Contrôle d'algèbre et géométrie élémentaires

Licence 1 - IMMA - S1 - Groupe 5

11/10/2006

Durée : 1h15min.

Tous documents interdits. Les calculatrices et les téléphones portables, même â titre d'horloge sont interdits.

Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction.

Exercice 1. *Questions de cours.*

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq n$. Rappeler la définition de $\binom{n}{k}$.*

2. *Soit f la fonction qui associe à tout point du plan d'affixe z son image d'affixe $f(z)$ par une rotation telle que :*

$$f(z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(z - e^{-i\frac{\pi}{3}}) + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Déterminez le centre et l'angle de cette rotation.

Exercice 2. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\theta \in \mathbb{R}$. On souhaite montrer que :*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{(2k-n)i\theta} = (2\cos\theta)^n \tag{1}$$

1. *La démonstration de cet exercice fait appel à un théorême du cours. Rappelez-le en toute généralité.*

2. *Expliquez comment vous instanciez les variables du théorême pour démontrer l'égalité (1). Puis en déduire que :*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{(2k-n)i\frac{\pi}{3}} = 1 \tag{2}$$

Exercice 3. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points du plan, placés dans un repère orthonormé d'origine O. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k est associé à l'affixe complexe z_k tel que $z_0 = 1$ et A_{k+1} est l'image de A_k par la rotation de centre O et d'angle $(k+1)\theta$.*

1. *Montrez par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n = \prod_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$$

2. *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $z_n = e^{\frac{n(n+1)}{2}\theta i}$.

3. *Calculer l'affixe du point* A_{51} *lorsque l'angle* θ *est égal à* $\frac{\pi}{26}$.

Exercice 4. *Le but de cet exercice est de trouver les solutions de l'équation polynomiale suivante :*

$$\frac{1}{2}z^2 + \left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}} - \sqrt{\frac{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}i\right)z - \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)i = 0 \qquad (3)$$

1. *Calculer le discriminant* Δ *de ce polynôme.*

2. *Écrire le discriminant sous forme exponentielle. Pour calculer l'argument, il vous faudra exprimer son cosinus et son sinus en fonction de cosinus et de sinus connus. Si vous n'avez pas su calculer* Δ *(ou que vous n'avez pas le temps !), supposez qu'il existe* $A, B \in \mathbb{R}$ *tels que* $\Delta = A + iB$, *et expliquez comment vous calculeriez la forme exponentielle.*

3. *Calculer les racines carrées de* $\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}i$.

4. *En déduire les 2 solutions de l'équation (3).*