Correction du Contrôle C1

Licence 1 - IMMA - S1 - Groupe 5

25/10/2006

Exercice 1. *Questions de cours.*

1. $\binom{n}{k}$ *correspond au nombre de manières de choisir* k *éléments dans un ensemble de* n *éléments, indépendemment de l'ordre dans lequel ils sont choisis.* $\binom{n}{k}$ *se lit "k parmi n" et se calcule avec la formule:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2. *Soit* M *un point du plan d'affixe* $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(z - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\ &= e^{i\frac{\pi}{6}}\left(z - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) + e^{-i\frac{\pi}{6}} \\ &= e^{i\frac{\pi}{6}}z - e^{-i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}} \\ &= e^{i\frac{\pi}{6}}z \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction associée à la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ *et de centre l'origine du repère.* □

Exercice 2. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et soit* $\theta \in \mathbb{R}$.

1. *Pour démontrer cette égalité, nous utilisons le théorême 1.2.3 du cours qui s'énonce ainsi:*

   Théorême. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *tout* $x \in \mathbb{C}$ *et tout* $y \in \mathbb{C}$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

2. *En utilisant le théorême précédent avec* $x = e^{i\theta}$ *et* $y = e^{-i\theta}$ *et en remarquant que pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $e^{(2k-n)i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^k \left(e^{-i\theta}\right)^{n-k}$, *on en déduit*

que:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{(2k-n)i\theta} &= \left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^n \\ &= (2\cos\theta)^n\end{aligned}$$

En appliquant cette égalité pour $\theta = \frac{\pi}{3}$, on obtient:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{(2k-n)i\frac{\pi}{3}} = 1^n = 1$$

□

Exercice 3. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points du plan, placés dans un repère orthonormé d'origine O. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k est associé à l'affixe complexe z_k tel que $z_0 = 1$ et A_{k+1} est l'image de A_k par la rotation de centre O et d'angle $(k+1)\theta$.*

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété*

$$P_n : \text{“}z_n = \prod_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\text{”}$$

   - *$z_0 = 1$ et $\prod_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = 1$ donc P_0 est vraie.*
   - *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vraie. On va montrer que P_{n+1} est aussi vraie.*

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n+1} e^{ik\theta} &= e^{i(n+1)\theta}\prod_{k=0}^{n} e^{ik\theta} && \textit{(en sortant le dernier facteur du produit)} \\ &= e^{i(n+1)\theta} z_n && \textit{(en utilisant l'hypothèse de récurrence)}\end{aligned}$$

   Or z_{n+1} est l'affixe du point A_{n+1}, image de A_n d'affixe z_n par rotation de centre O et d'angle $(n+1)\theta$. Donc, d'après le théorême 1.5.2 du cours, l'affixe de A_{n+1} est déterminée par la formule $z_{n+1} = e^{i(n+1)\theta} z_n$. Par conséquent, $z_{n+1} = \prod_{k=0}^{n+1} e^{ik\theta}$ et donc P_{n+1} est vraie.

   Finalement, le principe de récurrence nous assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, i.e.,

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \prod_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$$

2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Multiplier des exponentielles revient à ajouter les exposants.*

De ce fait,

$$\begin{aligned} z_n &= \prod_{k=0}^{n} e^{ik\theta} && \textit{(formule démontrée ci-dessus)} \\ &= e^{\sum_{k=0}^{n} ik\theta} && \textit{(somme des exposants)} \\ &= e^{i\theta \sum_{k=0}^{n} k} && \textit{(mise en facteur de } i\theta\textit{)} \end{aligned}$$

En outre, d'après le théorême 1.2.1 du cours, $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. *Donc*

$$z_n = e^{\frac{n(n+1)}{2}\theta i}$$

et ce, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. *L'affixe du point* A_{51} *est donnée par la formule ci-dessus pour* $n = 51$ *et* $\theta = \frac{\pi}{26}$. *Donc*

$$\begin{aligned} z_{51} &= e^{\frac{51(51+1)}{2}\frac{\pi}{26}i} && \textit{(formule ci-dessus)} \\ &= e^{51\pi i} \\ &= e^{\pi i} && \textit{(périodicité de l'exponentielle complexe)} \\ &= -1 \end{aligned}$$

A_51 *est le point de coordonnées* $(-1, 0)$.

□

Exercice 4. *Pour alléger la rédaction, on définit les constantes suivantes:*

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \\ \beta &= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}} - \sqrt{\frac{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}i \\ \gamma &= -\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)i \end{aligned}$$

1. *Le déterminant vaut:*

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma \\ &= \left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}} - \sqrt{\frac{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}i\right)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times -\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)i \\ &= \sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}i \end{aligned}$$

2. $\Delta = |\Delta| e^{\arg \Delta}$. *On calcule d'abord le module de Delta:*

$$\begin{aligned} |\Delta| &= \sqrt{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

On en déduit que:

$$\begin{cases} \cos(\arg \Delta) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ \sin(\arg \Delta) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$

On ne reconnaît pas le cosinus et le sinus d'un angle connu. Nous allons donc calculer $\cos(2 \arg \Delta)$ *et* $\sin(\arg \Delta)$ *en espérant tomber sur une valeur remarquable.*

$$\begin{cases} \cos(2\arg\Delta) = \cos^2(\arg\Delta) - \sin^2(\arg\Delta) & \textit{(formule du cours de terminale)} \\ \qquad = \left(\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 & \textit{(équations ci-dessus)} \\ \qquad = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \\ \sin(2\arg\Delta) = 2\sin(\arg\Delta)\cos(\arg\Delta) & \textit{(formule du cours de terminale)} \\ \qquad = 2\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} & \textit{(équations ci-dessus)} \\ \qquad = \dfrac{1}{2} & \end{cases}$$

On reconnaît le cosinus et le sinus de l'angle $\frac{5\pi}{6}$. *Donc* $\arg \Delta = \frac{5\pi}{12}$ *ou* $\arg \Delta = \frac{17\pi}{12}$. *On vérifie facilement que* $\arg \Delta = \frac{5\pi}{12}$ *car* $\cos(\arg \Delta) > 0$. *Finalement, la forme exponentielle de* Δ *est* $2e^{\frac{5\pi}{12}i}$.

3. *D'après ce qui précède, les racines carrées de* $\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}i$ *sont les racines carrées de* $2e^{\frac{5\pi}{12}i}$. *Leurs valeurs respectives sont* $2e^{\frac{5\pi}{24}i}$ *et* $2e^{\frac{29\pi}{24}i}$.

4. *On note* δ_1 *et* δ_2 *les racines de* Δ. *Alors, les solutions* s_1 *et* s_2 *de l'équation sont données par:*

$$s_1 = \frac{-\beta + \delta_1}{2\alpha} = (\sqrt{2}-2)\cos(\frac{29\pi}{24}) - (\sqrt{2}+2)\sin(\frac{29\pi}{24})i$$

et

$$s_2 = \frac{-\beta + \delta_2}{2\alpha} = (\sqrt{2}+2)\cos(\frac{29\pi}{24}) + (2-\sqrt{2})\sin(\frac{29\pi}{24})i$$

□