$\left\{\vec{u}(\vec{x}) \neq \vec{0}, \forall \vec{x} \in \Omega\right\} \cup \left\{\vec{u}(\vec{x}) = \vec{0}, \forall \vec{x} \in \partial \Omega_F\right\} \Rightarrow \left[\boldsymbol{\sigma}_{ij,j} + f_i = \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\ddot{u}}_i\right] \text{ dans } \Omega \text{ et } \forall (4.1.9a)$$

$$\left\{\vec{u}(\vec{x}) = \vec{0}, \,\forall \vec{x} \in \Omega\right\} \cup \left\{\vec{u}(\vec{x}) \neq \vec{0}, \,\forall \vec{x} \in \partial\Omega_F\right\} \quad \Rightarrow \quad F_i = \mathbf{\sigma}_{ij} \, n_j \text{ sur } \partial\Omega_F \text{ et } \forall t \qquad (4.1.9b)$$

On notera que la condition de minimisation d'Euler-Lagrange est une généralisation du principe de Hamilton à toute fonctionnelle convexe. D'ailleurs on montrera, pour un cas simple, que ces équations d'équilibre se déduisent directement de cette condition de minimisation sans autre calcul.

À partir de ces équations d'équilibre, on peut traiter n'importe quel problème de dynamique de milieux continus. Il faut toutefois noter qu'on aborde souvent de manière distincte deux types de problèmes de dynamique : *propagation d'ondes* et *vibrations*. Dans cette distinction 'fictive' interviennent en premier lieu les propriétés de conduction de ces mouvements (vitesse de propagation), notamment la *célérité* caractérisant l'aptitude du solide à propager ces mouvements entre des points matériels voisins. Selon la vitesse de propagation, les mouvements pourront devenir coopératifs ou non. En général, la vitesse de propagation des ondes est beaucoup plus grande que les vitesses résultant de la vibration des poutres, propagation d'ondes et vibrations peuvent donc assez fréquemment être dissociées lorsque le spectre des sollicitations reste dans des plages connues par avance.

## **1.3 Propagation d'ondes dans un milieu élastique - Notions de base**

Le cas de la propagation des ondes dans un milieu élastique est le plus couramment rencontré : séismes, contrôle non-destructif par ultra-sons, chocs, ... Dans la réalité pourtant, les matériaux peuvent avoir un comportement plastique ou visco-plastique, donc dépendant du temps et/ou du chargement, ce qui complique singulièrement les problèmes. La présence d'interfaces est également un des facteurs clefs de la propagation des ondes, puisque le phénomène de réflexion/réfraction des ondes a lieu pour toute interface géométrique (bord libre) aussi bien que physique (changement de propriétés des matériaux constitutifs). C'est d'ailleurs la base du contrôle non-destructif où des ondes sont émises puis mesurées, l'atténuation de signal étant directement liée à la présence d'interfaces. La difficulté étant dans ce cas de caractériser finement la localisation et le type de ces interfaces.

La propagation des ondes est un domaine spécifique de la dynamique qui n'entre pas dans le cadre de la dynamique des structures que nous abordons plus largement dans ce document. Dans cette partie, nous nous contentons de donner quelques notions de base concernant la propagation des ondes.

#### 1.3.1 Équations de Navier

Dans les équations 4.1.9, nous avons écrit l'équilibre d'un milieu continu en contraintes. En introduisant la loi de comportement du milieu, l'équilibre du système est caractérisé par les équations de Navier. Dans un matériau élastique isotrope, la loi de comportement s'écrit à l'aide de deux constantes matérielles :

— module d'Young E et coefficient de Poisson v :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{pp} \delta_{ij}$$

— <u>ou</u> coefficients de Lamé ( $\lambda$  et  $\mu$ ) :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{pp} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

— <u>ou</u> coefficient de compressibilité hydrostatique k et module de cisaillement  $\mu$ , qui permettent de dissocier partie hydrostatique et cisaillement :

$$\sigma_{ij} = k \varepsilon_{pp} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

avec  $\overline{\overline{e}}$  le tenseur déviateur des déformations et  $k = \lambda + 2\mu/3$ . On rappelle les relations suivantes :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \ \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \ k = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

En introduisant cette loi de comportement dans l'équation d'équilibre intérieur (4.1.9a), on arrive finalement aux équations de Navier :

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + f_i - \rho \ddot{u}_i = 0$$
  
$$\downarrow soit \qquad (4.1.10)$$

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x_j} + f_i - \rho \ddot{u}_i = 0$$

avec les opérateurs laplacien  $\nabla^2 = \Delta$  et divergence  $e = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ .

Les équations régissant la propagation des ondes sont établies. Dans le cas le plus général, les ondes se propagent dans toutes les directions du volume occupé par le milieu continu. Compte-tenu de la complexité des problèmes de propagation des ondes, on peut d'abord se limiter à déterminer l'existence d'ondes particulières. Notamment, en observant les séismes, on définit deux grands types d'ondes. Tout d'abord les *ondes de fond* (volumiques) se produisent, puis les *ondes de surface* sont observées lorsque la surface libre de la croûte terrestre réfléchi une partie de ces ondes volumiques, qui alors interagissent avec les ondes de fond se dirigeant vers la surface. Ces deux types d'ondes sont présentées ci-dessous.

#### **1.3.2** Ondes élastiques planes

Il existe des ondes se déplaçant dans un plan, dont la caractérisation permet de couvrir un ensemble important de cas réels. En écrivant le déplacement sous la forme

$$u_i(\vec{x},t) = u_i(x_1 \pm ct)$$

on peut, à un instant t fixé, décrire le mouvement de tout point en connaissant son abscisse  $x_1$ . Les ondes se propagent dans un plan perpendiculaire à cette direction. On peut illustrer cette forme générale sur des cas particuliers, et pour cela considérer les ondes se propageant lors d'un séisme, et qui peuvent être de deux types. Ce sont d'une part des ondes de compression-traction (figure 4.1.2-a), dites *ondes P*, et d'autre part des ondes induisant du cisaillement dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation (figure 4.1.2-b) dites *ondes S*.



FIGURE 4.1.2 – Illustration des ondes (a) P et (b) S.

#### **Ondes longitudinales**

Ces ondes se propagent dans la direction privilégiée considérée. C'est le cas par exemple lors d'un choc sur un cylindre élancé : les ondes de compression se propagent dans la direction du cylindre. Le mouvement est alors décrit par le champ de déplacement suivant :

$$\begin{cases} u_1 = A \sin\left(\frac{2\pi}{\ell}(x_1 \pm ct)\right) \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

avec *A* l'amplitude et  $\ell$  la longueur d'onde. Enfin *c* est la célérité dans le solide, plus précisément la célérité longitudinale  $c_L = \sqrt{\frac{\lambda + \mu}{\rho}}$  déterminée d'après les équations de Navier (eq.4.1.10). On a donc deux types de propriétés matériaux qui peuvent modifier la vitesse de propagation des ondes : les propriétés mécaniques, et la masse volumique. On notera également qu'intuitivement ce champ de déplacement ne peut générer que des déformations normales car en HPP, seule la déformation  $\varepsilon_{11}$  est non nulle comme l'illustre la figure 4.1.2-a.

#### **Ondes transversales**

On peut aisément imaginer que des déplacements se produisent dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation. Dans ce cas le champ de déplacement est :

$$\begin{cases} u_1 = 0\\ u_2 = A \sin\left(\frac{2\pi}{\ell}(x_1 \pm ct)\right)\\ u_3 = 0 \end{cases}$$

avec cette fois-ci la célérité transverse  $c = c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ . Le plan  $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$  est appelé plan de polarisation. Le déplacement selon  $x_3$  se définit de façon identique. On note que d'après la forme du champ de déplacement seule la déformation de cisaillement  $\varepsilon_{12}$  est non nulle, d'où l'appellation 'S' comme *shear*, le cisaillement dans la langue de Shakespeare.

#### **1.3.3** Ondes de surface

Les ondes planes que nous venons de voir ne peuvent se produire que dans un milieu infini. Dans un milieu de dimensions finies, il existe des réflexions et des réfractions. Pour caractériser ces phénomènes, considérons un milieu semi-infini. Des ondes vont se propager le long du bord libre, sur une faible profondeur. Ce sont ces ondes qui sont, par exemple, enregistrées lors des séismes. Ces ondes de surface peuvent donc être caractérisées par une amplitude décroissante selon la normale à l'interface et peuvent être de deux types : ondes de *Rayleigh* et de *Love*. En sismologie, ces ondes résultent de l'interférence des ondes de fond réfléchies par la surface libre de la croûte terrestre avec les mêmes ondes incidentes provenant du milieu sous-jacent. Les mouvements induits par ces ondes sont illustrés sur la figure 4.1.3 ci-dessous.



FIGURE 4.1.3 – Illustration des ondes (a) de Rayleigh et (b) de Love.

#### **Ondes de Rayleigh**

On considère un milieu semi infini tel que  $x_2 \ge 0$ . Ces ondes sont dites à polarisation elliptique du fait du mouvement produit par les déplacements. C'est notamment le cas pour les vagues qui résultent à la fois de la progression des particules dans la direction de propagation, en même temps qu'un déplacement transverse se produit. Ceci est clairement illustré sur la figure 4.1.3-a. On suppose que le champ de déplacement est d'amplitude décroissante selon la normale au bord libre, et que des ondes longitudinales (selon  $\vec{x_1}$ ) et transverses (selon  $\vec{x_2}$ ) se propagent :

$$\begin{cases} u_1 = A_1 e^{-bx_2} e^{ik(x_1 - ct)} \\ u_2 = A_2 e^{-bx_2} e^{ik(x_1 - ct)} & \text{avec } A_1, A_2 \in \mathbb{C} \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

Les constantes *b* et *k* étant à déterminer, ainsi que les amplitudes  $A_1$  et  $A_2$  qui peuvent être complexes. Les mouvements induits par ces ondes génèrent principalement du cisaillement  $\varepsilon_{12}$ , comme on peut le voir sur l'illustration de la figure 4.1.3-a.

En introduisant ce champ dans les équations de Navier (éq. 4.1.10), on montre que la célérité vérifie :

$$\frac{c^2}{c_T^2} \left[ \frac{c^6}{c_T^6} - 8\frac{c^4}{c_T^4} + c^2 \left( \frac{24}{c_T^2} - \frac{16}{c_L^2} \right) - 16 \left( 1 - \frac{c_T^2}{c_L^2} \right) \right] = 0$$
(4.1.11)

et qu'il existe toujours une racine réelle *c* telle que  $0 < c < c_T$ . Par exemple pour un matériau possédant un coefficient de Poisson v = 0,25,  $c = 0,9194 c_T$ .

#### **Ondes de Love**

Les ondes qui se propagent normalement dans le milieu continu peuvent rencontrer une interface, elles se propagent alors le long de cette interface. Dans notre cas, ces déplacements ont lieu dans la direction perpendiculaire au plan de polarisation (figure 4.1.3-b). Elles sont, dans le cas des tremblements de terre, de même importance que celles de Rayleigh.

Pour exprimer ces déplacements, il faut raisonner à partir de deux milieux continus, notés (1) et (2), possédant une interface commune (figure 4.1.4). Le milieu (1) est situé en surface, le déplacement s'atténue donc lorsqu'on s'éloigne de la surface. Mais du fait de la présence de l'interface les amplitudes vont également augmenter vers cette interface. Par contre pour le milieu 'substrat' les amplitudes vont être maximales à l'interface et décroître en s'éloignant de cette interface. On montre que pour des déplacements nuls dans le plan de polarisation ( $u_1 = u_2 = 0$ ), ces déplacements transverses au plan de polarisation s'écrivent :

$$\begin{cases} u_3 = A e^{-bx_2} e^{ik(x_1 - c_2 t)} \text{ dans } (2) \\ u_3 = \left( B e^{-k'x_2} + B' e^{k'x_2} \right) e^{ik(x_1 - c_1 t)} \text{ dans } (1) \end{cases} \text{ avec } B, B' \in \mathbb{C}$$



FIGURE 4.1.4 – Milieux continus possédant une interface commune.

## - 2 -

## Vibration des poutres et des barres

#### Sommaire

2.1	<b>Introduction</b>		
2.2	Équations de la dynamique des poutres droites à plan moyen 122		
	2.2.1	Équilibre à partir du PPV	
	2.2.2	Équations de Lagrange	
2.3	Barre en extension		
	2.3.1	Équations de Lagrange	
	2.3.2	Écriture directe du principe de Hamilton	
	2.3.3	Modes et fréquences propres de vibration, cas encastré-libre 127	
	2.3.4	Remarque concernant la solution générale	
	2.3.5	Réponse d'une barre sollicitée à son extrémité	
2.4	Vibra	tions transversales d'une corde	
	2.4.1	Équations d'équilibre	
	2.4.2	Corde attachée à ses deux extrémités	
2.5	Vibra	tions libres d'une poutre en flexion simple 135	
	2.5.1	Équations d'équilibre	
	2.5.2	Modes et fréquences propres	

Les équations d'équilibre étant établies pour un milieu continu, nous allons traiter ici les plus simples des milieux continus qui sont les barres et les poutres. Sans entrer dans les détails d'un cours de calcul des structures, ces simplifications géométriques répondent à la nécessité de connaître avec le moins d'efforts possibles la solution de problème réalistes, et donc souvent complexes. En effet, l'utilisation de la MMC, c'està-dire de la mécanique des milieux continus 3D, devient très rapidement inextricable et ne peut répondre aux problèmes de dimensionnement.

## 2.1 Introduction

La notion de *structure* est donc essentielle à l'ingénieur. Par des considérations géométriques, un problème 3D peut se ramener à un problème 2D ou 1D. Notamment, lorsque qu'une des dimensions d'un solide est grande vis à vis des autres, le problème 3D se réduit à un problème dit de *poutre*, tandis que si une des dimensions est très faible devant les deux autres, on se ramène à un problème de plaque pour les cas plans, et de coques pour les solides courbes. Les *barres* quant à elles sont les structures les plus simples, ce sont des poutres ne supportant que de la tension-compression. Pour plus de détails, on consultera des ouvrages de Résistance des Matériau et de Mécanique des Structures, par exemple le cours de Mécanique des Structures / RdM de 2A de S.Drapier.



FIGURE 4.2.1 – Poutre droite à plan moyen, section symétrique.

Considérons la poutre droite telle que représentée sur la figure 4.2.1. L'étude de cette structure se ramène d'abord, par symétrie de la géométrie et des conditions aux limites cinématiques et statiques, à l'étude de son plan moyen. Ensuite, lorsqu'on observe les déplacements des points situés initialement sur une même verticale (en fait appartenant à un même section), on constate que ces points restent alignés. Ils tendent à se déplacer à la façon d'un corps rigide tournant autour du centre de gravité de la section, ce centre de section pouvant se déplacer dans le plan. Dans ce cas le

déplacement de tout point d'une section est complètement décrit par la connaissance des déplacements du centre de section dans le plan et de la rotation de la section autour de la ligne moyenne joignant les centres de gravité de toutes les sections.

Pour les poutres droites à plan moyen, le vecteur des déplacements d'un point M d'une section de la poutre représentée sur la figure 4.2.1 est dans le cadre de la dynamique en HPP :

$$\vec{u}(\vec{x_M},t) = \begin{cases} u_M(\vec{x_M},t) = u(\vec{x},t) - y\phi(\vec{x},t) \\ v_M(\vec{x_M},t) = v(\vec{x},t) \end{cases}$$

Donc les accélérations correspondantes s'écrivent :

$$\vec{\gamma}(\vec{x_M},t) = \begin{cases} \vec{u}_M(\vec{x_M},t) = \vec{u}(\vec{x},t) - \vec{y}\dot{\phi}(\vec{x},t) \\ \vec{v}_M(\vec{x_M},t) = \vec{v}(\vec{x},t) \end{cases}$$

où la notation utilisée est définie par  $\ddot{X} = \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$ . De façon similaire, on définit les dérivées partielles par rapport à  $x, X' = \frac{\partial X}{\partial x}$ .

Finalement, la poutre droite à plan moyen est maintenant complètement représentée par sa ligne moyenne. Le champ de déplacement étant 1D, les conditions aux limites statiques et cinématiques doivent être modifiées en conséquence puisque les points matériels sont maintenant devenus des sections. Par exemple, les contraintes qui règnent dans le matériau ont été remplacées par les efforts internes, décrits par des forces et des moments résultant de l'intégration de  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{xy}$  les seules composantes non nulles du tenseur des contraintes sur la section *S* de normale sortante  $\vec{x}$  (figure 4.2.2) :

effort NORMAL / 
$$\vec{x}$$
:  $N(x,t) = \int_{S(x)} \sigma_{xx}(M,x,t) ds$   
effort TRANCHANT /  $\vec{y}$ :  $T(x,t) = \int_{S(x)} \sigma_{xy}(M,x,t) ds$  (4.2.1)  
moment de FLEXION /  $\vec{z}$ :  $M(x,t) = \int_{S(x)} -y \sigma_{xx}(M,x,t) ds$ 

Pour ce qui est des conditions cinématiques, elles se réduisent aux degrés de liberté des sections, soit deux déplacements plans (u(x),v(x)) et une rotation  $(\phi(x))$ . Pour les efforts imposés, compte-tenu des degrés de liberté, ils sont supposés appliqués sur la ligne moyenne de la poutre grâce au principe de Saint-Venant<sup>1</sup>. Les efforts volumiques sont maintenant des efforts linéiques représentés par trois efforts répartis. Les efforts ponctuels sont remplacés également par un torseur des efforts extérieurs caractérisé par des efforts et moments ponctuels (figure 4.2.2). On notera que ces efforts dépendent maintenant du temps, la dynamique des poutres est donc une extension de la RdM 'classique'.

<sup>1.</sup> Loin de son point d'application, un système d'efforts peut être représenté par son torseur équivalent



FIGURE 4.2.2 – Passage du milieu 3D à la poutre droite : système d'efforts et champ de déplacement virtuel.

## 2.2 Équations de la dynamique des poutres droites à plan moyen

Nous nous intéresserons ici plus particulièrement aux *vibrations libres* des poutres droites à plan moyens chargées dans ce plan (en abrégé *poutres droites*, figure 4.2.1), c'est à dire la réponse vibratoire caractérisée par les *modes* et *pulsation propres*. Comme nous l'avons vu dans le cas des systèmes discrets, ces caractéristiques intrinsèques aux structures considérées dépendent à la fois des caractéristiques mécaniques (rigidité = module d'Young *E*), géométriques (section *S* et moment quadratique par rapport à  $\vec{z} I$ ) et de masse (masse volumique  $\rho_m$ ). Dans la suite de cette partie concernant les barres et poutres, on considérera  $\rho_m$  la masse volumique du milieu constitutif, et  $\rho$  la masse linéique 'apparente' de la poutre telle que  $\rho = \frac{m_u}{S}$  avec  $m_u$  la masse unitaire et *S* la surface de la section transverse. La masse totale est donc  $m = \rho S l$  si les propriétés sont indépendantes de l'abscisse. Cette définition de masse linéique apparente permet de traiter sans modifications complémentaires le cas de sections constituées de matériaux hétérogènes (empilement de composites) ou bien le cas des sections creuses pas exemple.

Dans le cadre de la statique les équations des poutres quelconques peuvent se

déduire, via le Principe des Puissances Virtuelles (et pas le PTV car ici les grandeurs physiques ne peuvent être intégrées simplement dans le temps), de la formulation générale de l'équilibre statique des milieux continus. Dans le cadre de la dynamique, la démarche est similaire. Elle fait cette fois-ci intervenir les accélérations, c'est à dire les variations dans le temps des vitesses de déplacement des sections des poutres. Finalement, on peut également recourir à l'expression du principe de Hamilton ou aux équations de Lagrange. C'est que nous ferons dans les cas particuliers des barres.

#### 2.2.1 Équilibre à partir du PPV

Dans un premier temps, on peut intégrer sur la section de la poutre la puissance virtuelle développée par le terme d'origine inertielle des équations de la dynamique des milieux continus :

$$\int_{\Omega} \rho_m(\vec{x}) \, \vec{u}(\vec{x},t) \, \delta \vec{u}(\vec{x},t) \, d\Omega = \int_0^l \left( \int_S \rho(x) \left[ \left( \vec{u} - y \ddot{\varphi} \right) (\delta u - y \delta \varphi) + \vec{v} \, \delta v \right] dS \right) \, dZ.2)$$
$$= \int_0^l \left( \rho(x) S(x) \vec{u} \delta u + \langle \rho I \rangle \ddot{\varphi} \delta \varphi + \rho(x) S(x) \vec{v} \, \delta v \right) \, dl$$

En substituant cette quantité dans le PPV, on aboutit après intégrations par parties en temps et en espace aux équations d'équilibre dynamique des poutres droites (tableau 4.2.1-b, page 124). Dans la suite, pour alléger les notations et lorsqu'il n'y aura aucune ambiguïté, on notera les valeurs des grandeurs physiques au point  $\vec{x_i}$  avec l'indice *i*, et au temps  $t_i$  par l'exposant (j).

#### 2.2.2 Équations de Lagrange

Dans le cas des poutre droites, les équations de Lagrange peuvent être établies de façon générale. Considérons le cas des poutres de Bernoulli pour lesquelles la rotation des sections est directement égale à v'(x) la pente de la ligne moyenne, c'est-à-dire sans cisaillement possible des sections (voir figure 4.2.1 page 120). Dans nos poutres qui possèdent comme composantes du champ de déplacement u(x), v(x), et v'(x), l'énergie cinétique, l'énergie de déformation, et le potentiel des efforts donnés conduisent à l'expression du principe de Hamilton :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\vec{u}, \vec{u}, t) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_0^l T(\vec{u}, \vec{u}, t) - w(\vec{u}, t) - v_{ext}(\vec{u}, t) dl \right) dt = 0 \quad \forall \ \delta \vec{u}(\vec{x}) \ C.A.(0) \ \text{et} \ C.I(0)$$

avec les énergies par unités de longueur :

$$\begin{cases} T(\vec{u}, \vec{u}, t) = T(u, u', \dot{u}, v, v', v'', \dot{v}, \dot{v}', \dot{v}'') \\ w(\vec{u}, t) = w(u, u', v, v', v'') \\ v_{ext}(\vec{u}, t) = v_{ext}(u, u', v, v', v'') \end{cases}$$

$$(4.2.3)$$

(b)

(a)





1/ Champ C.A. - C.I. .  $u(x_i,t) = u_i^d(t), v(x_i,t) = v_i^d(t), \phi(x_i,t) = \phi_i^d(t), \forall t$ .  $\begin{cases} u(x,t_j) = u^{(j)}, v(x,t_j) = v^{(j)}, \phi(x,t_j) = \phi^{(j)}\\ \dot{u}(x,t_j) = \dot{u}^{(j)}, \dot{v}(x,t_j) = \dot{v}^{(j)}, \dot{\phi}(x,t_j) = \dot{\phi}^{(j)} \end{cases}, \forall \vec{x}$ 

∜

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \vec{u^d}(\vec{x},t)$$
  

$$\forall \vec{x} \in \partial \Omega_u , \forall t$$
  

$$\begin{cases} \vec{u}(\vec{x},t_j) = \vec{u}^{(j)} \\ \vec{u}(\vec{x},t_j) = \vec{u}^{(j)} \end{cases} \forall \vec{x}$$

1/ Champ C.A. - C.I.

2/Équilibre intérieur  $\frac{\partial \sigma_{ij}(\vec{x},t)}{\partial x_j} + f_i(\vec{x},t) = \rho \ddot{u}_i(\vec{x},t)$ 

3/Équilibre au bord  $\sigma_{ij}(\vec{x},t)n_j(\vec{x}) = F_i^d(\vec{x},t)$  $\forall \ \vec{x} \in \partial \Omega_F$ 

4/Loi de comportement  $\sigma_{ij}(x,t) = L_{ijkl} \varepsilon_{kl}(x,t)$ 

2/ Equilibre intérieur  

$$\frac{\partial N(x,t)}{\partial x} + p_x(x,t) = \rho S \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + p_y(x,t) = \rho S \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + T(x,t) + c_z(x,t) = <\rho I > \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2}$$

3/ Équilibre au bord  $N(x_i,t) = N^i(t), T(x_i,t) = T^i(t), M(x_i,t) = M^i(t)$ 

4/ Loi de comportement

$$N(x,t) = ES \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$
$$T(x,t) = kGS\gamma(x,t) \left(\gamma(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} - \phi(x,t)\right)$$
$$M(x,t) = EI \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x}$$

TABLE 4.2.1 – Correspondances des équilibres dynamiques d'un milieu continu et d'une poutre droite à plan moyen chargée dans ce plan.

La variation du lagrangien du système conduit donc à autant d'équations d'équilibre intérieur qu'il existe de composantes du déplacement, et autant de conditions aux limites cinématiques qu'il est nécessaire. Afin d'éviter des calculs trop lourds, nous allons appliquer ceci successivement au cas particulier de la traction et de la flexion des poutres droites.

### 2.3 Barre en extension

Sans entrer dans les détails, une barre en extension se comporte comme un ressort de rigidité égale au module d'Young du matériau constitutif de la barre. Dans ces barres, il est justifié de considérer que seule la déformation normale à la direction de traction est non nulle :  $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ . En conséquence, pour une matériau isotrope la seule contrainte non-nulle du tenseur des contraintes dans la barre sera la contrainte normale  $\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}$ . Le calcul des énergies se déduit directement à partir des expression générales de ces grandeurs (éq. 4.1.4) :

$$W(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{0}^{l} \left( \int_{S} E \varepsilon_{xx} \varepsilon_{xx} dS \right) dl$$
  

$$\downarrow \text{ pour un matériau constitutif constant sur toute la section}$$
  

$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{l} E(x) S(x) \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^{2} dl$$
  

$$T(\dot{u}, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_{m} (\vec{u})^{2} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{0}^{l} \left( \int_{S} \rho_{m} \dot{u}^{2} dS \right) dl$$
  

$$\downarrow \rho(x) \text{ est la masse linéique de la poutre : } \rho(x) = \frac{m_{u}(x)}{S(x)}$$
  

$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{l} \rho(x) S(x) \dot{u}^{2} dl$$
  

$$V_{ext}(u) = -\int_{\Omega} \vec{f}(\vec{x},t) \vec{u}(x,t) d\Omega - \int_{\partial \Omega_{F}} \vec{F}^{d}(\vec{x},t) \vec{u}(x,t) d\Omega_{F}$$
  

$$= -\int_{0}^{l} p_{x}(x,t) u(x,t) dl + R_{0}(t) u_{0}(t) - R_{l}(t) u_{l}(t)$$
  
avec  $p_{x}(x,t)$  un effort linéique et  $R_{i}(t)$  les efforts terminaux

#### 2.3.1 Équations de Lagrange

On rappelle que les équations de Lagrange (éq. 2.2.14) sont de la forme :  $-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right) + \frac{\partial L}{\partial u} = 0$ . Dans le cas des solides étudiés ici, contrairement aux systèmes discrets précédents, *u* représente toutes les formes dérivées en espace des déplacements (ici *u* et *u'*) et  $\dot{u}$  toutes les formes des vitesses dérivées en espace (ici  $\dot{u}$  simplement). De façon plus générale cette condition correspond à l'équation A-3.58 démontrée en Annexe. Dans notre cas, les équations de Lagrange s'écrivent :

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'} = 0 \Rightarrow -\rho(x)S(x)\ddot{u}(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)S(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + p_x(x,t) = 0$$
(4.2.5)

et les conditions aux limites associées (cf Annexes A-3.60) sont :

$$\left(-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u'}}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'}\right)|_{(0,l)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} R_i(t) = E_i S_i \frac{\partial u(x)}{\partial x}|_{x_i} \\ \text{ou} \\ u(x_i,t) = u_i^d(t) \end{cases}, \text{ en } x_i = [0,l] \text{ et } \forall t \\ u(x_i,t) = u_i^d(t) \end{cases}$$
(4.2.6)

complétées des conditions initiales correspondantes :

$$\begin{cases} u(x,t_j) = u(x)^{(j)} \\ \text{et} \\ \dot{u}(x,t_j) = \dot{u}(x)^{(j)} \end{cases}, \ \dot{a} \ t_j = [0,t] \ \text{et} \ \forall x \tag{4.2.7}$$

#### 2.3.2 Écriture directe du principe de Hamilton

Ces équations d'équilibre peuvent également être obtenues, comme nous l'avons fait au début de ce chapitre, à partir du principe de Hamilton. Pour alléger les notations, les dépendances de la masse linéique, de la section et du module d'Young par rapport à x ne sont pas notées :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(u, u', \dot{u}) dt = 0, \,\forall \, \delta u(x) \, C.A.(0) \text{ et } C.I.(0)$$
  
=  $\int_{t_1}^{t_2} \left( \int_0^l \left( \rho \, S \, \dot{u} \, \delta \dot{u} - E \, S \, u' \delta u' + p_x(x, t) \, \delta u \right) \, dl + R_0(t) \, \delta u_0(t) - R_l(t) \, \delta u_l(t) \right) \, dt$ 

 $\downarrow$  en intégrant par parties en temps et en espace

$$= \int_{0}^{l} \left[ \rho S \dot{u} \, \delta u \right]_{t_{1}}^{t_{2}} dl - \int_{t_{1}}^{t_{2}} \left( \int_{0}^{l} \rho S \ddot{u} \, \delta u \, dl \right) dt - \int_{t_{1}}^{t_{2}} \left[ E S \, u' \delta u \right]_{0}^{l} dt + \int_{t_{1}}^{t_{2}} \left( \int_{0}^{l} \frac{\partial}{\partial x} \left( E S \, u' \right) \, \delta u \, dl \right) dt \\ + \int_{t_{1}}^{t_{2}} \left( \int_{0}^{l} p_{x}(x,t) \, \delta u \, dl + R_{0}(t) \, \delta u_{0}(t) - R_{l}(t) \, \delta u_{l}(t) \right) dt \\ = \int_{t_{1}}^{t_{2}} \left( \int_{0}^{l} \left( -\rho S \, \ddot{u} + \frac{\partial}{\partial x} \left( E S \, u' \right) + p_{x} \right) \, \delta u \, dl - \left[ E S \, u' \delta u \right]_{0}^{l} + R_{0}(t) \, \delta u_{0}(t) - R_{l}(t) \, \delta u_{l}(t) \right) dt$$

On arrive finalement aux expressions déduites des équations de Lagrange (éqs. 4.2.5 et 4.2.6). On notera que les propriétés du calcul variationnel permettent d'exprimer plus directement les conditions aux limites que les équations de Lagrange :

à l'intérieur 
$$\rightarrow -\rho(x)S(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)S(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + p_x(x,t) = (4.2.8)$$

en 
$$x = 0$$
 et  $x = l \quad \rightsquigarrow$ 

$$\begin{cases}
R_i(t) = E_i S_i u'_i(t) \\
\text{ou} \\
u(x_i) = u^d_i(t)
\end{cases}$$
(4.2.9)

#### 2.3.3 Modes et fréquences propres de vibration, cas encastré-libre

Le calcul des modes et fréquences propres d'une poutre est très utilisé dans l'analyse vibratoire de ces éléments de structure. Il permet de déterminer la réponse intrinsèque à la structure, c'est à dire qui ne dépend pas des sollicitations extérieures, et qui définit le spectre des fréquences et déformées (modes) qu'il faudra éviter de solliciter si l'on veut que la structure n'ait pas un comportement critique. De plus, comme nous l'avons vu pour les systèmes à  $n \, ddl$ , la résolution dans la base modal réduit considérablement la taille du problème du fait des K et M-orthogonalités des modes propres.

Le calcul de modes propres est notamment utilisé dans le domaine de l'*analyse modale* qui consiste à exprimer le déplacement quelconque d'un structure dans la base (infinie dans le cas des milieux continus) formée par ses vecteurs propres. C'est une technique couramment employée au niveau analytique aussi bien que dans les codes de calculs par éléments finis par exemple. La connaissance de cette base modale permet également d'étudier la stabilité d'une structure soumise à une excitation proportionnelle à un ou plusieurs modes propres.

Pour simplifier la résolution analytique, considérons un poutre de section constante, de matériau constitutif possédant des propriétés également constantes. Choisissons de rechercher, comme dans le cas des systèmes discrets, la solution du problème sous la forme d'une fonction de l'espace en produit avec une harmonique de pulsation  $\omega$  à déterminer :  $u(x,t) = u(x) \cos(\omega t)$ . L'équilibre de cette poutre (éq. 4.2.8) s'écrit alors :

$$ES\frac{d^{2}u(x)}{dx^{2}} + \omega^{2}\rho Su(x) = 0$$
(4.2.10)

ce qui se résout sans difficulté en posant une solution générale du type :  $u(x) = e^{\alpha x}$ . On en déduit alors que l'argument est imaginaire pure et vaut  $\alpha = \pm i\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}$ . En posant  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  la célérité des ondes, le champ de déplacement est harmonique en espace et s'écrit :

$$u(x) = a \sin(\lambda x) + b \cos(\lambda x)$$
 avec  $\lambda = \frac{\omega}{c}$  la longueur d'onde

Considérons pour illustrer ce cas général, le cas encastré en x = 0 et libre en x = l tel que représenté sur la figure 4.2.3 page 129. Les conditions aux limites associées impliquent :

$$\begin{cases} u(0) = 0 \Rightarrow b = 0\\ N(l) = 0 \Rightarrow \cos\lambda l = 0 \Rightarrow \lambda l = \frac{\pi}{2} \pm k\pi \Leftrightarrow \lambda_k = (2k-1)\frac{\pi}{2l}, k \in \mathbb{N}^{*+} \end{cases}$$
(4.2.11)

On en déduit immédiatement la pulsation propre de rang k et le vecteur propre associé. On remarque que la pulsation propre de rang k est liée à cette pulsation  $\lambda_k$  par la célérité c des ondes dans ce solide monodimensionnel : rapport de rigidité et de masse, tout comme dans le cas des pulsations propres calculées pour les systèmes discrets. Comme nous l'avons indiqué au début de cette partie portant sur les milieux continus, la base modale est ici infinie. La solution s'exprime comme la somme de ces modes propres :

$$\omega_{k} = (2k-1)\frac{\pi}{2l}c \operatorname{avec} c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_{k}(x)\cos(\omega_{k}t) \qquad (4.2.12)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k}\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2l}x\right)\cos\left((2k-1)\frac{\pi}{2l}ct\right)$$

#### 2.3.4 Remarque concernant la solution générale

On notera que la recherche de la solution de l'équilibre (éq. 4.2.10) doit se faire, en toute rigueur, en partant d'un champ de déplacement plus complet, et c'est seulement lorsque les conditions initiales sont prises en compte que la solution se réduit à la forme proposée ci-dessus pour rechercher la solution et qui ne contient qu'une seule harmonique  $u(x,t) = u(x) \cos(\omega t)$ . En effet, la recherche de la solution générale peut se faire en partant d'un champ du type  $u(x,t) = \psi(x)\eta(t)$ . Cette méthode est appelée méthode de Bernoulli. On montre alors, par séparation des variables, que le système à résoudre (éq. 4.2.8) peut s'écrire en introduisant les constantes  $\lambda^2 = \omega^2 \frac{\rho}{E}$ :

$$Eu'' - \rho \ddot{u} = 0$$
  

$$\hookrightarrow \frac{d^2\beta}{dx^2}(x)\eta(t) = \frac{\rho}{E}\beta(x)\frac{d^2\eta}{dt^2}(t)$$
  

$$\hookrightarrow \frac{d^2\beta}{dx^2}(x)\frac{1}{\beta(x)} = \frac{\rho}{E}\frac{d^2\eta}{dt^2}(t)\frac{1}{\eta(t)}$$
  

$$\downarrow \text{ seule solution, un terme constant négatif}(-\lambda^2)$$

$$\frac{d^2\beta}{dx^2}(x) = -\lambda^2\beta(x) \text{ et } \frac{d^2\eta}{dt^2}(t) = -\frac{E}{\rho}\lambda^2\eta(t) = -\omega^2\eta(t)$$

La résolution de ces équations conduit à des solutions purement harmoniques en espace et en temps. La solution générale s'écrit donc :

$$u(x,t) = (A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x) (B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t)$$
(4.2.13)

où  $\lambda$  et  $\omega$  sont respectivement les pulsations en espace et en temps, et  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ , et  $B_2$  sont des constantes, dont trois seront déterminées à l'aide des conditions initiales et des conditions aux limite cinématiques. En effet, les valeurs et modes propres étant définis à une constante prés, une des constantes reste indéterminée en l'absence de chargement. Ceci peut être rapproché de l'existence physique de ces modes propres définis à un mouvement de corps rigide prés. La condition initiale de déplacement nul n'a donc pas besoin d'être vérifiée. Par contre, lorsque la barre est soumise à une

sollicitation extérieure, cette condition est nécessaire, elle assure de pouvoir induire des déformations dans la barre sous l'action de la sollicitation extérieure.

Dans le cas de vibrations libres traité ci-dessus (éq. 4.2.12), la constante  $B_2$  est nulle car implicitement la condition initiale de vitesse nulle  $\dot{u}(x,0) = 0$  a été considérée.

#### 2.3.5 Réponse d'une barre sollicitée à son extrémité

Considérons maintenant le cas de la même barre encastré-libre, telle que représentée sur la figure 4.2.3, chargée à son extrémité x = l par un effort terminal P(t) qui peut être fonction du temps. Le problème se pose de la façon suivante :





FIGURE 4.2.3 – Barre soumise à un effort terminal.

On peut identifier principalement deux méthodes susceptibles de fournir une solution rapidement à ce problème. En premier le recours aux *transformées de Laplace*, et en second lieu la *projection dans la base modale*. C'est cette dernière technique que nous retenons. Pour résoudre ce problème, la difficulté porte sur la prise en compte de conditions aux limites constantes ou variables dans le temps alors que la solution varie dans le temps mais pas forcément avec les mêmes temps caractéristiques. Cette difficulté est traitée en recourant à une analogie avec les séries de Fourier.

La technique de projection dans la base modale consiste, comme dans le cas des systèmes discrets, à exprimer la solution dans la base modale que nous venons d'identifier (éq. 4.2.12). Considérons une forme du champ de déplacement composée d'un terme dit *quasi-statique* et de la projection dans la base modale. L'introduction du terme quasi-statique assure ici que la solution statique peut être reproduite sans recourir à un nombre élevé de modes dans la décomposition modale :

$$u(x,t) = u_{qs}(x,t) + \sum_{s=1}^{\infty} \eta_s(t) \, u_s(x)$$
(4.2.15)

avec les  $\eta_s(t)$  les fonctions inconnues recherchées, et les  $u_s(x)$  les modes normés par rapport à la masse :

$$u_s(x) = \sqrt{\frac{2}{m}} \sin\left((2s-1)\frac{\pi x}{2l}\right) = \alpha \sin\left(\lambda_s x\right), s = 1, \dots, +\infty$$

Ces modes sont normés tels que, par analogie avec la masse généralisée définie pour le systèmes discrets, on ait :

$$\int_0^l \rho \, S \, u_r(x) \, u_r(x) \alpha^2 \, dl = \frac{\alpha^2 \rho \, S \, l}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{2}{m}}$$

Le terme quasi-statique est quant à lui solution du problème statique :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_{qs}}{\partial x^2} = 0, \quad \forall x \\ E S \frac{\partial u_{qs}}{\partial x} \mid_{(x=l)} = P(t) \text{ et } u_{qs}(0,t) = 0 \end{cases} \Rightarrow u_{qs} = \frac{P(t) x}{E S}$$

d'où la forme du champ de déplacement (éq. 4.2.15) :

$$u(x,t) = \frac{P(t)x}{ES} + \sum_{s=1}^{+\infty} \alpha \sin(\lambda_s x) \eta_s(t)$$
(4.2.16)

#### Projection dans la base modale

À partir de cette expression, on procède comme dans le cas des systèmes discrets pour trouver les fonctions inconnues  $\eta_s(t)$ , à savoir, pour P(t) donné :

introduire la forme du champ de déplacement 4.2.16 dans l'équation d'équilibre
 4.2.14a

$$\hookrightarrow \sum_{s=1}^{+\infty} \left[ c^2 \lambda_s^2 \sin(\lambda_s x) \eta_s(t) + \sin(\lambda_s x) \ddot{\eta}_s(t) \right] = 0$$

— multiplier par  $u_r(x)$ :

$$\hookrightarrow \alpha \sin(\lambda_r x) \eta_r(t) \sum_{s=1}^{+\infty} \left[ c^2 \lambda_s^2 \sin(\lambda_s x) \eta_s(t) + \sin(\lambda_s x) \ddot{\eta}_s(t) \right] = 0$$

— utiliser les relations d'orthogonalité des modes pour exprimer des équations en  $\eta_r(t)$  pour chaque rang r:

$$\hookrightarrow c^2 \lambda_r^2 \sin^2(\lambda_r x) \eta_r(t) + \sin^2(\lambda_r x) \ddot{\eta}_r(t) = 0, \forall r = 1, \dots, +\infty$$

— intégrer ces équations différentielles  $\rightarrow$  fonctions  $\eta_r(t)$  connues  $\rightarrow$  déplacement u(x,t):

$$\hookrightarrow \int_0^l \sin^2(\lambda_r x) \, dl = \frac{l}{2}, \, \forall r = 1, \dots, +\infty$$
  
$$\hookrightarrow \boxed{c^2 \lambda_r^2 \eta_r(t) + \ddot{\eta}_r(t) = 0, \forall r = 1, \dots, +\infty} \quad \text{à résoudre}$$

la solution sera, comme noté précédemment, du type :

$$\eta_r(t) = A_r \cos\left(\lambda_r \, c \, t\right) + B_r \sin\left(\lambda_r \, c \, t\right) \tag{4.2.17}$$

les constantes étant déterminées à l'aide des conditions initiales.

#### Prise en compte des conditions initiales

L'intégration de ces r équations indépendantes nécessite de prendre en comptes les conditions initiales données en 4.2.14b. Pour simplifier le problème, considérons une sollicitation de type échelon :

$$P(t) = \begin{cases} 0 \text{ à } t = 0\\ p_0 \text{ à } t > 0 \end{cases}$$

Le solution quasi-statique est donc :

$$u_{qs} = \frac{p_0 x}{ES} \qquad \forall t > 0$$

Pour déterminer les constantes d'intégration, écrivons les conditions initiales en écrivant le champ de déplacement complet à l'aide de la forme de  $\eta_r(t)$  (éq. 4.2.17) :

$$u(x,0) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{p_0 x}{E S} + \sum_{s=1}^{+\infty} \alpha A_s \sin(\lambda_s x) = 0 \rightarrow \text{ condition de Cauchy}(4.2.18)$$

$$\dot{u}(x,0) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \sum_{s=1}^{+\infty} -\lambda_r \, c \, \alpha B_s \, \sin\left(\lambda_s \, x\right) = 0 \Rightarrow B_s = 0 \tag{4.2.19}$$

Finalement, les conditions initiales conduisent à une somme infinie de termes  $A_s$  à déterminer. Pour prendre en compte cette condition, dite également *condition de Cauchy*, il est courant de faire une analogie avec les séries de Fourier. On rappelle que la forme d'une série de Fourier pour une fonction à valeur réelle est :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \text{ où } a_n, b_n \in \mathbb{R} \text{ si } f(x) \text{ réel}$$
  
et 
$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \, dx \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \, dx \end{cases}$$
(4.2.20)

Dans notre cas, la condition 4.2.18 conduit à une forme similaire aux termes paires de la série de Fourier ci-dessus (4.2.20). Par analogie,  $\alpha A_s \leftrightarrow b_n$ , les coefficients de  $\eta_r(t)$  peuvent être calculés à l'aide de la forme ci-dessus (4.2.20). Si nous exprimons de façon générale les conditions initiales en position ( $\varphi(x)$ ) et en vitesse ( $\psi(x)$ ), les constantes d'intégration de la solution  $\eta_r(t)$  se calculent :

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \rightsquigarrow A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin(\lambda_n x) dx \\ \dot{u}(x,0) = \psi(x) \rightsquigarrow B_n = \frac{2}{\lambda_n l c} \int_0^l \psi(x) \sin(\lambda_n x) dx \end{cases}$$
(4.2.21)

Dans notre cas, les calculs donnent :

$$\alpha A_s = -\frac{2}{l} \int_0^l \frac{p_0 x}{ES} \sin(\lambda_n x) dx$$
  
=  $\frac{-2p_0}{ESl} \left[ \frac{1}{\lambda_s^2} \underbrace{\sin\left((2s-1)\frac{\pi x}{2l}\right)}_{\left\{\begin{array}{l} -1 \text{ si } s \text{ pair} \\ +1 \text{ si } s \text{ impair} \end{array} \right]_0^l$   
=  $\frac{-2p_0}{ESl} \underbrace{(-1)^{(s-1)}}_{\lambda_s^2}$ 

d'où l'expression des fonctions du temps :

$$\eta_r(t) = -\frac{p_0}{ES} \frac{8l}{\pi^2 \alpha} \frac{(-1)^{(r-1)}}{(2r-1)^2} \cos\left((2r-1)\frac{\pi}{2l}ct\right)$$

et la solution générale s'écrit :

$$u(x,t) = \frac{p_0 x}{ES} - \frac{8 p_0 l}{\pi^2 ES} \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{(2s-1)^2} \sin\left((2s-1)\frac{\pi}{2l}x\right) \cos\left((2s-1)\frac{\pi}{2l}ct\right)$$
(4.2.22)

#### 2.4 Vibrations transversales d'une corde

Le cas des cordes vibrantes est un cas intermédiaire entre les barres et les poutres, ces structures peuvent en effet se déplacer dans le sens transverse à leur ligne moyenne, sans toutefois posséder de rigidité de flexion. Dans ce cas, on relie l'effort de traction qui règne dans la corde au déplacement transverse correspondant.

#### 2.4.1 Équations d'équilibre

#### Cinématique

Dans une corde, la déformation normale est la seule composante non nulle du tenseur des déformations. Cette déformation est directement reliée au déplacement transverse qui tend, à longueur de corde constante, à générer des efforts de traction. Elle s'exprime assez simplement en partant de considérations géométriques telles que représentées sur la figure 4.2.4.

La déformation de membrane correspond à l'allongement d'une longueur élémentaire sous l'action du déplacement transverse. Elle se calcule comme la différence de la longueur de l'abscisse curviligne ds mesurée à l'état final et de la longueur élémentaire dX initiale. En HPP, les longueurs élémentaires dx et dX sont confondues, on a alors :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{ds - dx}{dx}$$


FIGURE 4.2.4 – Corde attachée à ses extrémités

La longueur *ds* s'exprime donc en fonction du déplacement que subit la ligne moyenne de la corde et de la longueur projetée sur la configuration déformée. Cette longueur s'écrit :

$$ds^{2} = dx^{2} + dv^{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^{2} = 1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^{2}} \simeq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^{2}$$
soit  $\epsilon_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^{2}$ 

Cette démonstration peut également être menée à l'aide de la forme générale du tenseur des déformations de Green-Lagrange, incluant la partie non-linéaire, c'est-àdire les effets du second ordre. Ce terme de déformation dans les cordes est le terme de *rotation modérée* utilisé notamment pour étudier les phénomènes de flambage en compression dans les poutres. Ce terme permet, en HPP, de prendre en compte l'effet non-linéaire géométrique produit par un effort normal appliqué sur une configuration déformée. Dans ce cas, on montre que l'énergie de déformation peut s'écrire en fonction de l'effort considéré. Dans notre cas, l'énergie de déformation peut être vue comme un potentiel de pré-contrainte, induit sous l'action d'un effort  $N_0$  qui règne dans toute la corde, et s'écrit :

$$W(u) = V_{precontrainte} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{0}^{l} N_0 \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \, dl \tag{4.2.23}$$

car l'effort de pré-tension ne dépend pas de la déformation. C'est une des particularités des cordes, par rapport aux poutres par exemple, où les efforts intérieurs dépendent des déformations.

### **Expressions des énergies**

Connaissant l'expression de la déformation unique, on peut exprimer les énergies.

$$T(\dot{u}, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_m \left(\vec{u}\right)^2 d\Omega = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\int_S \rho_m \dot{v}^2 \, dS\right) \, dl$$
  

$$\downarrow \quad \rho(x) \text{ est la masse linéique de la poutre : } \rho(x) = \frac{m_u(x)}{S(x)}$$
  

$$= \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) S(x) \, \dot{v}^2(x, t) \, dl$$
  

$$V_{ext}(u) = -\int_{\Omega} \vec{f}(\vec{x}, t) \vec{u}(x, t) \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_F} \vec{F}^d(\vec{x}, t) \vec{u}(x, t) \, d\Omega_F$$
  

$$= -\int_0^l p_y(x, t) \, v(x, t) \, dl + R_0(t) \, v_0(t) - R_l(t) \, v(t)$$
  
avec  $p_y(x, t)$  un effort linéique et  $R_i(t)$  les efforts terminaux

### Équations d'équilibre

Par application du principe de Hamilton, par exemple, on obtient les équations caractérisant l'équilibre de la corde :

à l'intérieur 
$$\rightsquigarrow -\rho(x) S(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( N_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right) + p_y(x,t) = 0$$
  
en  $x = 0$  et  $x = l \quad \rightsquigarrow \quad R_i(t) = N_0$  ou  $v(x_i,t) = v_i^d(t)$ 

# 2.4.2 Corde attachée à ses deux extrémités

Considérons le cas de la corde représentée sur la figure 4.2.4. Cette corde est attachée à ses extrémités et ses propriétés sont constantes le long de son abscisse. Si on recherche la solution sous la forme classique  $v(x,t) = v(x)\cos(\omega t)$  où  $\omega$  est la pulsation propre du système à déterminer, le problème s'écrit alors :

à l'intérieur 
$$\rightsquigarrow N_0 v''(x) + \omega^2 \rho S v(x) = 0$$
 (4.2.25a)

$$\operatorname{en} x = 0 \operatorname{et} x = l \quad \rightsquigarrow \quad v(x_i, t) = 0 \tag{4.2.25b}$$

$$\dot{\mathbf{a}} t = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, 0) = 0 \tag{4.2.25c}$$

On résout l'équilibre intérieur avec un méthode similaire à celle employée pour la barre en extension chargée à son extrémité. On pose  $\lambda^2 = \frac{\omega^2 m_u}{N_0}$ , ce qui conduit à la solution générale  $v(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)$ . La prise en compte des conditions cinématiques implique :

$$\begin{cases} \omega_k = \frac{k\pi}{l} \sqrt{\frac{N_0}{m_u}} = \frac{k\pi}{l} c \text{ en posant } c^2 = \frac{N_0}{m_u}, \quad k \in \mathbb{N}^{*+} \\ v_k(x) = A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \end{cases}$$
(4.2.26)

Comme dans le cas de la barre chargée en extension, cherchons la solution de cette corde abandonnée sans vitesse à l'instant t = 0 avec une déformée linéaire, correspondant à une corde pincée en son centre. Les conditions initiales sont donc, en utilisant les notations des conditions de Cauchy (éqs. 4.2.21) :

$$- \dot{v}(x,0) = 0 \rightsquigarrow \Psi(x) = 0$$

$$- v(x,0) = v(x)^{(0)} \rightsquigarrow \varphi(x) = \begin{cases} \frac{2v_0}{l}x \text{ si } 0 \le x \le \frac{l}{2} \\ 2v_0\left(1 - \frac{x}{l}\right) \text{ si } \frac{l}{2} \le x \le l \end{cases}$$

ce qui conduit après calculs au champ de déplacement :

$$v(x,t) = \frac{8v_0}{\pi^2} \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{(2s+1)}{2}}}{s^2} \left[ \sin\left(\frac{s\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{s\pi}{l}ct\right) \right]$$

Remarque : la solution est ici entièrement déterminée par l'amplitude  $v_0$  de la précontrainte. De plus, on notera que les harmoniques de rang paire sont absentes du fait que l'on a imposé initialement un ventre au milieu de la corde.

# 2.5 Vibrations libres d'une poutre en flexion simple

Nous étudions plus spécifiquement les vibrations libres d'une poutre en flexion simple. Afin de faciliter l'approche, les déformations de cisaillement seront négligées, ce qui est justifié dans la plupart des poutres constituées de matériaux homogènes. Dans ce cadre, la flexion de la poutre se traduit par la rotation des sections droites autour de leur centre de gravité. Ceci a pour effet de générer des déplacements des points de la section qui sont proportionnels à l'altitude de ce point. Il en résulte bien évidemment un déplacement de la ligne moyenne v(x,t), mais aussi un déplacement  $u(x) = -y \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$ . Ceci est illustré sur la figure 4.2.1 page 120. En conséquence, seules la déformations de flexion  $\varepsilon_{xx} = -y \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$  sont non nulles. Le chargement appliqué sur cette poutre en flexion simple peut être ponctuel ou réparti (par unité de longueur, composé d'efforts et de moments, conformément à la représentation de la figure (b) du tableau 4.2.1 page 124).

# 2.5.1 Équations d'équilibre

### **Expression des énergies**

En procédant, comme précédemment, par intégration des quantités sur la section (éqs. 4.2.4) en utilisant ce champ de déplacement, on aboutit à :

$$\begin{split} W(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{0}^{l} \left( \int_{S} E y^{2} \frac{\partial^{2} v(x,t)}{\partial x^{2}} \frac{\partial^{2} v(x,t)}{\partial x^{2}} dS \right) dl \\ &\downarrow \text{ pour un matériau constitutif constant sur toute la section} \\ &= \frac{1}{2} \int_{0}^{l} E(x) I(x) \left( \frac{\partial^{2} v(x,t)}{\partial x^{2}} \right)^{2} dl \\ T(\dot{u}, u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_{m} (\vec{u})^{2} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{0}^{l} \left( \int_{S} \rho_{m} \left[ y^{2} \left( \frac{\partial \dot{v}(x,t)}{\partial x} \right)^{2} + \dot{v}^{2} \right] dS \right) dl \\ &\downarrow \rho(x) \text{ est la masse linéique de la poutre telle que } \rho(x) = \frac{m_{u}(x)}{S(x)} \\ &= \frac{1}{2} \int_{0}^{l} \left( < \rho I > \left( \frac{\partial \dot{v}(x,t)}{\partial x} \right)^{2} + \rho(x) S \dot{v}^{2}(x,t) \right) dl \\ V_{ext}(u) &= -\int_{\Omega} \vec{f}(\vec{x},t) \vec{u}(x,t) d\Omega - \int_{\partial \Omega_{F}} \vec{F}^{d}(\vec{x},t) \vec{u}(x,t) d\Omega_{F} \\ &= -\int_{0}^{l} \left( p_{y}(x,t) v(x,t) + c_{z}(x,t) v'(x,t) \right) dI - [T_{i}(t) v_{i}(t) + M_{i}(t) v'_{i}(t)]_{0}^{l} \\ \text{ avec } p_{y}(x,t) \text{ et } c_{z}(x,t) \text{ le chargement réparti, } T_{i}(t) \text{ et } M_{i}(t) \text{ le chargement ponctuel} \\ (4.2.27) \end{split}$$

# Équations d'équilibre

Par application du principe de Hamilton ou des équations de Lagrange, on en déduit les équations de l'équilibre intérieur et de l'équilibre au bord. Par souci de simplification des expressions, on ne notera pas la dépendance des propriétés géométriques et matérielles par rapport à x:

à l'intérieur 
$$\rightsquigarrow \rho S \ddot{v}(x,t) - \frac{\partial}{\partial x} \left( < \rho I > \frac{\partial \ddot{v}(x,t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E I \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right)$$
  

$$= p_y(x,t) - \frac{\partial c_z(x,t)}{\partial x}$$
en  $x = 0$  et  $x = l \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} T_i(t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( E I \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right) |_{x_i} & \text{ou} \quad v(x_i,t) = v_i^d(t) \\ M_i(t) = E I \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} |_{x_i} & \text{ou} \quad v'(x_i,t) = v_i'^d(t) \end{cases}, \forall t$ 

On montre par ailleurs que le terme inertiel relatif à  $\vec{z}$  ( $\rho I \vec{v'}(x,t)$ ) peut être négligé devant les effets engendrés par l'accélération due au déplacement transverse ( $\rho S \vec{v}(x,t)$ ) pour les harmoniques de rang faible. Si de plus les propriétés géométriques et matérielles

sont constantes selon l'abscisse x, le problème s'écrit :

à l'intérieur 
$$\rightsquigarrow \rho S \ddot{v}(x,t) + E I \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} = p_y(x,t) - \frac{\partial c_z(x,t)}{\partial x} (4.2.28a)$$
  
en  $x = 0$  et  $x = l$ ,  $\forall t \implies \begin{cases} T_i(t) = E I \frac{\partial^3 v(x,t)}{\partial x^3} |_{x_i} & \text{ou } v(x_i,t) = v_i^d(t) \\ (4.2.28b) \\ M_i(t) = E I \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} |_{x_i} & \text{ou } v'(x_i) = v_i'^d(t) \end{cases}$   
à  $t = 0$ ,  $\forall x \implies \begin{cases} v(x,0) = v(x)^{(0)} \text{ et } \dot{v}(x,0) = \dot{v}(x)^{(0)} \\ v'(x,0) = v'(x)^{(0)} \text{ et } \dot{v}'(x,0) = \dot{v}'(x)^{(0)} \end{cases}$ 
(4.2.28c)

## 2.5.2 Modes et fréquences propres

Á partir des équations d'équilibre établies pour les poutres droites de manière générale, (tableau 4.2.1 page 124), on peut également formuler facilement cet équilibre. En HPP, dans le cadre de la flexion seules les équations d'équilibre relativement aux vecteurs  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  de la base de référence sont utilisées. Le système à résoudre s'écrit finalement en combinant les 2 équations d'équilibre  $\left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \rho S \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}, \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + T(x,t) = 0\right)$ :

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{EI}{\rho S} \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4}$$

On peut rechercher la solution de ce problème spatio-temporel sous la forme découplée suivante  $v(x,t) = \psi(x)\eta(t)$ . En désignant par  $\omega$  la pulsation propre du système, le problème (éq. 4.2.28a) se met sous la forme d'une équation différentielle à variables séparables (éq. 4.2.29) où  $\lambda^4 = \omega^2 \frac{\rho S}{EI}$  est une constante positive :

$$\underbrace{\frac{d^4\Psi(x)}{dx^4} = \lambda^4\Psi(x)}_{(I)} \qquad \underbrace{\frac{d^2\eta(t)}{dt^2} + \omega^2\eta(t) = 0}_{(II)} \qquad (4.2.29)$$

Les racines de l'équations caractéristiques en  $\lambda$  sont réelles et imaginaires pures par paire. La solution générale s'écrit alors sous la forme :

$$v(x,t) = (B_1 \sin \lambda x + B_2 \cos \lambda x + B_3 \sinh \lambda x + B_4 \cosh \lambda x) A \cos (\omega t - \varphi)$$

### Poutre sur appuis simples

La poutre considérée repose cette fois sur 2 appuis simples, comme indiqué sur la figure 4.2.5. Les conditions aux limites cinématiques sont dites 'articulées'.

Dans ce cas, la prise en compte des conditions aux limites cinématiques conduit à l'existence d'une infinité de pulsations propres. La  $n^{ieme}$  pulsation propre du système



FIGURE 4.2.5 – Poutre droite sur appui simple.

est :

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$
(4.2.30)

La solution exacte de ce problème est la somme des solutions particulières de rang n, et s'écrit sous la forme :

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left( A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \right)$$

où les  $A_n$  et  $B_n$  sont des constantes (incluant donc  $B_1$ ) déterminées grâce aux conditions initiales (à t = 0), dites également conditions de Cauchy (cf éq. 4.2.21). Généralement, la vitesse initiale est supposée nulle ( $\Psi(x) = 0 \Rightarrow B_n = 0$ ), et la condition sur les déplacements est prise proportionnelle à la déformée statique ( $\varphi(x) = Cv_0(x)$ ). Ce type de conditions initiales conduit à une solution de la forme :

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} A'_n(C,n) \cos \omega_n t$$

c'est-à-dire définie à une constante multiplicative prés, les modes propres étant également définis à une constante prés.

#### Poutre bi-encastrée

Dans le cas où la poutre est bi-encastrée (figure 4.3.10), les pulsations propres ne peuvent plus être déterminées analytiquement du fait de la relation trigonométrique qui découle des conditions aux limites cinématiques :  $\cos \alpha l = \frac{1}{\cosh \alpha l}$ . On considère dans ce cas l'approximation suivante pour n > 3 :

$$\omega_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = (2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$
(4.2.31)

La solution générale des vibrations libres étant connue, un calcul d'analyse modale permettra, par exemple, de connaître facilement la réponse de la structure à une sollicitation générale. Par exemple, si la poutre étudiée est sollicitée en son milieu par une impulsion, les modes propres pairs ne seront pas "actifs", car le déplacement résultant ne pourra être qu'impair : pas de point d'inflexion au centre, sous la charge.

### Poutre encastrée-libre - méthode générale



FIGURE 4.2.6 – Poutre droite encastrée-libre en flexion.

Considérons la même poutre en flexion, mais avec cette fois une extrémité x = 0 encastrée et l'autre extrémité x = l libre, telle que représentée sur la figure 4.2.6. Dans ce cas, les conditions aux limites ne sont plus symétriques, ce qui rend le problème plus complexe à résoudre.

Cherchons la solution sous la forme classique :  $v(x,t) = v(x) \sin \omega t$ . Posons le problème de flexion propre sous forme adimensionnalisé qui se déduit de 4.2.28a :

$$\Psi^{(4)}(x) - \lambda^4 \Psi(x) = 0 \text{ avec } \begin{cases} \xi = \frac{x}{l} \\ \Psi(x) = \frac{\nu(x)}{l} \end{cases}$$
(4.2.32)

avec comme précédemment  $\lambda^4 = \omega^2 \frac{\rho S l^4}{EI} = \omega^2 \frac{m l^3}{EI}$ , la longueur intervenant ici du fait de l'adimensionnalisation des variables. Comme précédemment, si on cherche des solutions du type  $\Psi(x) = e^{p\xi}$ , on aboutit à l'expression générale déjà rencontrée :

$$\Psi(x) = A_1 \sin(\lambda \xi) + A_2 \cos(\lambda \xi) + A_3 \sinh(\lambda \xi) + A_4 \cosh(\lambda \xi)$$

 $\downarrow$  ou en utilisant les fonctions de Ducan

$$\begin{cases} s_1(\lambda\xi) = \sin(\lambda\xi) + \sinh(\lambda\xi) \\ c_1(\lambda\xi) = \cos(\lambda\xi) + \cosh(\lambda\xi) \\ s_2(\lambda\xi) = -\sin(\lambda\xi) + \sinh(\lambda\xi) \\ c_2(\lambda\xi) = -\cos(\lambda\xi) + \cosh(\lambda\xi) \\ \hookrightarrow \Psi(x) = B_1 s_1(\lambda\xi) + B_2 c_1(\lambda\xi) + B_3 s_2(\lambda\xi) + B_4 c_2(\lambda\xi) \end{cases}$$

Les solutions sont alors connues. Traitons par exemple le cas encastré-libre. Les conditions aux limites cinématiques permettent de résoudre :

en 
$$x = 0$$
 encastrement : $\psi(0) = 0$  et  $\psi'(0) = 0 \rightarrow B_2 = \lambda B_1 = 0$   
en  $x = 1$  bord libre : $\psi''(1) = 0$  et  $\psi'''(1) = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} s_1(\lambda) & c_1(\lambda) \\ \lambda c_1(\lambda) & \lambda s_2(\lambda) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 

Pour cette dernière condition, la solution  $\lambda = 0$  n'est pas acceptable, car le déplacement correspondrait à un mouvement de corps rigide. Il faut donc avoir un déterminant nul pour ce système, ce qui conduit à :

$$s_1(\lambda)s_2(\lambda) - c_1^2(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\cos\lambda l = \frac{1}{\cosh\lambda l}$$
 (4.2.33)

que l'on résout numériquement (figure 4.2.7). On trouve la première solution  $\lambda_1 = 1,8751$  et  $\omega_1^2 = 12,36 \frac{EI}{ml^3}$ . Quelles que soient les conditions aux limites, on arrive à une équation de type semblable. Les pulsations propres de la poutre sont présentées dans le tableau 4.2.2 pour différents cas de conditions aux limites.



FIGURE 4.2.7 – Tracés des fonctions utilisées pour résoudre l'équation 4.2.33

Conditions any limites	Pulsation $\lambda_n$				
Conditions aux minites	n = 1	n = 2	<i>n</i> = 3	<i>n</i> > 3	
libre-libre	0	4,730	7,853	$(2n-1)\frac{\pi}{2}$	(aprox.)
libre-guidée	0	2,365	5,498	$(4n-5)\frac{\pi}{2}$	(approx.)
libre-articulée	0	3,927	7,069	$(4n-3)\frac{\pi}{4}$	(approx.)
guidée-guidée	0	3,142	6,283	$(n-1)\pi$	(exact)
guidée-articulée	1,561	5,712	7,854	$(2n-1)\frac{\pi}{2}$	(exact)
encastrée-libre	1,875	4,694	7,855	$(2n-1)\frac{\pi}{2}$	(approx.)
bi-articulée	3,142	6,283	9,425	$n\pi$	(exact)
encastrée-articulée	3,927	7,069	10,210	$(4n+1)\frac{\pi}{4}$	(approx.)
encastrée-guidée	2,365	5,498	8,639	$(4n-1)\frac{\pi}{4}$	(approx.)
bi-encastrée	4,730	7,853	10,996	$(2n+1)\frac{\pi}{2}$	(approx.)

TABLE 4.2.2 – Pulsations propres de vibrations d'une poutre uniforme pour différentes conditions aux limites :  $\omega_1^2 = \lambda^4 \frac{EI}{\rho S l^4} = \lambda^4 \frac{EI}{m l^3}$ .

# - 3 -

# Approximation des systèmes continus par des méthodes cinématiques

### Sommaire

3.1	Méthode de Rayleigh pour les poutres en flexion pure 143				
3.2	Méthode de Rayleigh-Ritz				
	3.2.1	Poutre encastrée-libre - 2 fonctions de base			
	3.2.2	Poutre encastrée-libre - 6 fonctions de base			
3.3	La méthode des éléments finis en dynamique des poutres 147				
	3.3.1	Approximation par éléments finis			
	3.3.2	Formulation variationnelle des vibrations libres en flexion . 149			
	3.3.3	Calculs des vibrations libres par éléments finis			
	3.3.4	Application aux vibrations libres en flexion simple 151			

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la résolution analytique des problèmes de vibrations des systèmes continus devient vite lourde. Comme dans le cas de la mécanique des structures classiques, les solutions peuvent être approchées de diverses façons. Dans ce chapitre sont présentées quelques unes de ces méthodes, et notamment la méthode des éléments finis qui est un outil standard du calcul des structures actuel.

# 3.1 Méthode de Rayleigh pour les poutres en flexion pure

Pour obtenir le quotient de Rayleigh (éq. 3.3.2), nous avons écrit le principe de Rayleigh (éq. 3.3.1)  $\delta(T_{max})_x = \delta(V_{max})_x$ . Dans le cas de la flexion des poutres, nous

pouvons spécifier le quotient de Rayleigh en partant de l'énergie cinétique et l'énergie de déformation et en y introduisant un champ de déplacement simplifié :

$$T(v, \dot{v}) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \, S \dot{v}^2 \, dl \qquad \text{et} \qquad W(v) = \frac{1}{2} \int_0^l E \, I \, \left( v'' \right)^2 \, dl$$

On approche le champ de déplacement avec  $v(x,t) = v(x) \sin(\omega t)$ . Sur le mode *n*, on obtient :

$$\omega^{2} = \frac{\int_{0}^{l} E I (v'')^{2} dl}{\int_{0}^{l} \rho S v^{2} dl}$$
(4.3.34)

L'idée est de retenir une fonction approchée pour  $v_n$  qui est proche de la solution du problème, mais qui ne vérifie pas forcément les conditions aux limites cinématiques, et d'en déduire  $\omega_n$ . L'erreur augmente avec le rang de la pulsation. On utilise généralement le quotient de Rayleigh pour les premières pulsations.

Illustrons cette approximation sur le cas de la poutre encastrée-libre (figure 4.2.6). Choisissons comme fonction approchée :  $v_{app} = a \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right)$ . Les conditions aux limites cinématiques sont :

$$\begin{cases} v_{app}(0) = 0\\ \frac{d v_{app}}{dx} |_{x=0} = 0 \end{cases}$$

elles sont bien vérifiées par cette approximation, contrairement à la condition dérivant de la condition de bord libre portant sur l'effort tranchant qui n'est pas vérifiée  $(\frac{d^3 v_{app}}{dx^3}|_{x=l} \neq 0)$ . Mais ce n'est pas essentiel, cela implique simplement que l'approximation sera meilleure quand les conditions aux bords seront vérifiées. Car encore une fois, l'intérêt de cette méthode, comme dans les systèmes discrets, est qu'une erreur du premier ordre sur l'approximation du mode induit une erreur du second ordre sur la pulsation. On vérifie en effet que dans notre cas la pulsation est :

$$\widetilde{\omega}_1 = \frac{1,914^2}{l^2} \sqrt{\frac{E\,I}{\rho\,S}}$$

la solution "exacte" (tableau 4.2.2 page 141) étant 1,875. Comme dans le cas de la recherche itérative mise en œuvre au §3.1.1, cette approximation est une borne supérieure. On prend généralement comme approximation la déformée statique lorsqu'elle est connue. Sinon des polynômes peuvent être utilisés, mais les calculs s'alourdissent rapidement avec le degré des polynômes. Pour remédier à ces calculs on peut utiliser plusieurs fonctions linéaires ou polynômes de faible degrés. Cette méthode est alors appelée méthode de Rayleigh-Ritz, elle est présentée ci-après.

# 3.2 Méthode de Rayleigh-Ritz

L'utilisation de la méthode de Ritz, c'est-à-dire d'une approximation du déplacement formée à partir de combinaisons linéaires de fonctions d'une base de Ritz, pose également la contrainte que les fonctions de cette base doivent être cinématiquement admissibles. Prenons comme approximation :

$$v_{app}(x) = A_1 \phi_1(x) + \ldots + A_n \phi_n(x)$$
,  $A_i \in \mathbb{R}$ 

où les  $A_i$  sont des coefficients réels à déterminer pour chacun des modes, et les  $\phi_i(x)$  sont les fonctions de la base de Ritz. En utilisant cette approximation dans le quotient de Rayleigh (éq. 4.3.34), on forme un système matriciel :

$$\widetilde{\omega}^{2} = \frac{\int_{0}^{l} EI(v'')^{2} dl}{\int_{0}^{l} \rho Sv^{2} dl} = \frac{\int_{0}^{l} EI\left[\sum_{i=1}^{n} A_{i}\phi_{i}''\right]\left[\sum_{i=j}^{n} A_{j}\phi_{j}''\right] dl}{\int_{0}^{l} \rho S\left[\sum_{i=1}^{n} A_{i}\phi_{i}\right]\left[\sum_{j=1}^{n} A_{j}\phi_{j}\right] dl}$$
  
$$\downarrow \quad \text{en notant } K_{ij} = \int_{0}^{l} EI\phi_{i}''\phi_{j}'' dl \quad \text{et} \quad M_{ij} = \int_{0}^{l} \rho S\phi_{i}\phi_{j} dl$$

$$\widetilde{\omega}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} A_i A_j}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} A_i A_j}$$

Puisque les pulsations propres réalisent un minimum de la fonction  $\omega^2$ , recherchons ce minimum :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{\omega}^2}{\partial A_i} &= 0 \\ &= \frac{2\sum_{j=1}^n K_{ij}A_j}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}A_iA_j} - \frac{2\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij}A_iA_j\right)\left(\sum_{j=1}^n M_{ij}A_j\right)}{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}A_iA_j\right)^2} \\ &\hookrightarrow \sum_{j=1}^n K_{ij}A_j - \widetilde{\omega}^2 \sum_{j=1}^n M_{ij}A_j = 0 \quad \text{avec } i = 1, \dots, n \\ &\hookrightarrow \sum_{j=1}^n \left[K_{ij} - \widetilde{\omega}^2 M_{ij}\right]A_j = 0 \\ &\text{soit} \quad det\left(\overline{K} - \widetilde{\omega}^2 \overline{M}\right) = 0 \end{aligned}$$

On arrive finalement à une formulation identique à celle des systèmes discrets lorsque la réponse est recherchée sous la forme d'une harmonique de pulsation  $\omega$  (éq. 3.2.9). On tire de ce système *n* racines  $\tilde{\omega}^2$  i = 1, ..., n. Le calcul de ces pulsations nécessite, pour chacune, le calcul de  $n \times n$  coefficients  $A_j^{(i)}$ , ce qui permet de déterminer le mode associé, et donc la déformée complète définie à une constante multiplicative prés :

$$v_{app}^{(i)}(x) = \sum_{j=1}^{n} A_j^{(i)} \phi_j(x) \Rightarrow v_{app}(x) = \sum_{i=1}^{n} v_{app}^{(i)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_j^{(i)} \phi_j(x)$$

Ces approximations sont par excès. Pour augmenter la précision, il faut augmenter le nombre de fonctions de la base de Ritz.

# 3.2.1 Poutre encastrée-libre - 2 fonctions de base

Considérons l'exemple de la poutre en flexion encastrée-libre telle que représentée sur la figure 4.2.6, avec cette fois, pour des raisons de commodité, l'axe des  $\vec{x}$  orienté vers l'encastrement de la poutre tel que x = l est l'encastrement de la poutre et x = 0son extrémité libre. Prenons deux fonctions de base qui vérifient ces conditions aux limites cinématiques :

$$\phi_1(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \quad \phi_2(x) = \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \longrightarrow v_{app}(x) = A_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + A_2 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$$

— le calcul des coefficients  $K_{ij}$  et  $M_{ij}$  donne :

$$K_{11} = EI \int_0^l (\phi_1'')^2 \, dl = EI \int_0^l \left(\frac{2}{l}\right)^2 \, dl = 4\frac{EI}{l^3}$$
$$K_{21} = K_{12} = -2\frac{EI}{l^3} \qquad \qquad K_{22} = 4\frac{EI}{l^3}$$

et

$$M_{11} = \rho S \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^4 dl = \frac{\rho S l}{5}$$
$$M_{21} = M_{12} = \frac{\rho S l}{30} \qquad \qquad M_{22} = \frac{\rho S l}{105}$$

 les matrices correspondantes sont formées, et le calcul du déterminant associé donne :

$$\begin{bmatrix} \left[4\frac{EI}{l^3} - \widetilde{\omega}^2\frac{\rho Sl}{5}\right] & \left[-2\frac{EI}{l^3} - \widetilde{\omega}^2\frac{\rho Sl}{30}\right] \\ \text{sym} & \left[4\frac{EI}{l^3} - \widetilde{\omega}^2\frac{\rho Sl}{105}\right] \end{bmatrix} = 0$$

$$\iff \frac{1}{1260}(\rho Sl)^2 \widetilde{\omega}^4 - \frac{34}{140}(\rho Sl)\frac{EI}{l^3} \widetilde{\omega}^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{EI}{l^3}\right)^2 = 0$$

$$(4.3.35)$$

— les pulsations propres sont les racines de cette équation du second degré en  $\tilde{\omega}^2$  et s'expriment finalement :

$$\omega_1^2 = 12,60 \frac{EI}{\rho S l^4} \quad \text{valeur "exacte" (tableau 4.2.2 page 141) : 12,30}$$
$$\omega_2^2 = 1212 \frac{EI}{\rho S l^4} \quad \text{valeur "exacte" (tableau 4.2.2 page 141) : 483} \longrightarrow \text{MAUVAIS}$$

Seule la première pulsation est correctement approchée. Pour augmenter la précision de ces approximations, il faut augmenter le nombre de fonctions de base

### **3.2.2** Poutre encastrée-libre - 6 fonctions de base

Les calculs deviennent plus lourds, mais cette fois, les pulsations sont correctement approchées jusqu'au rang 4. Considérons les fonctions de base suivantes :

$$\begin{split} \phi_1(x) &= \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \\ \phi_2(x) &= \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \\ \phi_3(x) &= \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\right) \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \\ \phi_4(x) &= \left(\frac{x}{l} - \frac{3}{4}\right) \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{4}\right) \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \\ \phi_5(x) &= \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{5}\right) \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{x}{l} - \frac{4}{5}\right) \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \\ \phi_6(x) &= \left(\frac{x}{l} - \frac{9}{50}\right) \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{x}{l} - \frac{3}{5}\right) \left(\frac{x}{l} - \frac{5}{6}\right) \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \end{split}$$

d'où l'on tire le système carré  $6 \times 6$  à résoudre, et donc les six premières pulsations propres (tableau 4.3.3).

	approché	"exact"
$\omega_1^2 / \frac{EI}{\rho S l^4}$	12,36	12,36
$\omega_2^2 / \frac{EI}{\rho S l^4}$	486	485
$\omega_3^2/\frac{EI}{\rho S l^4}$	3 781	3 801
$\omega_4^2 / \frac{EI}{\rho S l^4}$	16 507	14 617
$\omega_5^2/\frac{EI}{\rho S l^4}$	51 791	39 944
$\omega_6^2 / \frac{EI}{\rho S l^4}$	1 030 684	173 881

TABLE 4.3.3 – Pulsations propres approchées d'une poutre droite en flexion encastrélibre par une méthode de Rayleigh-Ritz avec six fonctions de base.

# **3.3 La méthode des éléments finis en dynamique des poutres**

Nous nous restreignons ici à l'étude des vibrations linéaires des poutres droites à plans moyens chargées dans ce plan, similaires aux poutres considérées jusqu'à maintenant. Une théorie de Bernoulli est considérée dans un but de simplification.

L'approximation par éléments fini des problèmes est largement utilisée en mécanique. L'intérêt de cette méthode de résolution des problèmes continus est de permettre de donner une signification physique aux inconnues recherchées, contrairement par exemple aux approximations vues ci-dessus dans lesquelles les inconnues sont coefficients réels sans sens physique particulier. L'approximation par éléments fini se base sur la formulation faible du problème à résoudre. Dans le cas de la mécanique des structures, cette formulation faible équivaut au Principe des Puissances Virtuelles écrit avec un champ de déplacement Cinématiquement Admissible à 0, *i.e.* vérifiant les conditions aux limites cinématiques et dont les déplacements imposés sont annulés, et un champ de vitesses correspondant vérifiant des déplacements aux instants extrêmes nuls (C.I.(0)). Le PPV est composé ici des termes classiques de puissance virtuelle des efforts intérieurs ( $\delta \mathcal{P}_{int}(\delta \vec{u})$ ) et de la puissance virtuelle des efforts donnés ( $\delta \mathcal{P}_{ext}(\delta \vec{u})$ ), auxquels se superpose la puissance virtuelle des efforts d'origine inertielle ( $\delta \mathcal{P}_{acc}(\delta \vec{u})$ ) (4.2.2). La formulation générale du PPV pour les poutres de type Bernoulli prend la forme classique, qui se déduit également de l'application du principe d'Hamilton :

$$\delta \mathcal{P}_{int}(\delta \vec{u}(\vec{x},t)) + \delta \mathcal{P}_{ext}(\delta \vec{u}(\vec{x},t)) = \delta \mathcal{P}_{acc}(\delta \vec{u}(\vec{x},t)) \quad , \forall \delta \vec{u}(\vec{x},t) C.A.(0) - C.I.(0)$$

$$(4.3.36)$$

avec ces 3 termes qui s'expriment :

$$\delta \mathcal{P}_{int}(\delta \vec{u}(x,t)) = -\int_0^l \left\{ N(x,t) \,\delta u'(x,t) + T(x,t) \,\delta v'(x,t) + M(x,t) \,\delta v''(x,t) \right\} dl$$

$$\begin{split} \delta \mathcal{P}_{ext}(\delta \vec{u}(x,t)) &= \int_0^l \left\{ c_z(x,t) \, \delta v'(\vec{x},t) + p_x(x,t) \, \delta u(\vec{x},t) + p_y(x,t) \, \delta v(\vec{x},t) \right\} dl \\ &+ \left[ N_i(t) \delta u_i(t) + T_i(t) \delta v_i(t) + M_i(t) \, \delta v'_i(t) \right]_0^l \end{split}$$

$$\delta \mathcal{P}_{acc}(\delta \vec{u}(x,t)) = \int_0^l \left\{ \rho S \ddot{u}(x,t) \delta u(x,t) + \rho S \ddot{v}(x,t) \delta v(x,t) + \langle \rho I \rangle \dot{v}''(x,t) \delta v(x,t) \right\} dl$$

# **3.3.1** Approximation par éléments finis

Sans entrer dans les détails, l'approximation du problème par la méthode des éléments finis consiste à *discrétiser* le problème continu. De plus, on procède à la fois à la discrétisation du domaine géométrique et des variables inconnues recherchées (cf cours de R.Fortunier dans l'axe Éléments finis & Structures, et cours de W.S.Han dans l'option CIME). Dans le cas de la dynamique, un découpage en temps est également effectué.

La discrétisation en espace est illustrée sur la figure 4.3.8. Le même type de découpage est réalisé pour le déplacement, grandeur inconnue du problème. Partant du problème continu posé en déplacements, tel que formulé en (4.3.36), le problème discrétisé est formulé en introduisant l'approximation du déplacement de tout point (éq. 4.3.37) re-cherché comme la combinaison des déplacements des sommets (*noeuds*) des *éléments* 

utilisés pour la discrétisation spatiale de  $\vec{x}(t)$ . Ainsi, les inconnues représentent les déplacements des points particuliers sur lesquels s'appuie le découpage géométrique :

Approximation en espace 
$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\vec{x}, t) x_i(t)$$
  
Approximation en déplacement  $\vec{u}(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{N}_i(\vec{x}, t) q_i(t)$ 

$$(4.3.37)$$



FIGURE 4.3.8 – Discrétisation du domaine continu étudié.

La discrétisation en déplacement et en espace est réalisée classiquement. Pour ce qui est de la résolution en temps, on recourt le plus souvent à une discrétisation de type différence finie. La résolution du problème formulé en espace et en temps est menée soit directement, soit dans l'espace modal. Dans ce dernier cas, il faut donc au préalable caractériser les valeurs et vecteurs propres. Généralement, toutes ces caractéristiques ne sont pas utilisées, en effet le nombre de valeurs propres et de vecteurs propres d'un système est égal à la taille de ce système. On utilise un espace de projection réduit constitué des quelques dizaines, voire quelques centaines, premiers vecteurs propres. Dans les codes de calculs par éléments finis, la taille de cet espace peut être laissé au choix de l'utilisateur.

# 3.3.2 Formulation variationnelle des vibrations libres en flexion

Nous traitons ici le cas des vibrations libres en flexion simple, la puissance virtuelle des efforts donnés est donc nulle. Dans ce cas, le PPV (éq. 4.3.36) s'écrit :

$$\delta P_{int}(\delta \vec{u}(\vec{x},t)) + \delta P_{ext}(\delta \vec{u}(\vec{x},t)) = \delta P_{acc}(\delta \vec{u}(\vec{x},t)) , \forall \delta \vec{u}(\vec{x},t) C.A.(0) - C.I.(0)$$

$$-\int_{0}^{l} EIv'' \delta v'' dl + 0 = \int_{0}^{l} \rho S \vec{v} \delta v dl , \forall \delta v C.A.(0) - C.I.(0)$$

$$(4.3.38)$$

La solution v(x,t) est recherchée sous la forme générale :

$$v(x,t) = V(x) \mathbf{e}^{i\omega t}$$

 $\omega$  étant inconnue. L'équilibre de la poutre (4.3.38) s'écrit alors de façon découplée en temps et en espace :

$$\left(\int_{0}^{l} EIV''\delta V''dl - \omega^{2} \int_{0}^{l} \rho SV\delta Vdl\right) e^{2i\omega t} = 0 \quad , \forall \delta V C.A.(0) - C.I.(0) \quad (4.3.39)$$

# 3.3.3 Calculs des vibrations libres par éléments finis

Nous allons utiliser un élément fini de flexion de type Haute Précision d'Hermitte, c'est-à-dire utilisant une interpolation cubique des déplacements faisant intervenir comme inconnue nodale la flèche et la rotation des sections (figure 4.3.9). Les caractéristiques de l'élément sont sa longueur  $l^e$ , son module d'Young E, sa section transverse constante S, et son moment quadratique de flexion I.



FIGURE 4.3.9 – Élément de flexion de type Hermitte.

Dans ce cas l'interpolation géométrique  $N_i(x)$  est directe (linéaire), et l'interpolation en déplacement s'écrit :

$$v(x,t) = \langle \mathcal{N}_1(x), \mathcal{N}_2(x), \mathcal{N}_3(x), \mathcal{N}_4(x) \rangle \begin{cases} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{cases} e^{i\omega t} = \sum_{i=1}^4 \mathcal{N}_i(x)q_i^e e^{i\omega t}$$

avec les fonctions d'interpolation établies de manière classique en posant les conditions sur leur valeur aux 2 noeuds :

$$\mathcal{N}_{1}(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{l^{e}}\right)^{2} + 2\left(\frac{x}{l^{e}}\right)^{3}$$
$$\mathcal{N}_{2}(x) = l^{e}\left(\left(\frac{x}{l^{e}}\right) - 2\left(\frac{x}{l^{e}}\right)^{2} + \left(\frac{x}{l^{e}}\right)^{3}\right)$$
$$\mathcal{N}_{3}(x) = 3\left(\frac{x}{l^{e}}\right)^{2} - 2\left(\frac{x}{l^{e}}\right)^{3}$$
$$\mathcal{N}_{4}(x) = -l^{e}\left(\left(\frac{x}{l^{e}}\right)^{2} - \left(\frac{x}{l^{e}}\right)^{3}\right)$$

En introduisant cette discrétisation du déplacement dans la puissance virtuelle des efforts intérieurs  $\delta \mathcal{P}_{int}$  et dans la puissance virtuelle des quantités d'accélérations  $\delta \mathcal{P}_{acc}$ 

définies en (4.3.38), on obtient les matrices élémentaires de rigidité ( $[K]^e$ ) et de masse ( $[M]^e$ )

$$\int_{0}^{l^{e}} EIV''\delta V''dl = \int_{0}^{l^{e}} EI\left(\sum_{i=1}^{4} \mathcal{N}_{i}(x)q_{i}^{e}\right)''\left(\sum_{j=1}^{4} \mathcal{N}_{j}(x)\delta q_{j}^{e}\right)'' e^{2i\omega t} dl^{e}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} q_{i}^{e} \int_{0}^{l^{e}} EI\mathcal{N}_{i}''\mathcal{N}_{j}'' dl^{e} \delta q_{j}^{e} e^{2i\omega t}$$

$$= \langle q \rangle^{e} [K]^{e} \{\delta q\}^{e} e^{2i\omega t}$$

$$-\omega^{2} \int_{0}^{l} \rho SV \,\delta V dl = -\omega^{2} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} q_{i}^{e} \int_{0}^{l^{e}} \rho S\mathcal{N}_{i}\mathcal{N}_{j} dl^{e} \,\delta q_{j}^{e} e^{2i\omega t}$$

$$= -\omega^{2} \langle q \rangle^{e} [M]^{e} \{\delta q\}^{e} e^{2i\omega t}$$

L'équilibre (4.3.39) étant vérifié pour tout déplacement virtuel élémentaire  $\delta \langle q \rangle_e$ C.A.(0) – C.I.(0), l'équilibre pour un élément s'écrit :

$$\left(K_{ij}^{e}-\omega^{2}M_{ij}^{e}\right)q_{j}^{e}=0$$
,  $\forall q_{j}^{e}C.A.-C.I.+$  conditions de raccord

On retrouve ici la formulation classique du calcul des valeurs propres, tel que présenté pour les systèmes à  $n \, ddl$  dans la troisième partie du document de cours. Tous calculs faits, les matrices élémentaires de raideur et de rigidité s'écrivent :

$$\begin{split} K_{ij}^{e} &= EI \int_{0}^{l^{e}} \mathcal{N}_{i}^{\prime\prime\prime} \mathcal{N}_{j}^{\prime\prime} dl^{e} \\ [K]^{e} &= \frac{EI}{(l^{e})^{3}} \begin{bmatrix} 12 & 6l^{e} & -12 & 6l^{e} \\ & 4(l^{e})^{2} & -6l^{e} & 2(l^{e})^{2} \\ & 12 & -6l^{e} \\ & & 4(l^{e})^{2} \end{bmatrix} \\ M_{ij}^{e} &= \rho S \int_{0}^{l^{e}} \mathcal{N}_{i} \mathcal{N}_{j} dl^{e} \ (m^{e} = \rho Sl^{e}) \\ [M]^{e} &= \frac{m^{e}}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l^{e} & 54 & -13l^{e} \\ & 4(l^{e})^{2} & 13l^{e} & -3(l^{e})^{2} \\ & & 156 & -22l^{e} \\ & & 4(l^{e})^{2} \end{bmatrix} \end{split}$$

À partir des de ces quantités élémentaires, le problème global est formulé en *assemblant* les diverses contributions des éléments à la rigidité et à la masse globale. Finalement, la formulation discrétisée du problème complet est :

$$([K] - \omega^{2}[M]) \{q\} = \{0\} , \forall \{q\} C.A. - C.I.$$
(4.3.40)

# **3.3.4** Application aux vibrations libres en flexion simple

### Cas bi-encastré avec un élément

Compte-tenu des conditions aux limites  $(v(x=0) = v_1 = 0, v'(x=0) = \theta_1 = 0, v(x=l) = v_2 = 0, v'(x=l) = \theta_2 = 0)$ , il n'est pas possible de traiter le cas bi-encastré. La résolution conduit immédiatement à des déplacements nodaux identiquement nuls.

### Cas appuyé-appuyé avec un élément

Le cas appuyé-appuyé est représenté sur la figure 4.2.5 page 138. Les conditions aux limites sont  $v(x=0) = v_1 = 0$  et  $v(x=l) = v_2 = 0$ . Le problème à résoudre (4.3.40) devient alors ( $l^e = l$  et masse  $m^e = m$ ) :

$$det \left( \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & 2l^2 \\ 4l^2 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{m}{420} \begin{bmatrix} 4l^2 & -3l^2 \\ 4l^2 \end{bmatrix} \right)$$
$$\hookrightarrow det \left( \begin{bmatrix} 4EI - \omega^2 l^3 \frac{m}{105} & 2EI + \omega^2 l^3 \frac{m}{140} \\ 4EI - \omega^2 l^3 \frac{m}{105} \end{bmatrix} \right)$$

ce qui conduit aux 2 valeurs propres obtenues par éléments finis, à comparer aux valeurs exactes (éq. 4.2.30) établies précédemment :

$$\widetilde{\omega}_{1} = 2\sqrt{30}\sqrt{\frac{EI}{ml^{3}}} \simeq 10,95\sqrt{\frac{EI}{ml^{3}}} \qquad \text{valeur exacte } \omega_{1} \simeq 9,87\sqrt{\frac{EI}{ml^{3}}}$$
$$\widetilde{\omega}_{2} = 2\sqrt{630}\sqrt{\frac{EI}{ml^{3}}} \simeq 50,10\sqrt{\frac{EI}{ml^{3}}} \qquad \text{valeur exacte } \omega_{2} \simeq 39,48\sqrt{\frac{EI}{ml^{3}}}$$

De façon classique, plus le rang de la pulsation est élevé, plus l'erreur commise est importante. L'erreur par rapport à la solution exacte est de 10% pour la première pulsation et de 21,4% pour la seconde pulsation. On notera que la solution du problème statique, en l'absence de chargement réparti, est cubique ( $EIv^{(4)} = 0$ ), comme l'interpolation du déplacement dans l'élément fini utilisé ici. Ceci justifie la bonne approximation du problème continu avec peu d'éléments finis.

#### Cas bi-encastré avec 2 éléments

On examine maintenant le cas de la même poutre bi-encastrée (figure 4.3.10), de longueur l et de masse m, discrétisée cette fois avec deux éléments.



FIGURE 4.3.10 – Vibrations libres d'une poutre bi-encastrée.

Les caractéristiques des éléments sont donc : longueur  $l^e = \frac{l}{2}$  et masse  $m^e = \frac{m}{2}$ . Les conditions aux limites s'expriment :  $v(x=0) = v_1 = 0$ ,  $v'(x=0) = \theta_1 = 0$ ,  $v(x=l) = \theta_1 = 0$ , v(x=l) = 0

 $v_3 = 0$ ,  $v'(x = l) = \theta_3 = 0$ . L'assemblage du système conduit à :

$$\left( \begin{array}{c} EI \\ \hline (I^e)^3 \end{array} \left[ \begin{array}{ccccc} 12 & 6l^9 & \#M2 & 6l^9 & 0 & 0 \\ & 4(l^9)^2 & \#6l^7 & 2(l^9)^2 & 0 & 0 \\ & 12+12 & -6l^e+6l^e & \#M2 & 6l^9 \\ & 4(l^e)^2+4(l^e)^2 & \#6l^f & 2(l^9)^2 \\ & & 4(l^e)^2+4(l^e)^2 & \#6l^f & 2(l^9)^2 \\ & & & 4(l^9)^2 \end{array} \right]^{-1} \\ \\ \omega^2 \frac{m^e}{420} \left[ \begin{array}{cccc} 156 & 22l^F & 5A & \#12l^F & 0 & 0 \\ & 4(l^9)^2 & 18l^F & \#3(l^9)^2 & 0 & 0 \\ & 156+156 & -22l^e+22l^e & 5A & \#M3l^9 \\ & & 4(l^e)^2+4(l^e)^2 & \#8l^F & \#3(l^9)^2 \\ & & & & 4(l^9)^2 \\ & & & & & & & & & \\ \end{array} \right] \left( \begin{array}{c} v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ \theta_2 \\ \theta_2 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \end{array} \right) \\ \\ \end{array} \right.$$

ce qui conduit au système  $2 \times 2$  :

$$det\left(\frac{EI}{(l^{e})^{3}}\begin{bmatrix}24&0\\8(l^{e})^{2}\end{bmatrix}-\omega^{2}\frac{m^{e}}{420}\begin{bmatrix}312&0\\8(l^{e})^{2}\end{bmatrix}\right)=0$$

Les pulsations propres correspondantes obtenues par éléments finis, à comparer aux valeurs "exactes" établies précédemment (éq. 4.2.31 page 138) sont :

$$\widetilde{\omega}_{1} = 4\sqrt{\frac{420}{13}}\sqrt{\frac{EI}{ml^{3}}} \simeq 22,73\sqrt{\frac{EI}{ml^{3}}} \qquad \text{valeur "exacte"}: \omega_{1} \simeq 22,37\sqrt{\frac{EI}{ml^{3}}}$$
$$\widetilde{\omega}_{2} = \sqrt{420}\sqrt{\frac{EI}{ml^{3}}} \simeq 81,97\sqrt{\frac{EI}{ml^{3}}} \qquad \text{valeur "exacte"}: \omega_{2} \simeq 61,68\sqrt{\frac{EI}{ml^{3}}}$$

soit une erreur de 1,6% sur la première pulsation et 24,8% sur la seconde pulsation.

# Cas encastré-libre

Une autre application très simple consiste à résoudre le cas encastré-libre par éléments finis. La solution peut être comparée aux diverses approximations cinématiques présentées dans le cours : Rayleigh, Rayleigh-Ritz, et fonctions de Ducan.

# Cinquième partie

Annexes

# - A-1 -

# **Rappels : Cinétique - Dynamique -**Énergétique

# Sommaire

A-1.1Moments et autres caractéristiques du mouvement des corps A-2
A-1.1.1 Centre d'inertie
A-1.1.2 Tenseur d'inertie d'un ensemble matériel
A-1.1.3 Théorème de Huygens-Koënigs
A-1.1.4 Tenseurs d'inertie pour des géométries courantes A-4
A-1.2Cinétique
A-1.2.1 Rappel : torseur cinématique
A-1.2.2 Torseur cinétique
A-1.2.3 Énergie cinétique
A-1.3Dynamique
A-1.3.1 Torseur dynamique
A-1.4Principe Fondamental de la Dynamique
A-1.4.1 Forces fictives
A-1.4.2 Théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétiqueA-10
A-1.5Théorème de l'énergie cinétiqueA-11
A-1.6Liens avec le PPV/PTV, et le Principe de Hamilton
A-1.6.1 PPV et PTV
A-1.6.2 Principe de Hamilton

# A-1.1 Moments et autres caractéristiques du mouvement des corps

On étudie un solide (S) dans son mouvement par rapport au repère de référence ( $R_0$ ) (figure A-1.1).



FIGURE A-1.1 – Solide (S)

# A-1.1.1 Centre d'inertie

Le centre d'inertie G d'un solide (S) de masse m est défini par :

$$m\vec{OG} = \int_{(S)} \vec{OP} \, dm$$
 en particulier  $\int_{(S)} \vec{GP} \, dm = 0$  (A-1.1)

# A-1.1.2 Tenseur d'inertie d'un ensemble matériel

Le tenseur d'inertie du solide, ou système de solides, (S) est défini par :

$$\overline{\overline{I(0,S)}}.\vec{u} = \int_{(S)} \vec{OP} \wedge (\vec{OP} \wedge \vec{u}) dm$$
(A-1.2)

Dans un repère orthonormé, le tenseur d'inertie est représenté par la matrice symétrique

suivante :

$$\overline{\overline{I(0,S)}}_{(R_0)} = \begin{bmatrix} \int_{(S)}^{(S)} (y^2 + z^2) \, dm & -\int_{(S)}^{(S)} xy \, dm & -\int_{(S)}^{(S)} xz \, dm \\ -\int_{(S)}^{(S)} xy \, dm & \int_{(S)}^{(S)} (x^2 + z^2) \, dm & -\int_{(S)}^{(S)} yz \, dm \\ -\int_{(S)}^{(S)} xz \, dm & -\int_{(S)}^{(S)} yz \, dm & \int_{(S)}^{(S)} (x^2 + y^2) \, dm \end{bmatrix}_{(R_0)}$$
(A-1.3)

ou encore :

$$\overline{\overline{I(0,S)}}_{(R_0)} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & -I_{zz} \end{bmatrix}_{(R_0)}$$
(A-1.4)

avec

- $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ , et  $I_{zz}$  les *moments d'inertie*, respectivement par rapport à l'axe  $\vec{Ox}$ , à l'axe  $\vec{Oy}$  et l'axe  $\vec{Oz}$
- $I_{xy}$ ,  $I_{yz}$ , et  $I_{xz}$  les *produits d'inertie* respectivement par rapport aux axes  $\vec{Ox}$  et  $\vec{Oy}$ ,  $\vec{Oy}$  et  $\vec{Oz}$ ,  $\vec{Ox}$  et  $\vec{Oz}$

Les moments peuvent être calculés par rapport à un plan de référence, ou bien encore par rapport à une droite ou à un point de référence. Par rapport à un plan de référence, les moments d'inertie deviennent, par exemple par rapport au plan yOz(d'équation x = 0):

$$I(\mathcal{S}/x=0) = \int_{(\mathcal{S})} x^2 dm$$

par conséquent le moment d'inertie  $I_{xx}$  est :

$$I_{xx}(O,S) = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm = I(S/y = 0) + I(S/z = 0)$$

Également, le moment d'inertie par rapport à l'origine O du repère  $(R_0)$ , appelé *moment d'inertie polaire*, s'écrit :

$$I_{0}(S/O) = \int_{(S)} (x^{2} + y^{2} + z^{2}) dm = I(S/x = 0) + I(S/y = 0) + I(S/z = 0)$$
  
=  $I_{xx}(O,S) + I_{yy}(O,S) + I_{zz}(O,S)$   
=  $trace(\overline{\overline{I(0,S)}})$ 

Le tenseur d'inertie de (S) par rapport à une droite  $(\Delta)$  est donné par :

$$I(\mathcal{S}/\Delta) = \vec{u}.\left[\overline{\overline{I(0,\mathcal{S})}}.\vec{u}\right]$$

où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire porté par la droite ( $\Delta$ ). Partant de cette définition, on peut définir les *axes principaux d'inertie* d'un solide (S), tels que dans le repère généré par ces axes le tenseur d'inertie  $\overline{\overline{I(O,S)}}$  est diagonal. Un tel repère est généré par la base de vecteurs propres du tenseur d'inertie.

# A-1.1.3 Théorème de Huygens-Koënigs

Ce théorème permet d'exprimer, entre autres choses, le tenseur d'inertie  $\overline{I(0,S)}$ d'un solide (S) de masse M(S) relativement à O, origine du repère ( $R_0$ ), en fonction du tenseur d'inertie  $\overline{\overline{I(G,S)}}$  du même solide exprimé par rapport au centre d'inertie G, appelé *tenseur central d'inertie* :

$$\overline{\overline{I(0,S)}}_{(R_0)} = \overline{\overline{I(G,S)}}_{(R_0)} + M(S) \begin{bmatrix} y_G^2 + z_G^2 & -x_G y_G & -x_G z_G \\ -x_G y_G & x_G^2 + z_G^2 & -y_G z_G \\ -x_G z_G & -y_G z_G & x_G^2 + y_G^2 \end{bmatrix}_{(R_0)}$$
(A-1.5)

Cette relation peut également se mettre sous la forme suivante :

$$\overline{\overline{I}}(O,S) = \overline{\overline{I}}(G,S) + M(S)(\overrightarrow{OG}^2\overline{\overline{Id}} - \overrightarrow{OG} \otimes \overrightarrow{OG})$$

Par exemple pour un cas plan tel que décrit dans la figure A-1.2, les moments et produits d'inertie par rapport à O l'origine du repère s'écrivent en fonction de grandeurs exprimées par rapport au centre de gravité G et en fonction de la position de G. Dans le cas le plus simple, sur  $\vec{Oy}$  par exemple, on a :

$$I_{yy}(O,S) = I_{YY}(G,S) + M(S)z_G^2$$
$$I_{yz}(O,S) = I_{YZ}(G,S) - M(S)y_G z_G$$
$$I_0(S/0) = I_G(G,S) + M(S) \cdot (x_G^2 + y_G^2 + z_G^2)$$



FIGURE A-1.2 - Section dans le plan (Oyz) et repère local (GYZ) associé

# A-1.1.4 Tenseurs d'inertie pour des géométries courantes

Voici quelques exemples de tenseurs d'inertie pour des solides de géométries courantes. Pour une barre de masse *m* et de longueur  $2\ell$  dont l'axe est confondu avec l'axe



FIGURE A-1.3 – Solides courants : barre de masse *m* et longueur  $2\ell$  et disque de masse *m* et rayon *R* 

 $\vec{Ox}$  du repère ( $R_0$ ) et dont le centre de gravité est confondu avec l'origine du repère ( $R_0$ ) (figure A-1.3) :

$$\overline{\overline{I(0, barre}})_{(R_0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{3} \end{bmatrix}_{(R_0)}$$
(A-1.6)

Pour un disque de masse *m* et de rayon *R* dont l'axe de révolution coïncide avec l'axe  $\vec{O}_z$  du repère ( $R_0$ ) (voir figure A-1.3) :

$$\overline{\overline{I(0, disque})}_{(R_0)} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{mR^2}{2} & 0\\ 0 & 0 & mR^2 \end{bmatrix}_{(R_0)}$$
(A-1.7)

et pour un cerceau de même masse et même rayon, on a :

$$\overline{\overline{I(0,cerceau)}}_{(R_0)} = \frac{1}{2} \overline{\overline{I(0,disque}})_{(R_0)}$$
(A-1.8)

# A-1.2 Cinétique

# A-1.2.1 Rappel : torseur cinématique

Comme introduit en début de ce chapitre, un torseur se définit en un point P et dans un repère (R) par ses éléments de réduction qui sont la *résultante* et le *champ des moments* associé. Le champ de vitesse  $\vec{V}(P \in S)$  d'un solide (S) dans son mouvement par rapport à un repère de référence  $(R_0)$  est connu à travers le torseur cinématique

suivant, d'éléments de réduction  $\vec{\Omega}(S/R_0)$  et  $\vec{V}(P,S/R_0)$ , exprimé au point *P* de (S):

$$\left\{ \mathcal{V}_{\mathcal{S}} \right\}_{(P,\mathcal{S}/R_0)} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(\mathcal{S}/R_0) \\ \\ \vec{V}(P,\mathcal{S}/R_0) = \vec{PM} \wedge \vec{\Omega}(\mathcal{S}/R_0) \end{array} \right\}_{(P,\mathcal{S}/R_0)}$$

Dans la suite, les torseurs seront supposés exprimés par rapport au repère de référence du mouvement, ici  $R_0$ , et explicités dans ce même repère afin d'alléger les notations. Si ce torseur est <u>transporté</u> au point A, la résultante reste inchangée mais le moment résultant devient :

$$ec{V}(A,\mathcal{S}/R_0)=ec{V}(P,\mathcal{S}/R_0)+ec{AP}\wedgeec{\Omega}(\mathcal{S}/R_0)$$

<u>Remarque</u> Les mêmes définitions s'appliquent aux champs de vecteurs définis en tout point *M* du domaine. Si  $\vec{\Omega}(S/R_0)$  est une densité vectorielle *volumique*, on aura

$$\left\{ \mathcal{V}_{\mathcal{S}} \right\}_{(P,\mathcal{S}/R_0)} = \left\{ \begin{array}{c} \int_{\mathcal{S}} \vec{\Omega}(M \in \mathcal{S}/R_0) dS \\ \int_{\mathcal{S}} P \vec{M} \wedge \vec{\Omega}(M \in \mathcal{S}/R_0) dS \end{array} \right\}_{(P,\mathcal{S}/R_0)}$$

## A-1.2.2 Torseur cinétique

Les éléments de réduction (composantes) du torseur cinétique, aussi appelé torseur des *quantités de mouvement*, dans le mouvement du système (S) par rapport au repère de référence ( $R_0$ ), sont définis de la manière suivante au point A quelconque (A-1.9). La résultante est appelée quantité de mouvement ou résultante cinétique, et le moment est appelé moment cinétique :

$$\{\mathcal{C}_{\mathcal{S}}\}_{(A,\mathcal{S}/R_0)} = \left\{ \begin{array}{ll} \vec{C}(\mathcal{S}/R_0) &=& \int_{(\mathcal{S})} \vec{V}(P \in \mathcal{S}/R_0) dm \\ \vec{H}(A,\mathcal{S}/R_0) &=& \int_{(\mathcal{S})} \vec{A}P \wedge \vec{V}(P \in \mathcal{S}/R_0) dm \end{array} \right\}_{(A,\mathcal{S}/R_0)}$$
(A-1.9)

où  $\vec{V}(P \in S/R_0)$  désigne la densité *massique* de vitesse au point *P*, appartenant au solide (*S*), dans son mouvement par rapport au référentiel (*R*<sub>0</sub>). En se plaçant en un point *A* du repère (*R*<sub>0</sub>), et en introduisant le repère central d'inertie (*R*<sub>*G*</sub>) dont l'origine est *G* et dont les axes sont colinéaires aux axes de base du repère (*R*<sub>0</sub>), *i.e.*  $\vec{\Omega}(R_G/R_0) = \vec{0}$ , les éléments de réduction du torseur cinétique deviennent :

$$\{C_{\mathcal{S}}\}_{(A,\mathcal{S}/R_0)} = \left\{ \begin{array}{rcl} \vec{C}(\mathcal{S}/R_0) &=& M\vec{V}(G \in \mathcal{S}/R_0) \\ \vec{H}(A,\mathcal{S}/R_0) &=& \vec{H}(G,\mathcal{S}/R_G) + \vec{AG} \wedge M(\mathcal{S})\vec{V}(G \in \mathcal{S}/R_0) \\ & (A-1,10) \end{array} \right\}_{(A,\mathcal{S}/R_0)}$$

Cette dernière expression permet de poser que :

- la quantité de mouvement du système est égale à celle du centre d'inertie G affecté de la masse totale M du système,
- le moment cinétique par rapport à un point A est la somme de son moment cinétique par rapport à G, centre d'inertie, dans le mouvement du système autour de G, et du moment cinétique par rapport à A de la masse totale M(S) supposée concentrée en G. Cette dernière propriété découle du théorème de Koënig.

# A-1.2.3 Énergie cinétique

### **Expressions générales**

Par définition l'énergie cinétique  $T(S/R_0)$  du système (S) par rapport au repère  $(R_0)$  est la quantité suivante :

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2} \int_{(S)} \vec{V}^2(P \in S/R_0) dm$$
 (A-1.11)

Cette définition s'étend sans difficulté au cas d'un système de solides, constitué de N masses ponctuelles  $m_k$  situées aux points  $P_k$ , animés de vitesses  $\vec{V}(P_k \in S/R_0)$  par rapport au référentiel  $(R_0)$ :

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{V}^2 (P_k \in S/R_0)$$
 (A-1.12)

et si le système (S) apparaît comme la réunion de plusieurs sous-ensembles disjoints, tels que (S) =  $S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_N$ , l'énergie totale se déduit des énergies cinétiques des sous-ensembles :

$$T(S/R_0) = T(S_1/R_0) + T(S_2/R_0) + \ldots + T(S_N/R_0)$$

### Expressions par rapport à un point quelconque

Dans le cas d'un système solide, le champ de vitesse  $\vec{V}(P \in S)$  est connu à travers le torseur cinématique de (S) dans son mouvement par rapport à  $(R_0) : \{\mathcal{V}_S\}_{(A,S/R_0)}$ . En introduisant, dans la définition générale de l'énergie cinétique (A-1.11), l'expression générale du champs de déplacement au sein du solide (S), on obtient l'expression suivante de l'énergie cinétique calculée en un point quelconque *P*.

$$T(\mathcal{S}/R_0) = \frac{1}{2} \left[ M \vec{V}^2 (P \in \mathcal{S}/R_0) + 2M \vec{V} (P \in \mathcal{S}/R_0) \left( \vec{\Omega}(\mathcal{S}/R_0) \cdot \overline{\bar{I}}(G, \mathcal{S}) \right) \right. \\ \left. + \vec{\Omega}(\mathcal{S}/R_0) \cdot \left( \overline{\bar{I}}(P, \mathcal{S}) \cdot \vec{\Omega}(\mathcal{S}/R_0) \right) \right]$$

Un cas particulier très utile correspond à un point *P* fixe. Alors, seule la composante de rotation dans le mouvement de (S) par rapport à  $(R_0)$  est à l'origine de l'existence de l'énergie cinétique :

$$T_p(\mathcal{S}/R_0) = \frac{1}{2}\vec{\Omega}(\mathcal{S}/R_0) \cdot \left(\overline{\bar{I}}(P,\mathcal{S}) \cdot \vec{\Omega}(\mathcal{S}/R_0)\right)$$

#### Expression en fonction du centre d'inertie

L'énergie cinétique peut s'exprimer en fonction de la vitesse du centre d'inertie et de la rotation du solide (S) dans son mouvement par rapport à ( $R_0$ ) :

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}M\vec{V}^2(G \in S/R_0) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0) \cdot \left(\bar{\bar{I}}(G,S) \cdot \vec{\Omega}(S/R_0)\right) = \frac{1}{2}M\vec{V}^2(G \in S/R_0) + T_G(S/R_0)$$
(A-1.13)

ce qui se met également sous la forme de produits de torseurs :

$$T(\mathcal{S}/R_0) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} M\vec{V}(G,\mathcal{S}/R_0) \\ \overline{\vec{I}}(G,\mathcal{S})\cdot\vec{\Omega}(\mathcal{S}/R_0) \end{array} \right\}_{(G,\mathcal{S}/R_0)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(\mathcal{S}/R_0) \\ \vec{V}(G,\mathcal{S}/R_0) \end{array} \right\}_{(G,\mathcal{S}/R_0)} \\ = \frac{1}{2} \{\mathcal{C}_{\mathcal{S}}\}_{(G,\mathcal{S}/R_0)} \cdot \{\mathcal{V}_{\mathcal{S}}\}_{(G,\mathcal{S}/R_0)} \end{array}$$

Cette dernière expression (A-1.13) correspond à l'application du théorème de Koënig dans le cas de l'énergie cinétique : l'énergie cinétique totale du solide S est égale à la somme de l'énergie cinétique dans son mouvement autour de son centre d'inertie, et de l'énergie cinétique développée par la translation de sa masse M totale concentrée en G.

# A-1.3 Dynamique

# A-1.3.1 Torseur dynamique

Le torseur dynamique est aussi appelé torseur *des quantités d'accélération*. Il est définit en fonction du champ des accélérations  $\vec{\gamma}(P \in S/R_0)$  de la manière suivante :

$$\{\mathcal{D}_{\mathcal{S}}\}_{(A,\mathcal{S}/R_0)} = \left\{ \begin{array}{ll} \vec{D}(\mathcal{S}/R_0) &=& \int_{(\mathcal{S})} \vec{\gamma}(P \in \mathcal{S}/R_0) dm \\ \vec{K}(A,\mathcal{S}/R_0) &=& \int_{(\mathcal{S})} \vec{AP} \wedge \vec{\gamma}(P \in \mathcal{S}/R_0) dm \end{array} \right\}_{(A,\mathcal{S}/R_0)}$$
(A-1.14)

Le moment dynamique du mouvement de (S) par rapport au repère  $(R_0)$ , s'exprime également en tout point *A* de (S) en fonction du moment cinétique  $\vec{H}(A, S/R_0)$  définit précédemment. Pour un solide de masse invariante :

$$\vec{K}(A,\mathcal{S}/R_0) = \frac{d\vec{H}(A,\mathcal{S}/R_0)}{dt} + \vec{V}(A,\mathcal{S}/R_0) \wedge \vec{C}(A,\mathcal{S}/R_0)$$
(A-1.15)

Cette expression se simplifie si le point *A* est fixe par rapport au repère du mouvement  $(R_0)$  ( $\vec{V}(A, S/R_0) = \vec{0}$ ), et donc au centre d'inertie *G* du système, ce torseur des quantités d'accélération se simplifie et s'écrit en fonction du torseur cinétique :

$$\{\mathcal{D}_{\mathcal{S}}\}_{(G,\mathcal{S}/R_{0})} = \left\{ \begin{array}{ll} \vec{D}(\mathcal{S}/R_{0}) &=& \frac{D\vec{C}(\mathcal{S}/R_{0})}{Dt} = M\vec{\gamma}(G \in \mathcal{S}/R_{0}) \\ \\ \vec{K}(G,\mathcal{S}/R_{0}) &=& \frac{D\vec{H}(G,\mathcal{S}/R_{0})}{Dt} \end{array} \right\}_{\substack{(G,\mathcal{S}/R_{0}) \\ (A-1.16)}}$$

en notant que la dérivée étant relative au repère du mouvement, pour un solide de masse volumique variable la dérivée par rapport au temps devient une dérivée particulaire notée  $\frac{D}{Dt}$ .

# A-1.4 Principe Fondamental de la Dynamique

L'énoncé du *PFD* permet de relier directement l'ensemble des efforts extérieurs (*voir remarque ci-dessous*) appliqués à un système en mouvement  $\{\tau_{ext\to S}\}_{(A,S/\mathcal{R})}$  par rapport à un repère ( $R_0$ ), au torseur des quantités d'accélération galliléennes  $\{\mathcal{D}_{S}^{a}\}_{(A,S/\mathcal{R})}$  de ce système :

### Principe Fondamental de la Dynamique

$$\{\tau_{ext\to\mathcal{S}}\}_{(A,\mathcal{S}/\mathcal{R})} = \left\{\mathcal{D}_{\mathcal{S}}^{a}\right\}_{(A,\mathcal{S}/\mathcal{R})}$$
(A-1.17)

# A-1.4.1 Forces fictives

Si le repère ( $R_0$ ) du mouvement n'est pas galliléen <sup>1</sup> le torseur des efforts extérieurs doit inclure les forces dites *fictives* qui dérivent de la loi de composition des accélérations et qui peuvent être classées dans les forces à distances au même titre que les efforts volumiques produits par l'attraction gravitationnelle par exemple.

En effet, le *PFD* s'énonce en prenant comme accélération l'accélération dite *ab*solue ou accélération galliléenne ( $\vec{\gamma}^a$ ). Il est donc nécessaire, lorsque le mouvement n'est pas galliléen, de prendre en compte les forces d'inertie dues à l'accélération d'entraînement ( $\vec{\gamma}_e$ ) et la force de Coriolis ( $\vec{\gamma}_c$ ) qui se déduisent de la loi de composition des accélérations. Soit le *PFD* prenant en compte ces forces fictives lorsqu'elles existent :

$$\{\tau_{ext\to\mathcal{S}}\}_{(G,\mathcal{S}/\mathcal{R})} + \{-m\vec{\gamma}_e(G\in\mathcal{S}/R_0)\} + \{-m\vec{\gamma}_e(G\in\mathcal{S}/R_0)\} = \{m\vec{\gamma}_r(G\in\mathcal{S}/R_0)\}$$
(A-1.18)

Ce système d'équations (A-1.18), un peu plus général que le PFD (A-1.17) est également appelé Équations universelles de l'équilibre et du mouvement.

# A-1.4.2 Théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique

En se limitant aux cas où l'équilibre est considéré en un point fixe par rapport au repère du mouvement ( $R_0$ ), le torseur des actions dynamiques { $\mathcal{D}_S^a$ } est directement égal à la dérivée par rapport au temps du torseur cinétique (A-1.16).

$$\{\tau_{ext\to\mathcal{S}}\}_{(A,\mathcal{S}/\mathcal{R})} = \frac{D}{Dt} \{\mathcal{C}_{\mathcal{S}}\}_{(A,\mathcal{S}/\mathcal{R})}$$
(A-1.19)

<sup>1.</sup> des axes de référence galliléens sont définis à une translation rectiligne uniforme près par rapport à l'un d'entre eux choisi en particulier

De plus, pour des systèmes (S) de *contenu invariable*, cette nouvelle forme du *PFD* (A-1.19) donne deux équation vectorielles respectivement appelées *Théorème de la quantité de mouvement* (A-1.20-a) et *Théorème du moment cinétique* (A-1.20-b). Comme précédemment, les forces fictives doivent être introduites dans le torseurs des actions extérieures si le le repère du mouvement ( $R_0$ ) n'est pas galliléen. On peut noter que seul le théorème du moment cinétique impose que le point auquel il est appliqué soit fixe par rapport au repère du mouvement, le théorème de la quantité de mouvement s'appliquant sur la résultante indépendante du point considéré :

$$\sum \vec{F}_{ext \to S}(M) = \frac{DC(S/R_0)}{Dt}$$
(A-1.20a)

$$\sum \vec{M}(\vec{F}_{ext\to\mathcal{S}}(M),A) = \frac{D\vec{H}(A,\mathcal{S}/R_0)}{Dt}$$
(A-1.20b)

(A-1.20c)

# A-1.5 Théorème de l'énergie cinétique

Pour un système (S) constitué de partitions, la puissance totale développée par ce système dans son mouvement par rapport à un repère de référence ( $R_0$ ) conduit à l'expression du *théorème de l'énergie cinétique*. En première approximation, cette expression est le *PFD* en produit avec le champ des vitesses qui règne dans chaque partition du système. On a ainsi un équilibre entre la puissance développée par les efforts extérieurs  $\mathcal{P}_{ext}(S/R_0)$  et les efforts dérivant de l'énergie cinétique. Les efforts internes à chaque partition  $\mathcal{P}_{int}(S/R_0)$  et inter-partitions  $\mathcal{P}_{deff}(S/R_0)$  étant également considérés.

Finalement, pour toute partition d'un système, la somme des puissances des forces extérieures au système et des forces intérieures relatives à la partition envisagée, dans le mouvement réel, est égale à la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique du système augmentée de la somme des puissances des déformations entre les différentes parties du système :

$$\mathcal{P}_{int}(\mathcal{S}/R_0) + \mathcal{P}_{ext}(\mathcal{S}/R_0) = \frac{DT(\mathcal{S}/R_0)}{Dt} + \sum \mathcal{P}_{deff}(\mathcal{S}/R_0)$$
(A-1.21)

Dans le mouvement autour du centre d'inertie le théorème de l'énergie cinétique s'applique sans introduire d'autres forces que celles que l'on doit considérer dans le repère du mouvement ( $R_0$ ), *i.e.* aucune force fictive d'origine inertielle.

# A-1.6 Liens avec le PPV/PTV, et le Principe de Hamilton

On peut aisément remarquer que les différentes formulations connues de l'équilibre (PPV/PTV, Principe de Hamilton, Principe de d'Alembert, PFD) d'un système dérivent de la même expression, mais sont utilisées selon que les efforts sont ou non proportionnels au temps, et dépendent ou non du champ de déplacement.

En effet,le théorème de l'énergie cinétique peut être vu comme la forme intégrale scalaire du PFD (A-1.17) : si les équations vectorielles sont toutes identiquement nulles, leur somme reste nulle. Il suffit de faire "travailler" le PFD dans le champ cinématique en tout point du solide. Dans le cadre général des solides déformables (figure A-1.4), on utilise la forme intégrale en espace (sur le solide (S) occupant le domaine  $\Omega$  et son bord  $\partial \Omega_f$ ) incluant l'énergie de déformation ou énergie interne. Pour la partie inertielle des efforts extérieurs, on utilise l'expression du théorème de la quantité de mouvement (A-1.20-a) appliqué en tout point M courant du solide, en intégrant la conservation de la masse. On a alors des grandeurs vectorielles pour les efforts qui peuvent dépendre du temps, et les tenseurs des contraintes et des vitesses de déformation sont introduits (*cf cours MMC 1A*) :  $\overline{\sigma(\vec{u})}$  est la mesure du champ des contraintes qui règne dans le solide au point courant M, et  $\overline{\hat{E}}(\vec{V})$  est le tenseur des vitesses de déformations associé. Ces deux grandeurs dépendant du champ des vitesses  $\vec{V}(M, S/\mathcal{R})$ . Le champ de déplacement est supposé cinématiquement admissible à 0 (*C.A.*(0)), *i.e.* les déplacements imposés sur  $\partial \Omega_u$  étant annulés :

$$\int_{\Omega} \vec{\tau}_{vol \to S}(M,t) \cdot \vec{V}(M,S/R) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} \vec{\tau}_{surf \to S}(M,t) \cdot \vec{V}(M,S/R) \, d\omega_F - \int_{\partial\Omega_F} \vec{\overline{\sigma}}(\vec{u}) : \bar{\vec{\epsilon}}(\vec{V}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{D \, \vec{C}(M,S/R)}{Dt} \cdot \vec{V}(M,S/R) \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho(M) \frac{D}{Dt} \left( \vec{V}(M,S/R) \right)^2 \, d\Omega$$
(A-1.22)



FIGURE A-1.4 – Solide (S) quelconque en équilibre sous l'action d'efforts extérieurs, et conditions aux limites associées.
#### A-1.6.1 PPV et PTV

À partir de cette expression générale (A-1.22), la correspondance avec le Principe des Puissances Virtuelles est direct si l'on remarque que la puissance développée par les efforts d'origine inertielle s'écrit, en introduisant la définition (A-1.14) de la résultante dynamique :

$$\int_{\Omega} \rho(M) \vec{\gamma}(M, S/\mathcal{R}) \cdot \vec{V}(M, S/R) \, d\Omega \tag{A-1.23}$$

avec  $\rho(M)$  la masse volumique dans la partition courante du solide. Alors en prenant le champ de vitesses réel égal au champ de vitesse virtuel  $\vec{V}^*(M \in S) C.A.(0)$ , on a l'expression classique de l'équilibre qui fait intervenir la puissance virtuelle des quantités d'accélérations  $\mathcal{P}^*_{acc}(\vec{u^*}, S/R)$ :

$$\mathcal{P}_{int}^*(\vec{u^*}, \mathcal{S}/R) + \mathcal{P}_{ext}^*(\vec{u^*}, \mathcal{S}/R) = \mathcal{P}_{acc}^*(\vec{u^*}, \mathcal{S}/R)$$
(A-1.24)

avec par définition la puissance virtuelle des efforts internes :

$$\mathcal{P}_{int}^*(\vec{u^*}, \mathcal{S}/R) = -\int\limits_{\Omega} \overline{\overline{\mathbf{\sigma}}}(\vec{u^*}) : \overline{\overline{\mathbf{\epsilon}}}^*(\vec{u^*}) d\Omega$$

L'équilibre correspondant à cette équation étant identiquement nulle, en se restreignant au cadre des *petites perturbations* pour des solide à comportement linéaire, et dans le cas d'efforts extérieurs indépendants du temps, on peut considérer une forme intégrale dans le temps, faisant intervenir les expressions des travaux et des énergies. Dans ce cadre les intégrales en temps de ces puissances conduisent aux expressions des travaux virtuels qui dépendent uniquement du champ de déplacement  $\vec{u}^*(M)$  associé à la vitesse virtuelle  $\vec{V}^*(M)$  :

$$\int_{\Omega} \vec{\tau}_{vol \to S}(M) \cdot \vec{u^*}(M, S/\mathcal{R}) \, d\Omega + \int_{\partial \Omega_F} \vec{\tau}_{surf \to S}(M) \cdot \vec{u^*}(M, S/\mathcal{R}) \, d\omega_F - \int_{\Omega} \vec{\overline{\sigma}}(\vec{u^*}) : \overline{\overline{\epsilon}}^*(\vec{u^*}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho(M) \vec{\gamma}(M, S/\mathcal{R}) \cdot \vec{u^*}(M, S/\mathcal{R}) \, d\Omega = 0, \forall \, \vec{u^*}(M) \, C.A.(0)$$
(A-1.25)

#### A-1.6.2 Principe de Hamilton

Les efforts inertiels (A-1.23) peuvent également s'écrire comme la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique (voir définition (A-1.11)) :

$$\int_{\Omega} \rho(M) \vec{\gamma}(M, \mathcal{S}/\mathcal{R}) \cdot \vec{V}(M, \mathcal{S}/\mathcal{R}) \, d\Omega = \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(M) \vec{V}^2(M, \mathcal{S}/\mathcal{R}) \, d\Omega \right) \quad (A-1.26)$$

En utilisant cette expression dans l'expression de base (A-1.22), on retrouve en premier lieu le théorème de l'énergie cinétique. En considérant de plus que les efforts extérieurs agissant sur le solide dérivent d'un potentiel (A-1.27-a), et qu'il existe également un *potentiel de déformation* duquel dérivent les contraintes qui règnent dans le domaine (A-1.27-b) :

$$\exists V(\vec{u}) / \frac{\partial V}{\partial \vec{u}} = -\vec{\tau}_{ext \to S} \left( \delta V_{ext}(\vec{u}) = -\vec{\tau}_{ext \to S} = -\delta \mathcal{W}(\vec{u}) \right) \quad (A-1.27a)$$

$$\exists w(\overline{\overline{\epsilon}}) / \frac{\partial w}{\partial \overline{\overline{\epsilon}}} = \overline{\overline{\sigma}}(\overline{\overline{\epsilon}}) \quad \left(\delta w(\vec{u}) = \overline{\overline{\sigma}}(\overline{\overline{\epsilon}}) \,\delta \overline{\overline{\epsilon}} = -\delta \mathcal{W}_{int}(\vec{u})\right) \tag{A-1.27b}$$

en utilisant la nouvelle forme pour la puissance d'origine inertielle (A-1.26), on peut exprimer entièrement l'égalité (A-1.22) sous la forme de la variation d'une fonctionnelle composée des potentiels ci-dessus (A-1.27) et de l'énergie cinétique (A-1.11). En notant que les efforts extérieurs peuvent dépendre du temps, une formulation intégrale de cette fonctionnelle rend compte du bilan énergétique entre 2 instants  $t_1$  et  $t_2$ . Une condition supplémentaire de minimisation de cette fonctionnelle consiste à annuler le champ de déplacement aux bornes de l'intégrale (voir *Annexes - eq. A-3.43*). Ceci est réalisé en espace car le champ est *C.A.*(0), par contre en temps il faut l'imposer  $\delta \vec{v}(t_1) = \delta \vec{v}(t_2) = 0$ :

$$\delta\left(\int_{t_1}^{t_2} \left(T(\vec{v}) - V_{ext}(\vec{u}) - w(\vec{u})\right) dt\right) = 0, \forall \vec{u} C.A.(0) \text{ et } \delta \vec{v}(t_1) = \delta \vec{v}(t_2) = 0 \quad (A-1.28)$$

## **Transformée de Laplace**

#### Sommaire

A-2.1Définition
A-2.2Linéarité
A-2.3Premier groupe de propriétés fonctionnelles
A-2.3.1 Transformée de Laplace des dérivées successives de $f(t)$ A-16
A-2.4Second groupe de propriétés fonctionnelles
A-2.4.1 Théorème du retard
A-2.4.2 Théorème de composition
A-2.4.3 Distribution de Dirac

Cette opérateur permet de transformer un problème différentiel linéaire en un problème algébrique. Dans l'espace des transformées, la résolution de ce problème linéaire peut être conduite. La transformée inverse permet ensuite de revenir à l'espace d'origine. Cette dernière opération est facilitée lorsque la solution est décomposée en transformées élémentaires, de façon à identifier les transformées inverses de base connues, données dans la table suivante (A-2.1).

## A-2.1 Définition

Soit une fonction f(t) de la variable réelle t, définie pour  $t \ge 0$ . On lui fait correspondre la fonction F(s) de la variable complexe s, appelée transformée de Laplace, et définie par :

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}(f(t))$$
 (A-2.29)

Pour que cette transformée existe, l'intégrale doit converger. Cette condition est réalisée lorsque  $\Re(s) > \infty$  appelée abscisse de convergence, ce qui est vérifié pour les fonctions usuellement rencontrées en dynamique.

## A-2.2 Linéarité

C'est une des propriétés fondamentales : la transformée de Laplace est linéaire

$$\mathcal{L}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \mathcal{L}(f_1) + \lambda_2 \mathcal{L}(f_2)$$
(A-2.30)

Exemples de transformations de fonctions particulières

$$- f(t) = A = C^{ste} \rightsquigarrow F(s) = \frac{A}{s}$$

$$- f(t) = E(t-a) \text{ (Heaviside)} \rightsquigarrow F(s) = \frac{e^{-as}}{s}$$

$$- f(t) = E(t-a) - E(t-b) \rightsquigarrow \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}$$

$$- f(t) = A = C^{ste} \rightsquigarrow F(s) = \frac{A}{s}$$

$$- f(t) = e^{rt}, r \in \mathbb{C} \rightsquigarrow F(s) = \frac{1}{s-r}$$

$$r = \alpha + i\beta, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}\left(e^{(\alpha+i\beta)t}\right) = \frac{1}{s-(\alpha+i\beta)}$$
conséquences ...
$$- f(t) = \cos(\beta t) = \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} \rightsquigarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + \beta^2}$$

$$- f(t) = \sin(\beta t) = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i} \rightsquigarrow F(s) = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$$

$$- f(t) = A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t) \rightsquigarrow F(s) = \frac{A(s-\alpha) + B\beta}{(s-\alpha)^2 + \beta^2}$$

## A-2.3 Premier groupe de propriétés fonctionnelles

## **A-2.3.1** Transformée de Laplace des dérivées successives de f(t)

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$
(A-2.31)

#### **Exemples : Résoudre**

$$\varepsilon'' + 3\varepsilon' + 2\varepsilon = 0$$
(A-2.32)
$$\varepsilon'' + 3\varepsilon' + 2\varepsilon = 4\cos t$$

Vérifier

$$\mathcal{L}\left(\int_{t_0}^t f(u)du\right) = \frac{F(s)}{s} - \frac{1}{s}\int_0^t f(u)du \tag{A-2.33}$$

## A-2.4 Second groupe de propriétés fonctionnelles

## A-2.4.1 Théorème du retard

$$\mathcal{L}\left(E(t-a)f(t-a)\right) = e^{-as}F(s)$$

$$\mathcal{L}\left(e^{\lambda t}f(t)\right) = F(s-\lambda)$$
(A-2.34)

#### A-2.4.2 Théorème de composition

Soit g(t) le produit de convolution  $f_1(t) * f_2(t)$  ainsi défini

$$g(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$$

$$\mathcal{L}(f_1(t) * f_2(t)) = F_1(s) \cdot F_2(s)$$
(A-2.35)

#### Application

Avec  $f_1(t) = f_2(t) = 1$ , on trouve :

$$f(t) = t \quad \rightsquigarrow \quad F(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$f(t) = t^n \quad \rightsquigarrow \quad F(s) = \frac{n}{s^{n+1}}$$
(A-2.36)

#### Exemple

Résoudre de 2 façons différentes : $\varepsilon$ '' +  $\varepsilon = t$ , =  $t^2$ , =  $\sin(\omega t)$ , =  $e^{-t}$ 

## A-2.4.3 Distribution de Dirac

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ +\infty & \text{pour } t = 0 \\ 0 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$
(A-2.37)

Propriétés

$$\int_{a}^{b} \delta(t) dt = \begin{cases} 1 \operatorname{si} a < 0 \operatorname{et} b > 0\\ 0 \operatorname{si} ab = 0 \end{cases}$$
(A-2.38)

$$\begin{aligned} \int_{a}^{b} \delta(t) \, dt &= E(t) \\ \int_{-\infty}^{t} \delta(t-a) \, dt &= E(t-a) \\ \int_{0}^{t} f(t-\tau) \delta(\tau) \, d\tau &= f(t) = \int_{0}^{t} \delta(t-\tau) f(\tau) \, d\tau \\ f(t) * \delta(t) &= f(t) \to \delta(t) \text{ est élément neutre du produit de convolution } \Leftrightarrow \mathcal{L}(\delta(t)) = 1 \\ (A-2.39) \end{aligned}$$

A-18

f(t)	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$	f(t)	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$	f(t)	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$
1	$\frac{1}{s}$	cosh ωt	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$	t <sup>n</sup> e <sup>at</sup>	$\frac{n!}{\left(s-a\right)^{n+1}}$
t	$\frac{1}{s^2}$	sinh wt	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$	$(1+at)e^{at}$	$\frac{s}{\left(s-a\right)^2}$
t <sup>n</sup>	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$1-\cos\omega t$	$\frac{\omega^2}{s\left(s^2+\omega^2\right)}$	t cos wt	$\frac{s^2 - \omega^2}{\left(s^2 + \omega^2\right)^2}$
e <sup>at</sup>	$\frac{1}{s-a}$	$\cosh \omega t - 1$	$\frac{\omega^2}{s\left(s^2-\omega^2\right)^2}$	t sin ωt	$\frac{2\omega s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$\frac{e^{r_1t} - e^{r_2t}}{r_1 - r_2}$	$\frac{1}{(s-r_1)(s-r_2)}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s\sqrt{s}}$
cos wt	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{\left(s+a\right)^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$rac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$
sin wt	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	te <sup>at</sup>	$\frac{1}{\left(s-a\right)^2}$	$\delta(t)$	1

TABLE A-2.1 – Table des transformées de Laplace élémentaires

# **Calcul des variations**

#### Sommaire

A-3.1Extrêmum d'une intégrale A-21
A-3.2Condition d'Euler-Lagrange A-22
A-3.3Cas où la dérivée seconde intervient
A-3.4Importance des conditions aux limites
A-3.5Cas d'une fonctionnelle faisant intervenir des dérivées en temps
et en espace
A-3.6Remarque : Indépendance des formes de y dans la fonctionnelle I A-25

## A-3.1 Extrêmum d'une intégrale

On cherche l'extrêmum d'une intégrale de la forme :

$$I(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} \Phi(y, y', x) dx$$
 (A-3.40)

avec comme conditions aux limites  $y(x_1) = 0$  et  $y(x_2) = 0$ .

On cherche parmi toutes les fonctions  $\bar{y}(x)$  possibles, celles qui conduisent à une valeur extrêmale de I(y(x)). On note y(x) la famille des fonctions qui réalisent cet extrêmum. On peut exprimer toutes les fonctions possibles  $\bar{y}(x)$  en fonction des y(x), modulo une famille de fonctions arbitraires  $\eta(x)$ :

$$\bar{y}(x) = y(x) + \alpha \eta(x) \tag{A-3.41}$$

où  $\alpha$  est une constante.

On voit clairement que la fonctionnelle *I* réalise un minimum lorsque la valeur induite par la partie arbitraire  $\eta(x)$  de  $\bar{y}(x)$  est nulle. Dit autrement, la fonctionnelle  $\Psi(\alpha) = I(y(x) + \alpha \eta(x))$  vérifie l'inégalité :

$$\Psi(0) \le \Psi(\alpha) \tag{A-3.42}$$

pour tout  $\alpha$  assez petit.

On aura donc un minimum de *I* losrque  $\alpha$  est nul, ou encore la dérivée par rapport à  $\alpha$  est nulle quand  $\alpha$  est nul (en réalité tend vers 0) :

$$\delta I = \Psi'(0) = \left[\frac{dI(\bar{y}(x))}{d\alpha}\right]_{\alpha=0} = 0 \text{ et les C.L.} \begin{cases} \eta(x_1) = 0\\ \eta(x_2) = 0 \end{cases}$$
(A-3.43)

On définit ainsi la notion de variation, et on peut réécrire  $\bar{y}(x) = y + \delta y(x)$ . En introduisant cette notation, on peut désormais utiliser le formalisme habituel du calcul différentiel (A-3.44) où  $\delta y$  est associé à y mais n'est pas sa différentielle; elle représente une famille de fonctions proches (voir figure A-3.1). Finalement, le calcul des variations de l'intégrale permet de rechercher "simplement" une fonction dont la forme conduit à réaliser un extrêmum sur l'intervalle donné.

$$f = \frac{1}{2}k(y^2 + y'^2) \Rightarrow \delta(f) = \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'$$
  
=  $k(y\delta y + y'\delta y')$  (A-3.44)



- dy est un accroissement correspondant à y(x+dx) = y(x) + dy
- $\delta y$  est la valeur que prendra une fonction voisine, en l'occurrence  $y + \delta y$ , pour une valeur unique de la variable *x*.

#### A-3.2 Condition d'Euler-Lagrange

En reportant dans l'expression de I (A-3.40), la forme générale des fonctions à tester (A-3.41), on obtient une forme de *I* qui peut être développée selon le théorème de Taylor-Mac Laurin en supposant que *y* et *y'* sont des fonctions indépendantes (voir A-3.6) :

$$\int_{x_1}^{x_2} \Phi(y + \delta y, y' + \delta y', x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \Phi(y, y', x) dx + \alpha \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx + T.O.S.$$
  
$$\Leftrightarrow I(\bar{y}) = I(y) + \delta I(y, \delta y)$$
(A-3.45)

avec le dernier terme  $\delta I$  qui est appelé *première variation de I*, et qui peut se réécrire par intégration par parties en fonction des conditions aux limites :

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \delta y' \right] dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \right] \delta y dx + \alpha \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2}$$
(A-3.46)

avec les conditions aux limites précisées en (A-3.43), pour que I(y(x)) soit extrêmum, il est nécessaire et suffisant que  $\delta I$  soit nul en tout point du domaine, donc :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'} = 0 \quad \text{(Condition d'Euler- Lagrange)} \tag{A-3.47}$$

## A-3.3 Cas où la dérivée seconde intervient

$$I(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} \Phi(y, y', y'', x) dx$$
 (A-3.48)

aprés 2 intégrations par parties successives, on obtient la forme suivante de la première variation de  $\delta I$ :

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \right) \delta y dx + \alpha \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial \Phi}{\partial y''} \delta y dx + \alpha \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y''} \eta'(x) \right]_{x_1}^{x_2} - \alpha \left[ \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y''} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial \Phi}{\partial y''} \right) \delta y dx + \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y''} \right) \delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial y''} \delta y' \right]_{x_2}^{x_1} = 0$$
(A-3.49)

ce qui conduit à la condition d'Euler-Lagrange suivante :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial \Phi}{\partial y''} = 0$$
 (A-3.50)

et aux conditions aux limites associées :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y''} \end{pmatrix} |_{(x_1, x_2)} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y''} |_{(x_1, x_2)} = 0$$
(A-3.51)

## A-3.4 Importance des conditions aux limites

Traitons le cas d'une barre homogène en flexion statique. La forme de l'énergie de déformation d'un tel système s'écrit sous la forme :

$$I(y(x)) = \int_0^l \left( k y''^2 - 2\rho y \right) dx$$
 (A-3.52)

Après intégrations par parties, la première variation de I est :

$$\delta I(y(x)) = \int_0^l \left( k y'''' - \rho \right) \delta y dx + \left[ -k y'''(x) \delta y(x) + k y''(x) \delta y' \right]_0^l$$
(A-3.53)

Ainsi, l'extrêmum de *I* conduit à vérifier que cette première variation est nulle en tout point du domaine. On voit que le premier terme de cette expression, qui correspond à la condition d'Euler-Lagrange (A-3.50), est bien nulle en tout point de ]0, l[, par conséquent on a une équation du quatrième ordre en *y* à résoudre ce qui implique la connaissance de 4 conditions aux limites. Comme l'expression de  $\delta I$  doit être nulle, les termes de bord doivent donc s'annuler également pour toutes "fonctions test"  $\delta y$  et  $\delta y'$ . On a donc les termes de bord, conformément à l'expression générale de (A-3.56), qui doivent s'annuler :

$$\delta I(y(x)) = \left[-ky'''(x)\delta y(x) + ky''(x)\delta y'\right]_0^l$$

soit au total quatre conditions portant soit sur y''(x) ou y'''(x) ou bien sur la fonction test  $\delta y(x)$  ou  $\delta y'(x)$  qui, on le rappelle, sont supposées indépendantes (voir A-3.6).

"Il ressort immédiatement de l'observation des situations précédentes que le calcul des variations présente la précieuse caractéristique de mettre spontanément en évidence *le nombre exact de conditions aux limites* auxquelles il est nécessaire de satisfaire, ce qui est un élément de contrôle souvent très précieux dans le traitement de problèmes."

## A-3.5 Cas d'une fonctionnelle faisant intervenir des dérivées en temps et en espace

Dans le cas du principe d'Hamilton, le lagrangien du système fait intervenir des dépendances en espace et en temps. Nous proposons d'établir la condition de minimisation d'Euler-Lagrange pour ce cas :

$$I(y(x)) = \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_0^l \Phi(y, y', \dot{y}, \dot{y}', x) \, dx \right) \, dt \tag{A-3.54}$$

La première variation de I est :

$$\delta I(y(x)) = \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}'} \delta \dot{y}' \right\} dx \right) dt \qquad (A-3.55)$$

En effectuant l'intégration par parties en espace,

$$\begin{split} \delta I(y(x)) &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \delta y - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \right) \delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} + -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}'} \right) \delta \dot{y} \right\} dx \right) dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}'} \delta \dot{y} \right]_{x_2}^{x_1} dt \\ &= 0 \end{split}$$

(A-3.56)

puis l'intégration par parties en temps :

$$\delta I(y(x)) = \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}'} \right) \right) \right\} \delta y \, dx \right) \, dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \delta y - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}'} \right) \delta y \right]_{x_2}^{x_1} \, dt + \left[ \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}'} \delta y \right]_{t_2}^{t_1} \right]_{x_2}^{x_1} \\ = 0$$
(A-3.57)

ce qui conduit à la condition de minimisation de d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}'} \right) \right) = 0, \quad \forall t, \forall x$$
(A-3.58)

et aux conditions aux limites associées, sachant que le champ virtuel est nul aux instants  $t_1$  et  $t_2$ , ce qui annule le dernier terme de l'expression A-3.57 :

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\delta y - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial \dot{y}'}\right)\right]_{x_1}^{x_2} = 0, \ \forall t \tag{A-3.59}$$

Si, de plus, des conditions sont imposées sur la valeur de la fonctionnelle à ses bornes du type  $[\Phi(y,y',\dot{y},\dot{y}',x)y]_{x_1}^{x_2}$ , comme c'est la cas par exemple dans les solides de type barres, cordes, et poutres, pour les efforts et moments terminaux, les conditions aux limites ci-dessus (A-3.59) sont complétées et deviennent :

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y'} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial \dot{y}'}\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right]_{x_1}^{x_2} = 0, \ \forall t \tag{A-3.60}$$

# A-3.6 Remarque : Indépendance des formes de y dans la fonctionnelle *I*

Le problème physique posé avec cette formulation a pour solution la fonction y(x)dont la dérivée y'(x) dépend, bien évidemment. Quelle est alors l'hypothèse, si hypothèse il y a, qui permet de supposer que y et y' sont indépendantes ?

On étudie maintenant le cas d'une fonctionnelle F qui dépend de y et d'une autre forme de y, notée g(y). On a alors la différentielle de la fonctionnelle :

$$dF = \frac{\partial F(y,g(y),x)}{\partial y}dy + \frac{\partial F(y,g(y),x)}{\partial g(y)}\frac{dg(y)}{dy}dy$$
(A-3.61)

si, par exemple, g(y) est la différentielle telle que  $g(y) = \frac{dy}{dx} = y'$ , alors la différentielle de *F* devient :

$$dF = \frac{\partial F(y,g(y),x)}{\partial y}dy + \frac{\partial F(y,g(y),x)}{\partial \frac{dy}{dx}}\frac{dy}{dy}dy$$

$$= \frac{\partial F(y,g(y),x)}{\partial y}dy + \frac{\partial F(y,g(y),x)}{\partial y'}dy'$$
(A-3.62)

par extension, il vient naturellement :

$$\delta I = \frac{\partial F(y,g(y),x)}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F(y,g(y),x)}{\partial y'} \delta y'$$
(A-3.63)

Sans supposer aucune indépendance de y(x) et y'(x), on arrive naturellement aux résultats connus (A-3.46). Il n'y a donc aucune hypothèse physique sous jacente, et cette démarche calculatoire peut s'appliquer de façon systématique à toute fonctionnelle dépendant de n'importe quelle forme de fonctions.

# Références

- Mécanique des structures, Tome 3 : Thermique des structures, Dynamique des structures par S.Laroze, Ed. Masson 1992.
- Mécanique des vibrations linéaires par M.Lalanne, P.Berthier et J.Der Hagopian, Ed. Masson 1992
- Introduction à la mécanique des milieux continus par P.Germain et P.Muller,
   2<sup>ième</sup> édition, collection *Enseignement de la physique*, Ed. Masson 1995
- Cours de mécanique générale de l'ÉNS des mines de Saint-Étienne (lère partie) par P.Palat, année 1981
- Les Principes Variationnels par M. Bonvalet, collection *Principes Mathématiques* de la Physique - 2, Ed. Masson 1993
- Cours de Mécanique des Structures de l'ÉNS des mines de Saint-Étienne par S.Drapier, années 2002 et 2003