

Calcul par intervalles et propagation de contraintes Pour l'optimisation globale

pour l'école des mines de Saint Etienne

Luc Jaulin et Pascal Roustant

1. Calcul par intervalles

Nous appellerons *intervalle*, un ensemble fermé et connexe de \mathbb{R} . Par exemple

$$[1, 2],] - \infty, 0[, \{0\}, \mathbb{R} \text{ et } \emptyset$$

sont des intervalles alors que

$$]0, 1], [2, 1], [1, 2] \cup [3, 4]$$

n'en sont pas. Notons que l'intersection d'un nombre fini ou infini d'intervalle est un intervalle. Si \mathbb{A} est un ensemble, $[\mathbb{A}]$ dénotera le plus petit ensemble contenant \mathbb{A} .

1.1. Arithmétique par intervalles.

Si $\diamond \in \{+, -, \cdot, /, \max, \min\}$, où \cdot est l'opérateur de multiplication, on a

$$[x] \diamond [y] \triangleq \{x \diamond y \mid x \in [x], y \in [y]\}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} [x^-, x^+] + [y^-, y^+] &= [x^- + y^-, x^+ + y^+] \\ [x^-, x^+] \cdot [y^-, y^+] &= [\min(x^- y^-, x^+ y^-, x^- y^+, x^+ y^+), \\ &\quad \max(x^- y^-, x^+ y^-, x^- y^+, x^+ y^+)] \\ \max([x^-, x^+], [y^-, y^+]) &= [\max(x^-, y^-), \max(x^+, y^+)] \end{aligned}$$

Par exemple, nous avons $([1, 2] + [-3, 4]) \cdot [-1, 5] = [-2, 6] \cdot [-1, 5] = [-10, 30]$,

1.2. Fonctions élémentaires

Si $f \in \{\cos, \sin, \text{sqr}, \text{sqrt}, \log, \exp, \dots\}$

$$f([x]) \triangleq \{f(x) \mid x \in [x]\}.$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} \sin([0, \pi]) &= [0, 1] \\ \text{sqr}([-1, 3]) &= [-1, 3]^2 = [0, 9] \\ \text{abs}([-7, 1]) &= [0, 7] \\ \text{sqrt}([-10, 4]) &= \sqrt{[-10, 4]} = [0, 2] \\ \log([-2, -1]) &= \emptyset \end{aligned}$$

1.3. Fonction d'inclusion

1.3.1. Pavé

Un *pavé* $[\mathbf{x}]$ of \mathbb{R}^n est le produit cartésien de n intervalles

$$[\mathbf{x}] = [x_1^-, x_1^+] \times \dots \times [x_n^-, x_n^+]$$

L'ensemble de tous les pavés de \mathbb{R}^n sera dénoté $\mathbb{I}\mathbb{R}^n$. La $i^{\text{ème}}$ composante de $[\mathbf{x}]$ est notée $[x_i]$. La *longueur* $w([\mathbf{x}])$ de $[\mathbf{x}]$ est la longueur de son plus grand côté. Par exemple, la longueur de $[\mathbf{x}] = [1, 2] \times [-1, 3]$ est égale à 4. Le *plan principal* de $[\mathbf{x}]$ est le plan de symétrie de $[\mathbf{x}]$ perpendiculaire au côté de plus grande longueur. *Bisecter* un pavé $[\mathbf{x}]$ signifie le découper en deux, suivant son plan principal. Par exemple, bisecter $[\mathbf{x}] = [1, 2] \times [-1, 3]$ produit deux pavés $[\mathbf{x}](1) = [1, 2] \times [-1, 1]$ et $[\mathbf{x}](2) = [1, 2] \times [1, 3]$.

1.3.2. Fonction d'inclusion

Soit \mathbf{f} une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m . Une fonction ensembliste $[\mathbf{f}]$ définie de $\mathbb{I}\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{I}\mathbb{R}^m$, est une *fonction d'inclusion* de \mathbf{f} si

$$\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n, \quad \mathbf{f}([\mathbf{x}]) \subset [\mathbf{f}]([\mathbf{x}]).$$

Pour calculer une telle fonction d'inclusion, il suffit de substituer dans l'expression de \mathbf{f} , les opérations sur les réels par les mêmes opérations sur les intervalles.

Exemple 1.1. La fonction $f(x) = x^2 + 2x + 4$. Une fonction d'inclusion pour f se calcule comme suit

$$[f]([x]) = [x] \cdot [x] + 2[x] + 4$$

Ainsi, si $[x] = [-3, 4]$, nous avons

$$[f]([-3, 4]) = [-3, 4] \cdot [-3, 4] + 2[-3, 4] + 4 = [-12, 16] + [-6, 8] + 4 = [-14, 28].$$

Notons que l'image par f de l'intervalle $[x]$ est $f([-3, 4]) = [3, 28]$ qui est un sous ensemble de $[f]([-3, 4]) = [-14, 28]$.

Exemple 1.2. Soit la fonction

$$\mathbf{f} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) \quad \rightarrow \quad (x_1 x_2, x_1^2, x_1 - x_2) \end{array}$$

Une fonction d'inclusion est donnée par

$$[\mathbf{f}] : \begin{array}{l} \mathbb{I}\mathbb{R}^2 \quad \rightarrow \quad \mathbb{I}\mathbb{R}^3 \\ ([x_1], [x_2]) \quad \rightarrow \quad ([x_1] \cdot [x_2], [x_1]^2, [x_1] - [x_2]) \end{array}.$$

Ainsi, $[\mathbf{f}]([-1, 1] \times [-1, 1]) = [-1, 1] \times [0, 1] \times [-2, 2]$.

2. Inversion ensembliste

2.1. Définition

Un *problème d'inversion ensembliste* s'exprime de la façon suivante :

Soit \mathbf{f} une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m et $[\mathbf{y}]$ un pavé de \mathbb{R}^m . Caractériser l'ensemble \mathbb{X} défini par

$$\mathbb{X} \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in [\mathbf{y}]\} = \mathbf{f}^{-1}([\mathbf{y}]).$$

où \mathbf{f}^{-1} est la *fonction réciproque* de \mathbf{f} .

Exemple 2.1. Caractériser un des sous-ensembles

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_1 &\triangleq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \\ \mathbb{X}_2 &\triangleq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\} \\ \mathbb{X}_3 &\triangleq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \text{ et } x_1 - x_2 \in [0, 1]\} \end{aligned}$$

est un problème d'inversion ensembliste. En effet

$$\begin{aligned}\mathbb{X}_1 &\triangleq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \in]-\infty, 1]\} \\ \mathbb{X}_2 &\triangleq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \in \{1\}\} \\ \mathbb{X}_3 &\triangleq \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \in]-\infty, 1] \times [0, 1] \right\}\end{aligned}$$

2.2. Pile-File

Une *liste* un ensemble (éventuellement vide) d'éléments ordonnés. Si cette liste n'est pas vide, tous les éléments, sauf un (appelé le dernier) possède un suivant. Tous, sauf un (appelé le premier) possède un précédent. Il se peut que le dernier et le premier coïncident. Dans ce cas, la liste ne possède qu'un seul élément.

Une *file* est une liste sur laquelle on peut faire 2 opérations : (i) rajouter un élément à la fin (*push*) (ii) enlever le premier élément de la file (*pull*).

Une *pile* est une liste sur laquelle on peut faire 2 opérations : (i) rajouter un élément au début (*stack*) (ii) enlever le premier élément de la file (*pop*).

Exemple 2.1. Soit \mathcal{L} une file initialement vide. Le tableau suivant indique l'évolution de la file en fonction des opérations effectuées.

k	opération	résultat
0		$\mathcal{L} = \emptyset$
1	$push(\mathcal{L}, a)$	$\mathcal{L} = \{a\}$
2	$push(\mathcal{L}, b)$	$\mathcal{L} = \{a, b\}$
3	$x := pull(\mathcal{L})$	$x = a, \mathcal{L} = \{b\}$
4	$x := pull(\mathcal{L})$	$x = b, \mathcal{L} = \emptyset$

Pour une pile initialement vide, nous avons

k	opération	résultat
0		$\mathcal{L} = \emptyset$
1	$stack(\mathcal{L}, a)$	$\mathcal{L} = \{a\}$
2	$stack(\mathcal{L}, b)$	$\mathcal{L} = \{a, b\}$
3	$x := pop(\mathcal{L})$	$x = b, \mathcal{L} = \{a\}$
4	$x := pop(\mathcal{L})$	$x = a, \mathcal{L} = \emptyset$

2.3. Algorithme d'inversion ensembliste

L'algorithme que nous allons proposer partitionne ce pavé en un ensemble de sous-pavés $[\mathbf{x}]$. Pour tester si un pavé $[\mathbf{x}]$ est à l'intérieur ou à l'extérieur de \mathbb{X} , nous allons utiliser le test suivant.

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad & [\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \subset [\mathbf{y}] \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{x}] \subset \mathbb{X} \\ \text{(ii)} \quad & [\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \cap [\mathbf{y}] = \emptyset \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{x}] \cap \mathbb{X} = \emptyset.\end{aligned}$$

Les pavés pour lesquels nous n'avons pas réussi à montrer qu'ils étaient à l'extérieur ou à l'intérieur de \mathbb{X} seront bisectés, sauf s'ils sont trop petits, c'est-à-dire d'une taille inférieure à la précision requise ε . Le pavé $[\mathbf{x}](0)$ est un pavé censé contenir l'ensemble solution \mathbb{X} .

```

Step 1   $\mathcal{L} := \{[\mathbf{x}](0)\};$ 
Step 2  pull  $([\mathbf{x}])$ ;
Step 3  if  $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \subset [\mathbf{y}]$ , {draw  $([\mathbf{x}]$ , 'red')};
Step 4  elseif  $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \cap [\mathbf{y}] = \emptyset$  {draw  $([\mathbf{x}]$ , 'blue')};
Step 5  elseif  $w(\mathbf{x}) < \varepsilon$ , {draw  $([\mathbf{x}]$ , 'yellow')};
Step 6  else bisect  $[\mathbf{x}]$  en  $[\mathbf{x}](1)$  et  $[\mathbf{x}](2)$ ; Push  $([\mathbf{x}](1), [\mathbf{x}](2))$ ;
Step 7  if  $\mathcal{L} \neq \emptyset$ , go to 2

```

Si $\Delta\mathbb{X}$ dénote l'union des pavés jaunes et \mathbb{X}^- l'union des rouges, alors, l'ensemble solution \mathbb{X} est encadré par :

$$\mathbb{X}^- \subset \mathbb{X} \subset \mathbb{X}^- \cup \Delta\mathbb{X}. \quad (2.1)$$

2.4. Domaine de stabilité

Le *domaine de stabilité* \mathbb{S}_p du polynôme

$$P(s, \mathbf{p}) = s^n + a_{n-1}(\mathbf{p})s^{n-1} + \dots + a_1(\mathbf{p})s + a_0(\mathbf{p})$$

est l'ensemble des \mathbf{p} tels que $P(s, \mathbf{p})$ soit stable. Considérons par le polynôme $P(s, \mathbf{p})$ donné par

$$s^3 + (p_1 + p_2 + 2)s^2 + (p_1 + p_2 + 2)s + 2p_1p_2 + 6p_1 + 6p_2 + 2 + \sigma^2,$$

$\sigma = 0.5$. La table de Routh est donnée par

1	$p_1 + p_2 + 2$
$p_1 + p_2 + 2$	$2p_1p_2 + 6p_1 + 6p_2 + 2 + \sigma^2$
$\frac{(p_1+p_2+2)^2 - 2p_1p_2 + 6p_1 + 6p_2 + 2 + \sigma^2}{p_1+p_2+2} = \frac{(p_1-1)^2 + (p_2-1)^2 - \sigma^2}{p_1+p_2+2}$	0
$2p_1p_2 + 6p_1 + 6p_2 + 2 + \sigma^2 = 2(p_1 + 3)(p_2 + 3) - 16 + \sigma^2$	0

Le domaine de stabilité est donc défini par

$$\mathbb{S}_p \triangleq \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{r}(\mathbf{p}) > \mathbf{0}\} = \mathbf{r}^{-1}([0, +\infty[^{\times n}).$$

où

$$\mathbf{r}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} p_1 + p_2 + 2 \\ (p_1 - 1)^2 + (p_2 - 1)^2 - \sigma^2 \\ 2(p_1 + 3)(p_2 + 3) - 16 + \sigma^2 \end{pmatrix}.$$

3. Contracteurs

3.1. Définition

L'opérateur $\mathcal{C}_{\mathbb{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un contracteur pour l'ensemble \mathbb{X} de \mathbb{R}^n si

$$\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{R}^n, \begin{cases} \mathcal{C}_{\mathbb{X}}([\mathbf{x}]) \subset [\mathbf{x}] & \text{(contractance),} \\ \mathcal{C}_{\mathbb{X}}([\mathbf{x}]) \cap \mathbb{X} = [\mathbf{x}] \cap \mathbb{X} & \text{(correction),} \end{cases}$$

Nous dirons que

$\mathcal{C}_{\mathbb{X}}$ est <i>monotone</i> si	$[\mathbf{x}] \subset [\mathbf{z}] \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{X}}([\mathbf{x}]) \subset \mathcal{C}_{\mathbb{X}}([\mathbf{z}])$
$\mathcal{C}_{\mathbb{X}}$ est <i>minimal</i> si	$\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{R}^n, \mathcal{C}_{\mathbb{X}}([\mathbf{x}]) = [[\mathbf{x}] \cap \mathbb{X}]$
$\mathcal{C}_{\mathbb{X}}$ est <i>fin</i> si	$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathcal{C}_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}\} \cap \mathbb{X}$
$\mathcal{C}_{\mathbb{X}}$ est <i>idempotent</i> si	$\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{R}^n, \mathcal{C}_{\mathbb{X}}(\mathcal{C}_{\mathbb{X}}([\mathbf{x}])) = \mathcal{C}_{\mathbb{X}}([\mathbf{x}])$.

3.2. Projection de contraintes

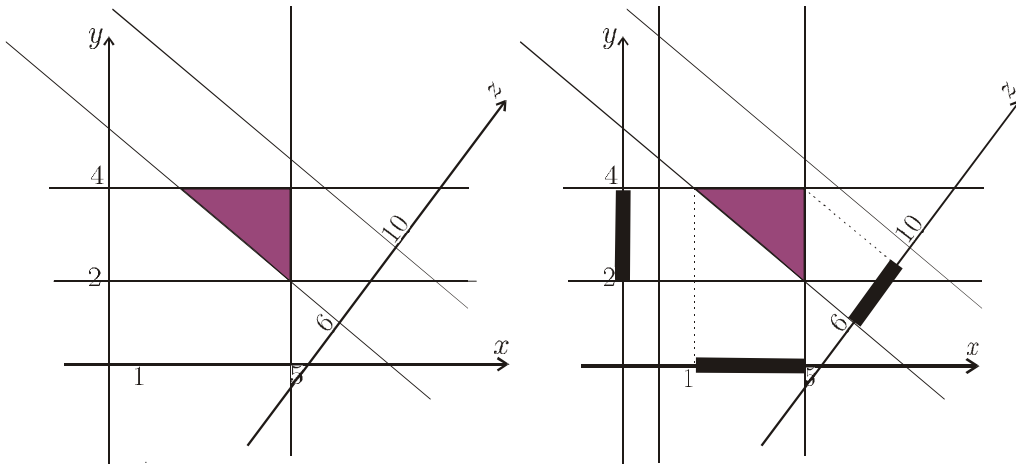
Soient 3 variables x, y, z telles que

$$\begin{aligned} x &\in [1, 5] \\ y &\in [2, 4] \\ z &\in [6, 10] \\ z &= x + y \end{aligned}$$

Les valeurs 1 pour x et 10 pour z sont dites inconsistantes.

Projeter une contrainte (ici, $z = x + y$), c'est calculer les plus petits intervalles qui ne contiennent que des valeurs constantes. Pour notre exemple, cela revient à projeter 3 fois (suivant x, y , puis z) le sous-ensemble de \mathbb{R}^3 donné par

$$\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in [1, 5] \times [2, 4] \times [6, 10] \mid z = x + y\}.$$



Méthode de calcul des trois projections de \mathbb{S} suivant x, y et z

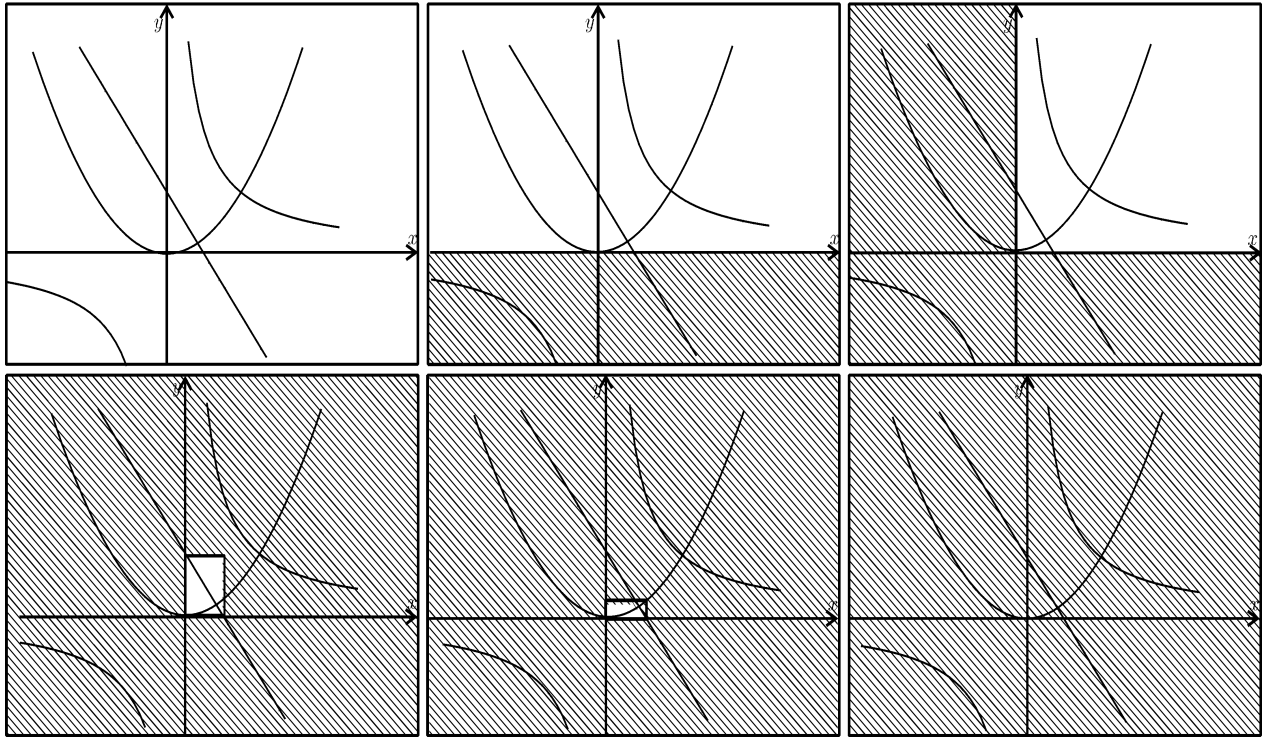
$$\begin{aligned} z = x + y &\Rightarrow z \in [6, 10] \cap ([1, 5] + [2, 4]) \\ &= [6, 10] \cap [3, 9] = [6, 9] \\ x = z - y &\Rightarrow x \in [1, 5] \cap ([6, 10] - [2, 4]) \\ &= [1, 5] \cap [2, 8] = [2, 5] \\ y = z - x &\Rightarrow y \in [2, 4] \cap ([6, 10] - [1, 5]) \\ &= [2, 4] \cap ([1, 9] - [1, 5]) = [2, 4] \end{aligned}$$

3.3. Propagation de contraintes

Soient les trois contraintes suivantes

$$\begin{aligned} (C_1) &: y = x^2 \\ (C_2) &: xy = 1 \\ (C_3) &: y = -2x + 1 \end{aligned}$$

A chaque variable on effecte le domaine $] -\infty, \infty[$. Une propagation de contraintes consiste à projeter les contraintes jusqu'au blocage. La figure ci-dessous illustre cette propagation.



La première figure représente les trois contraintes. Dans la deuxième, la première contrainte (la parabole) a permis d'éliminer l'ensemble des (x, y) où $y < 0$. L'hyperbole permet ensuite d'éliminer les $x < 0$, comme représenté sur la troisième figure. La prise en compte de la troisième contrainte (la droite), nous montre que les solutions sont toutes dans le rectangle blanc de la quatrième figure. La parabole est reprise en compte dans la cinquième figure. Enfin, la deuxième contrainte, abouti à un ensemble solution vide.

Le calcul pour démontrer l'inconsistance du système des 3 équations à deux inconnues est le suivant.

$$\begin{aligned}
 (C_1) &\Rightarrow y \in]-\infty, \infty[^2 = [0, \infty[\\
 (C_2) &\Rightarrow x \in 1/[0, \infty[= [0, \infty[\\
 (C_3) &\Rightarrow y \in [0, \infty[\cap ((-2) \cdot [0, \infty[+ 1) \\
 &= [0, \infty[\cap (]-\infty, 1]) = [0, 1] \\
 &x \in [0, \infty[\cap (-[0, 1]/2 + 1/2) \\
 &= [0, 1/2] \\
 (C_1) &\Rightarrow y \in [0, 1] \cap [0, 1/2]^2 = [0, 1/4] \\
 (C_2) &\Rightarrow x \in [0, 1/2] \cap 1/[0, 1/4] = \emptyset \\
 &y \in [0, 1/4] \cap 1/\emptyset = \emptyset
 \end{aligned}$$

3.4. Décomposition en contraintes primitives

Pour les contraintes plus complexes, il nous faut effectuer une décomposition. Par exemple,

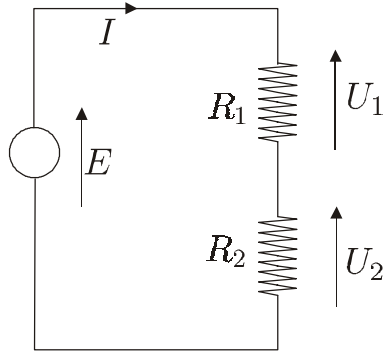
$$\begin{aligned}
 x + \sin(y) - xz &\leq 0, \\
 x \in [-1, 1], y \in [-1, 1], z &\in [-1, 1]
 \end{aligned}$$

se décompose en

$$\left\{ \begin{array}{lll}
 a = \sin(y) & x \in [-1, 1] & a \in]-\infty, \infty[\\
 b = x + a & y \in [-1, 1] & b \in]-\infty, \infty[\\
 c = xz & z \in [-1, 1] & c \in]-\infty, \infty[\\
 b - c = d & & d \in]-\infty, 0]
 \end{array} \right. ,$$

4. Exemple d'application de la propagation de contraintes pour un problème d'estimation à erreurs bornées

Considérons le circuit électrique représenté sur la figure ci-dessous.



Les contraintes liant les différentes variables de ce circuit sont

$$\begin{aligned} P &= EI; E = (R_1 + R_2) I; \\ U_1 &= R_1 I; U_2 = R_2 I; E = U_1 + U_2. \end{aligned}$$

Les domaines initiaux pour les variables, obtenus par exemple à la suite de la prise d'une mesure, sont

$$\begin{aligned} R_1 &\in]-\infty\Omega, \infty\Omega[, R_2 \in]-\infty\Omega, \infty\Omega[, \\ E &\in [23V, 26V], I \in [4A, 8A], U_1 \in [10V, 11V], \\ U_2 &\in [14V, 17V], P \in [124W, 130W], \end{aligned}$$

Après propagation, nous obtenons que les domaines contractés sont

$$\begin{aligned} R_1 &\in [1.84\Omega, 2.31\Omega], R_2 \in [2.58\Omega, 3.35\Omega], \\ I &\in [4.769A, 5.417A], U_1 \in [10V; 11V], U_2 \in [14V; 16V], \\ E &\in [24V; 26V], P \in [124W, 130W]. \end{aligned}$$