Mécanique analytique

Toolbox nanophysique

J. Bruchon
École des Mines de Saint-Étienne
Centre SMS

septembre-octobre 2019

Table des matières

1 Les équations du mouvement **4**
1.1 Coordonnées généralisées 4
1.2 Principe de moindre action 4
1.3 Principe de relativité de Galilée 7
1.4 Lagrangien d'une particule libre 8
1.5 Lagrangien d'un système de particules 10

2 Lois de conservation et symétries **13**
2.1 Quantité de mouvement 14
2.2 Centre de masse 15
2.3 Moment cinétique (ou moment angulaire) 16
2.4 Énergie 18

3 Intégration des lois du mouvement **19**
3.1 Mouvement dans un champ de force centrale 19
3.2 Problème de Kepler 23

4 Équations canoniques de Hamilton **26**
4.1 Transformée de Legendre 26
4.2 Équations de Hamilton 28
4.3 Hamiltonien d'un oscillateur harmonique 29
4.4 Théorème de Liouville 30
4.5 Crochet de Poisson 33
4.6 Transformations canoniques 35
4.7 Transformations canoniques infinitésimales et symétries 38

5 Particule chargée dans un champ électromagnétique **44**
5.1 Particule dans un champ magnétique 45
5.2 Particule dans un champ électromagnétique 47
5.3 Mouvement dans un champ magnétique uniforme 47

Bibliographie

— *Course of Theoretical Physics*, Volume 1 (Mechanics, Third Edition), L.D. Landau et E.M. Lifshitz.
— *Le cours de physique* de Feynman (mécanique 1).
— *The Theoretical Minimum*, L. Susskind.
— *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, V. I. Arnold.
— *The Variational Principles of Mechanics*, C. Lanczos.

1 Les équations du mouvement

1.1 Coordonnées généralisées

Un des concepts fondamentaux de la mécanique est celui de particule, ou encore point matériel. On désigne ainsi un corps dont les dimensions peuvent être négligées dans l'étude de son mouvement. Ceci dépend bien sûr du problème étudié. Ainsi, une planète peut être assimilée à un point matériel lorsque l'on étudie sa rotation autour de son étoile, mais ce n'est plus vrai pour l'étude de sa rotation autour de son axe.

La position d'une particule est décrite par son vecteur position $\boldsymbol{r}$ dont les composantes sont ses coordonnées cartésiennes x, y, z. La dérivée $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$ de $\boldsymbol{r}$ par rapport au temps est la vitesse de la particule, tandis que sa dérivée seconde $d^2\boldsymbol{r}/dt^2$ est son accélération. On notera aussi $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$.

Pour définir la position de N particules dans l'espace, il est nécessaire de spécifier N vecteurs position, donc $3N$ coordonnées. **Le nombre de quantités indépendantes devant être spécifiées pour définir de manière unique la position d'un tel système est appelé le nombre de degrés de liberté du système**. Ici, ce nombre vaut $3N$. Ces quantités ne sont pas nécessairement les coordonnées cartésiennes des particules. Ainsi, s quantités $q_1, \cdots, q_s$ définissant complètement la position d'un système à s degrés de liberté, sont appelées **coordonnées généralisées du système**, et leurs dérivées $\dot{q}_i$ sont les **vitesses généralisées**.

La donnée des coordonnées généralisées ne définit pas l'état mécanique d'un système à un instant donné $t = t_0$. En effet, pour un ensemble de coordonnées, un système peut avoir n'importe quelles vitesses, affectant ainsi la position du système après un intervalle de temps infinitésimal dt. La position du système à $t > t_0$ ne peut donc être prédite. L'expérience montre que si les coordonnées et les vitesses sont connues simultanément à un temps t_0, alors le système est complètement déterminé et son mouvement peut être, du moins en principe, calculé pour $t > t_0$. Mathématiquement, ceci signifie que la donnée de q et $\dot{q}$ (on omet les indices) permet de déterminer de manière unique l'accélération $\ddot{q}$ à t_0.

Les relations entre accélérations, vitesses et coordonnées, sont appelées les **équations du mouvement**. Ce sont des équations différentielles du second ordre pour les fonctions $q(t)$. Leur intégration permet, en principe, de déterminer ces fonctions et donc les trajectoires des particules du système.

1.2 Principe de moindre action

La formulation la plus générale des lois gouvernant le mouvement d'un système mécanique est le principe de moindre action, ou principe de Hamilton, qui stipule qu'un système mécanique est caractérisé par la donnée d'une fonction $L(q_1, \cdots, q_s, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_s, t)$ ou plus brièvement $L(q, \dot{q}, t)$ appelée **lagrangien** du système, et que le mouvement du système est tel qu'une certaine condition doit être satisfaite.

Considérons un système occupant, aux instants t_1 et t_2, des positions définies par deux ensembles de valeurs des coordonnées $q^{(1)}$ et $q^{(2)}$. La condition est que le mouvement du

système entre t_1 et t_2 est tel que l'**action** S définie ci-dessous soit minimisée :

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt} \tag{1.1}$$

L est le **lagrangien** du système. Ce principe de moindre action (ou de Hamilton) n'est pas toujours valide quels que soient t_1 et t_2, mais pour un intervalle de temps suffisamment court. Le fait que le lagrangien ne dépende que de q et $\dot{q}$ mais pas de $\ddot{q}$ exprime le résultat déjà mentionné que le système mécanique est entièrement défini par la donnée de q et $\dot{q}$.

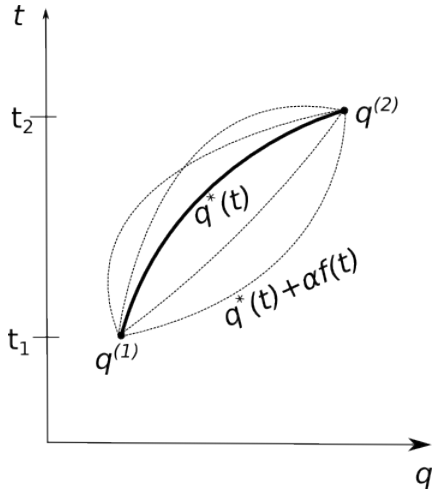


FIGURE 1.1: Trajectoire réelle $q^*(t)$ minimisant l'action entre t_1 et t_2.

Cherchons maintenant les équations différentielles qui permettent de résoudre le problème de minimisation de l'intégrale (1.1). Nous considérons d'abord un système à 1 degré de liberté de telle sorte qu'une seule fonction $q(t)$ doit être déterminée.

Nous notons $q^*(t)$ la trajectoire réelle de la particule, celle qui minimise l'action S. Soit $f(t)$ une fonction de t (une "perturbation") et α un paramètre réel. On pose :

$$q(t) = q^*(t) + \alpha f(t) \;\; ; \;\; \dot{q}(t) = \dot{q}^*(t) + \alpha \dot{f}(t)$$

comme indiqué sur la figure 1.1.

De plus, en t_1 et en t_2, le système mécanique occupe respectivement les positions $q^*(t_1)$ et $q^*(t_2)$. En conséquence, les trajectoires "possibles" doivent également passer par ces deux points, c-à-d, $q(t_1) = q^*(t_1)$ et $q(t_2) = q^*(t_2)$, donc $f(t_1) = f(t_2) = 0$. Nous avons ainsi paramétré l'action par le réel α :

$$S(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} L(q^* + \alpha f, \dot{q}^* + \alpha \dot{f}, t)\, dt$$

L'action est optimale pour $\alpha = 0$. La condition d'optimalité s'écrit donc

$$\frac{dS}{d\alpha}(\alpha = 0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}(q^*, \dot{q}^*) f + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q^*, \dot{q}^*) \dot{f} \right) dt = 0$$

En intégrant par parties le second terme de l'intégrale, on obtient :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) f\, dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} f \right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

Or, le dernier terme est nul puisque $f(t_1) = f(t_2) = 0$. L'intégrale ci-dessus doit donc s'annuler pour toute fonction $f(t)$ vérifiant $f(t_1) = f(t_2) = 0$, ce qui implique que l'intégrande est nulle. Ainsi la trajectoire q^* suivie par la particule, minimisant l'action (1.1), vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q^*, \dot{q}^*) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q^*, \dot{q}^*) = 0$$

Lorsqu'un système comprend s degrés de liberté, chacune des s fonctions $q_i(t)$ doit varier indépendamment selon le principe de moindre action. On obtient alors s équations de la forme :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \cdots, s} \tag{1.2}$$

Ce sont les équations différentielles souhaitées. En mécanique, elles sont appelées équations de Lagrange. Si le lagrangien d'un système mécanique est connu, (1.2) donne la relation entre coordonnées, vitesses et accélérations : ce sont les équations du mouvement du système.

Mathématiquement, les équations (1.2) forment un ensemble de s équations du second ordre pour s inconnues $q_i(t)$. La solution générale contient donc $2s$ constantes arbitraires. Pour définir de manière unique le mouvement du système, il est donc nécessaire de connaître l'état du système à un instant donné, par exemple, les valeurs initiales des coordonnées et des vitesses de chaque particule.

Remarques générales.

1. Soit un système mécanique composé de deux parties fermées A et B ayant des lagrangiens L_A et L_B. Lorsque la distance entre A et B rend négligeables les interactions entre A et B, le lagrangien du système entier tend vers

   $$\lim L = L_A + L_B$$

   Cette additivité du lagrangien traduit le fait que les équations du mouvement d'une partie A n'ayant aucune interaction avec une partie B ne peuvent faire intervenir de quantités relatives à cette partie B.
2. De plus, la multiplication du lagrangien d'un système mécanique par une constante quelconque ne change pas les équations du mouvement. On pourrait penser qu'il est possible de multiplier le lagrangien de chaque partie isolée d'un système par une constante arbitraire. Cependant, la propriété de linéarité introduite ci-dessus implique qu'il n'en est rien, et que les lagrangiens peuvent seulement être multipliés par la même constante arbitraire. Ceci traduit le choix arbitraire des unités de mesure du lagrangien.
3. Enfin, considérons deux fonctions $L(q, \dot{q}, t)$ et $L'(q, \dot{q}, t)$ ne différant que par la dérivée totale en temps d'une fonction $f(q, t)$ des coordonnées et du temps :

   $$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}f(q, t)$$

   Alors

   $$S' = S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1)$$

   Ainsi les deux actions ne diffèrent que d'une constante et prennent donc leur extremum pour les mêmes points. Les équations du mouvement restent ainsi inchangées. Ainsi, un lagrangien n'est défini qu'à la dérivée totale en temps près d'une fonction des coordonnées et du temps.

1.3 Principe de relativité de Galilée

Afin d'exprimer les lois de la mécanique, on doit choisir un référentiel. La forme de ces lois dépend alors de ce choix, et le problème qui se pose naturellement est le choix du référentiel dans lequel les lois de la mécanique prennent leur forme la plus simple. Il existe un référentiel privilégié, appelé **référentiel inertiel** (ou Galiléen) dans lequel l'espace est isotrope et homogène et le temps est homogène. En particulier, dans un tel référentiel, un corps au repos sur lequel aucune force n'agit reste au repos.

Examinons la forme du lagrangien dans un référentiel inertiel, d'une particule soumise à aucune force (mouvement libre ou encore particule libre). L'homogénéité de l'espace et du temps implique que le temps t et la position $\boldsymbol{r}$ de la particule ne sont pas des paramètres explicites du lagrangien L. Donc L doit être fonction uniquement de la vitesse $\boldsymbol{v}$. De plus, l'isotropie de l'espace implique que L est indépendant de la direction de $\boldsymbol{v}$, et donc n'est fonction que de son intensité, *i.e.* de $\boldsymbol{v}^2 = v^2$:

$$L = L(v^2)$$

L'équation du mouvement devient :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = 0$$

D'où $\partial L/\partial \boldsymbol{v} = constante$. Comme L est fonction uniquement de v^2, on a le résultat :

$$\boldsymbol{v} = constante$$

Ainsi, dans un référentiel inertiel, tout mouvement libre a lieu à vitesse constante en norme et en direction. C'est **le principe d'inertie**.

Si l'on choisit maintenant un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à ce référentiel inertiel, on a à nouveau le résultat que le mouvement d'une particule libre se fait à vitesse constante. L'expérience montre que non seulement les lois d'un mouvement libre sont les mêmes dans les deux référentiels, mais qu'en plus les deux référentiels sont absolument identiques du point de vue mécanique. Ainsi, il n'y a pas un seul référentiel inertiel, mais une infinité, en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres. Dans ces référentiels, les propriétés de l'espace, du temps, et les lois de la mécanique sont les mêmes. Ceci constitue le **principe de relativité de Galilée**, l'un des plus importants principes de la mécanique.

La discussion ci-dessus montre le statut particulier des référentiels inertiels. Aussi, et sauf mention contraire, les référentiels considérés dans la suite seront toujours inertiels. De plus, l'équivalence complète de ces référentiels au niveau mécanique montre qu'il n'y a pas un référentiel "absolu" à privilégier par rapport aux autres.

Si les coordonnées d'une particules exprimées dans deux référentiels K et K' sont, respectivement, $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{r}'$, et que K' est en translation rectiligne uniforme par rapport à K à la vitesse $\boldsymbol{V}$ (voir figure 1.2), alors

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{V}t \tag{1.3}$$

Ici, le temps est le même dans les deux référentiels :

$$t = t' \tag{1.4}$$

Cette hypothèse d'un temps absolu est l'une des fondations de la mécanique classique (qui n'est plus vérifiée en mécanique relativiste). Les formules (1.3) et (1.4) définissent la transformation Galiléenne. Le principe de relativité de Galilée peut alors être formulé comme l'invariance des équations de la mécanique par n'importe quelle transformation galiléenne.

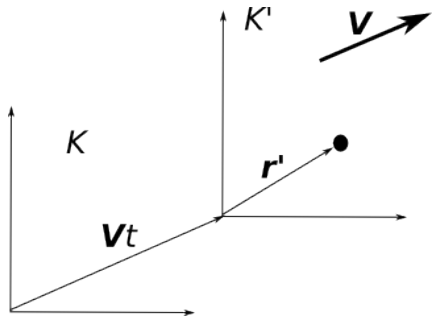


FIGURE 1.2: transformation de Galilée.

1.4 Lagrangien d'une particule libre

Nous allons maintenant déterminer l'expression du lagrangien, et commencerons par le cas le plus simple du mouvement libre d'une particule dans un référentiel inertiel. Dans ce cas, nous savons que $L = L(v^2)$. Pour expliciter cette dépendance, nous utilisons le principe de relativité galiléenne. Prenons deux référentiels inertiels K et K' avec K en translation uniforme par rapport à K' d'une vitesse $\boldsymbol{\epsilon}$ infinitésimale. On a donc $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\epsilon}$. Alors, le principe de Galilée entraîne que les équations du mouvement doivent être les mêmes dans les deux référentiels. Le lagrangien $L(v^2)$ doit donc être transformé par ce changement en une fonction L' ne différant de L que de la dérivée totale en temps d'une fonction de l'espace et du temps.

On a :

$$L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{v} + \epsilon^2)$$

En développant cette expression en puissances de $\boldsymbol{\epsilon}$ et en ne retenant que les termes du premier ordre :

$$L(v'^2) = L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$$

Le second terme du membre de droite est une dérivée totale en temps d'une fonction dépendant des coordonnées et du temps, uniquement si il est linéaire par rapport à $\boldsymbol{v}$ (puisque $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$), ce qui implique que $\partial L/\partial v^2$ est indépendant de la vitesse, *i.e.* que le lagrangien L est proportionnel au carré de la vitesse v^2. On écrit alors :

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m v^2} \tag{1.5}$$

Si maintenant les référentiels se déplacent à la vitesse relative uniforme $\boldsymbol{V}$ l'un par rapport à l'autre :

$$L' = \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} m (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{V})^2 = \frac{1}{2} m v^2 + m \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{V} + \frac{1}{2} m V^2$$

$$L' = L + \frac{d}{dt}\left(m\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{V} + \frac{1}{2}mV^2t\right)$$

Le deuxième terme de droite est une dérivée totale en temps et peut donc être omis. Le lagrangien est bien invariant par changement de référentiel inertiel.

La quantité m apparaissant dans (1.5) est appelée masse de la particule. Cette masse ne peut être négative, sans quoi l'action $S = \int_1^2 \frac{1}{2}mv^2\,dt$ n'aurait pas de minimum.

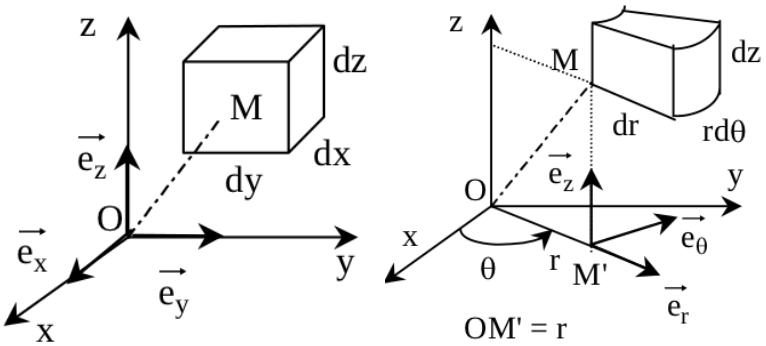
L'additivité du lagrangien entraîne que pour un ensemble de particules sans interaction nous avons :

$$L = \sum_a \frac{1}{2}m_a v_a^2$$

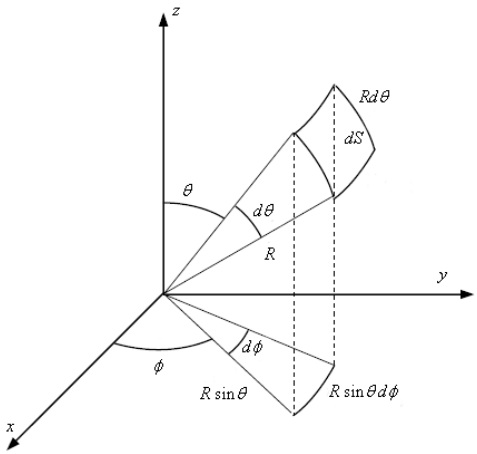
Enfin, il est pratique de remarquer que

$$v^2 = (dl/dt)^2 = (dl)^2/(dt)^2$$

Ainsi, pour obtenir le lagrangien, il suffit de prendre le carré de l'élément de longueur dl dans un système donné de coordonnées (voir Figure 1.3).



(a) Coordonnées cartésiennes (b) Coordonnées cylindriques



(c) Coordonnées sphériques (surface élémentaire)

FIGURE 1.3: Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques. L'élément de longueur est défini par $dl^2 = \boldsymbol{M_1M_2}\cdot\boldsymbol{M_1M_2}$ où M_1 et M_2 sont deux points "opposés" du volume élémentaire.

— Coordonnées cartésiennes,

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

— Coordonnées cylindriques,

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2, \quad L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

— Coordonnées sphériques ,

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2)$$

1.5 Lagrangien d'un système de particules

Considérons maintenant un ensemble de particules interagissant entre elles mais pas avec le milieu extérieur. Le système est dit fermé. L'interaction entre les particules peut être décrite en ajoutant au lagrangien $\sum_a \frac{1}{2}m_a v_a^2$ obtenu sans les interactions, une fonction des coordonnées qui dépend de la nature des interactions (mécanique classique). En notant $-U$ cette fonction, le lagrangien de ce système est alors :

$$\boxed{L = \sum_a \frac{1}{2}m_a v_a^2 - U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots)} \tag{1.6}$$

où $\boldsymbol{r}_a$ est le vecteur position de la particule a. Ceci est la forme générale du lagrangien d'un système fermé. La somme $T = \sum_a \frac{1}{2}m_a v_a^2$ est appelée **énergie cinétique** et U **énergie potentielle** du système.

Le fait que l'énergie potentielle ne dépende que de la position des particules à un instant donné, montre qu'un changement de position d'une particule affecte instantanément toutes les particules. Ainsi, les interactions se propagent instantanément. Cette nécessité d'interactions instantanées est intimement liée à la nature absolue du temps et au principe de relativité de Galilée. En effet, si les interactions se propageaient à vitesse finie, un changement de référentiel impliquerait un changement de vitesse de propagation, puisque la nature absolue du temps fait que la composition classique des vitesses s'applique à tous les phénomènes. Les lois du mouvement seraient donc différentes dans différents référentiels inertiels, et le principe de Galilée ne serait plus respecté.

Dans la construction du lagrangien, seule l'homogénéité du temps a été prise en compte. Cependant, la forme (1.6) reste inchangée lorsque t est remplacé par $-t$ (isotropie du temps). Ceci signifie que si un mouvement est possible dans un système, alors le mouvement inverse obtenu en renversant l'axe du temps est aussi possible : les lois de la mécanique classique sont réversibles.

Connaissant le lagrangien, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\boxed{m_a \frac{d\boldsymbol{v}_a}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}} \tag{1.7}$$

Sous cette forme, les équations du mouvement sont appelées équations de Newton. Le vecteur $\boldsymbol{F} = -\partial U/\partial \boldsymbol{r}_a$ est appelé force s'exerçant sur la particule a. On constate également que l'énergie potentielle U n'est définie qu'à une constante additive près. Un choix

naturel est de faire tendre U vers zéro lorsque la distance entre les particules tend vers l'infini.

Si l'on utilise maintenant les coordonnées généralisées q_i pour décrire le mouvement au lieu des coordonnées cartésiennes, alors on utilise la transformation suivante pour obtenir le lagrangien :

$$x_a = f_a(q_1, \cdots, q_s), \quad \dot{x}_a = \sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

En substituant ces expressions dans la fonction $L = \frac{1}{2} \sum_a m_a(\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U$, on obtient un lagrangien de la forme

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(\boldsymbol{q}) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(\boldsymbol{q}) \tag{1.8}$$

où les a_{ik} sont fonctions seulement des coordonnées. L'énergie cinétique reste donc une fonction quadratique de la vitesse, mais peut dépendre également des coordonnées.

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que des systèmes fermés. Considérons maintenant un système A en interaction avec un système B exécutant un mouvement donné. Comme les équations du mouvement sont déduites du principe de moindre action en faisant varier indépendamment chaque coordonnées (donc en considérant les autres comme connues), le lagrangien du système A, L_A, peut s'obtenir en utilisant le lagrangien L du système complet $A + B$ et en remplaçant q_B par une fonction du temps donnée.

Si on suppose que $A + B$ est un système fermé, alors

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B)$$

où les deux premiers termes sont les énergies cinétiques de A et B, et le troisième est leur énergie potentielle combinée. Si l'on remplace maintenant q_B par $q_B(t)$, le deuxième terme $T_B(q_B(t), \dot{q}_B(t))$ ne dépend que du temps et peut donc être omis (dérivée totale du temps). Ainsi on obtient,

$$\boxed{L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t))} \tag{1.9}$$

Le mouvement d'un système évoluant dans un champ de force externe est décrit par le lagrangien habituel, la seule différence étant que l'énergie potentielle peut dépendre explicitement du temps.

Par exemple, le lagrangien décrivant le mouvement d'une seule particule dans un champ de force s'écrit

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - U(\boldsymbol{r}, t)$$

L'équation du mouvement est alors

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = -\partial U / \partial \boldsymbol{r}$$

Un champ tel que la force $\boldsymbol{F}$ agissant sur une particule est la même en tout point du champ est dit uniforme. On a alors : $U = -\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}$.

Exercice 1.1 *Écrire le lagrangien d'une particule soumise à un champ de force, dans un référentiel en translation rectiligne non uniforme rapport à un référentiel d'inertie : $x = X + f(t)$, x étant la coordonnée dans le référentiel inertiel, et X dans le référentiel en translation. En déduire la loi du mouvement dans le référentiel en translation et interprétez le résultat.*

Même chose dans un référentiel en rotation par rapport à un référentiel inertiel :

$$x = X \cos \omega t + Y \sin \omega t$$

$$y = -X \sin \omega t + Y \sin \omega t$$

Exercice 1.2 ***Pendule simple***. *On cherche à déterminer l'équation du mouvement du pendule simple de la figure 1.4. On pose $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} = L\overrightarrow{e_r}$, avec L constante.*

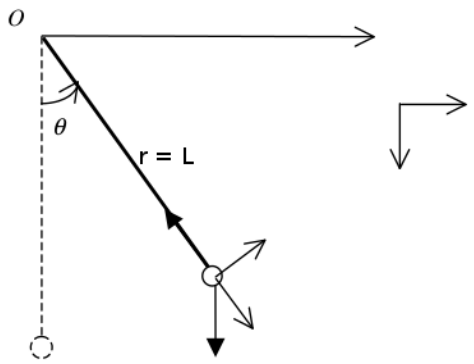


FIGURE 1.4: Pendule simple

— *Quel est le nombre de degrés de liberté du système ?*
— *Écrire le lagrangien du pendule en tenant compte de la contrainte $r = L$.*
— *Trouver l'équation du mouvement.*

Exercice 1.3 ***Pendule double***. *Trouvez le lagrangien du pendule double coplanaire suivant*

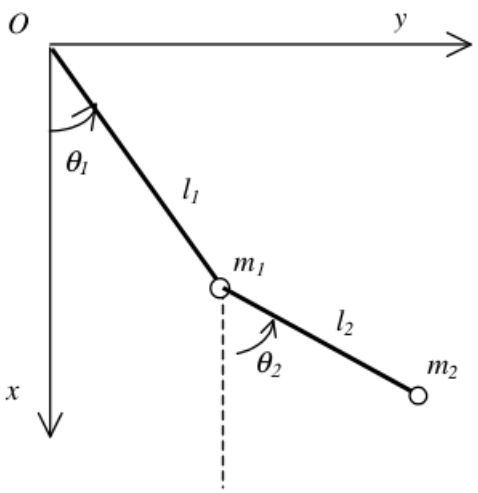


FIGURE 1.5: Pendule double coplanaire

2 Lois de conservation et symétries

Au cours du mouvement d'un système mécanique, les $2s$ quantités qui spécifient l'état du système, q_i et $\dot{q}_i$, varient avec le temps. Il existe cependant des fonctions de ces quantités dont les valeurs restent constantes au cours du mouvement, et ne dépendent donc que des conditions initiales. De telles fonctions sont appelées **intégrales du mouvement**.

Il existe $2s-1$ intégrales du mouvement indépendantes pour un système mécanique fermé à s degrés de liberté. En effet, les équations du mouvement représentent un système de s équations différentielles du second ordre. La solution générale de ce système contient donc $2s$ constantes d'intégration. Comme, pour un système fermé, le temps n'intervient pas explicitement dans les équations du mouvement, le choix de l'origine du temps est arbitraire. Une des constantes d'intégration peut donc toujours être prise, dans la solution des équations du mouvement, comme une constante additive en temps, t_0. En éliminant $t+t_0$ des $2s$ fonctions $q_i = q_i(t+t_0, C_1, \cdots, C_{2s-1})$ et $\dot{q}_i = \dot{q}_i(t+t_0, C_1, \cdots, C_{2s-1})$, on peut exprimer les $2s-1$ constantes $C_1, \cdots, C_{2s-1}$ en fonctions de q et $\dot{q}$, et ces fonctions sont les intégrales du mouvement.

Toutes ces fonctions ne sont pas d'égale importance en mécanique. Les intégrales du mouvement ayant une signification profonde en mécanique sont celles qui sont liées à l'homogénéité et l'isotropie de l'espace et du temps. Les quantités représentées par ces intégrales sont dites **conservées** et ont la propriété fondamentale d'être additives : leurs valeurs, pour un système composé de plusieurs parties dont l'interaction est négligeable, sont égales à la somme de ces valeurs prises sur les parties séparément.

On appelle symétrie toute transformation de coordonnées (translation, rotation, etc.) opérée sur tout le système, laissant le lagrangien inchangé. La notion de symétrie, et la connexion entre symétries et lois de conservation est une thématique fondamentale en physique moderne, formalisée au début du XXième siècle par la mathématicienne allemande Emmy Noether (1882 - 1935). Pour mettre en avant ce lien, nous considérons ici une transformation infinitésimale des coordonnées,

$$q_i \to q_i + \delta q_i, \text{ avec } \delta q_i = f_i(\boldsymbol{q})\varepsilon$$

où le paramètre ε est juste là pour souligner que l'on opère une petite perturbation des coordonnées : $\varepsilon \ll 1$. Une telle transformation infinitésimale laissant invariant le lagrangien est dite symétrie continue, et une symétrie peut être décomposée en une succession de symétries continues. L'invariance du lagrangien sous une symétrie continue s'exprime par (pour une coordonnée) :

$$\delta L = L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}) - L(q,\dot{q}) = 0$$

soit, en ne retenant que les termes du 1er ordre,

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q}(q,\dot{q})\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q})\delta\dot{q} = 0$$

Le système évolue suivant une trajectoire qui satisfait les équations d'Euler - Lagrange, donc $\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, et par conséquent :

$$\delta L = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right) = 0$$

Ainsi, la quantité $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} f(q)$ est conservée au cours de l'évolution du système. Ce résultat se généralise à un nombre quelconque de degrés de liberté. Nous notons

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

la quantité appelée **impulsion généralisée** (ou moment associé). Nous venons d'établir qu'à toute symétrie f_i, correspond la conservation d'une quantité

$$\boxed{\mathcal{Q} = \sum_i p_i f_i(\boldsymbol{q})} \tag{2.1}$$

appelée charge de Noether.

2.1 Quantité de mouvement

La première loi de conservation que nous considérons vient de l'**homogénéité de l'espace**, *i.e.* de l'indépendance des propriétés mécaniques d'un système fermé vis-à-vis d'une translation dans l'espace du système tout entier. En reprenant les notations ci-dessus, et en coordonnées cartésiennes, nous avons

$$x_a \leftarrow x_a + \varepsilon,\ y_a \leftarrow y_a,\ z_a \leftarrow z_a$$

si nous considérons une translation suivant x seulement. Donc $f_i \equiv 1$, lorsque i se réfère à x, et $f_i \equiv 0$ autrement. Nous en déduisons alors la conservation de la quantité $\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}$. En faisant de même avec les composantes y puis z, nous en déduisons que dans un système mécanique fermé, le vecteur

$$\boxed{\boldsymbol{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_a}} \tag{2.2}$$

reste constant durant le mouvement. Ce vecteur est appelé **quantité de mouvement** du système. En différenciant le lagrangien (1.6), nous trouvons la quantité de mouvement en termes de vitesses des particules :

$$\boldsymbol{P} = \sum_a m_a \boldsymbol{v}_a \tag{2.3}$$

L'additivité de la quantité de mouvement est évidente : la quantité de mouvement du système est égale à la somme des quantités de mouvement $\boldsymbol{p}_a = m_a \boldsymbol{v}_a$ des particules individuelles, que l'interaction entre elles puisse ou non être négligée.

Les trois composantes du vecteur quantité de mouvement sont toutes conservées uniquement en l'absence d'un champ externe. Cependant, supposons que l'énergie potentielle d'un tel champ ne dépende pas des cordonnées cartésiennes x et y : $U = U(z)$. Alors toute translation du système mécanique selon x et y doit laisser les propriétés mécaniques, et donc le lagrangien inchangés. En conséquence, si nous reprenons le raisonnement que nous avons fait, les composantes x et y de $\boldsymbol{P}$ seront conservées.

Ici, seuls les vecteurs positions ont été translatés, tandis que les vecteurs vitesse restent inchangés. Ainsi, $\delta L = 0$ implique directement que

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} = 0 \tag{2.4}$$

Cette équation (2.4) a une signification simple. La dérivée $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}$ est la force $\boldsymbol{F}_a$ agissant sur la particule a. Cette équation signifie donc que la somme des forces agissant sur les particules d'un système fermé est nulle :

$$\sum_a \boldsymbol{F}_a = 0$$

En particulier, pour deux particules en interaction, $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0$. C'est la troisième loi de Newton, établissant l'égalité entre l'action et la réaction.

Si le mouvement est décrit en coordonnées généralisées q_i, les dérivées du lagrangien par rapport aux vitesses généralisées

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{2.5}$$

s'appellent impulsions généralisées. De même, $F_i = \partial L / \partial q_i$ sont les forces généralisées. Avec ces notations, les équations de Lagrange s'écrivent

$$\dot{p}_i = F_i$$

En coordonnées cartésiennes les impulsions généralisées sont les composantes des vecteurs $\boldsymbol{p}_a$. Cependant dans le cas général, les p_i sont des fonctions linéaires des vitesses généralisées $\dot{q}_i$ et ne se réduisent pas aux produits entre masse et vitesse.

2.2 Centre de masse

La quantité de mouvement d'un système mécanique fermé a différentes valeurs pour différents référentiels inertiels. Si un référentiel K' est en translation à une vitesse $\boldsymbol{V}$ par rapport à un autre référentiel K, la vitesse d'une particule valant $\boldsymbol{v}'_a$ dans K' vaudra $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}'_a + \boldsymbol{V}$ dans K. Les quantités de mouvement $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{P}'$ dans les deux référentiels sont donc reliées par

$$\boldsymbol{P} = \sum_a m_a \boldsymbol{v}_a = \sum_a m_a \boldsymbol{v}'_a + \boldsymbol{V} \sum_a m_a$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}' + \boldsymbol{V} \sum_a m_a$$

En particulier, on peut toujours choisir un référentiel K' tel que la quantité de mouvement totale d'un système fermé soit nulle :

$$\boldsymbol{P}' = 0 \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \frac{1}{\sum_a m_a} \sum_a m_a \boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{P} / \sum_a m_a$$

Si la quantité de mouvement totale d'un système mécanique dans un référentiel donné est nulle, ce système est dit au repos dans ce référentiel. La vitesse $\boldsymbol{V}$ donnée ci-dessus est la vitesse "moyenne" d'un système mécanique.

La relation entre $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{P}$ pour un système est analogue à celle entre la quantité de mouvement et la vitesse d'une seule particule de masse $\mu = \sum_a m_a$. Ceci peut être vu

comme exprimant l'additivité des masses. De plus, le terme de droite ci-dessus peut être écrit comme la dérivée totale en temps de l'expression

$$\boldsymbol{R} = \sum_a m_a \boldsymbol{r}_a / \sum_a m_a \quad \text{et} \quad \boldsymbol{V} = \dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{P} / \sum_a m_a \tag{2.6}$$

Ainsi, la vitesse moyenne d'un système est celle d'un point de l'espace dont le vecteur position est $\boldsymbol{R}$. Ce point est appelé **centre de masse**. La loi de conservation de la quantité de mouvement d'un système fermé peut être formulée en disant que le centre de masse se déplace à vitesse uniforme en ligne droite. Ceci généralise ce qui a été vu pour une seule particule. Lorsque l'on étudie les propriétés mécaniques d'un système fermé, il est naturel d'utiliser un référentiel dans lequel le centre de masse est au repos. Ceci élimine un mouvement rectiligne uniforme du système qui ne présente pas d'intérêt.

2.3 Moment cinétique (ou moment angulaire)

La deuxième loi de conservation que nous allons voir provient de l'isotropie de l'espace : il n'y a pas de direction privilégiée, donc la rotation d'un système mécanique tout entier doit laisser le lagrangien de ce système inchangé. Autrement dit, toute rotation est une symétrie du système.

Plaçons nous dans le plan (x, y), et considérons la rotation d'un système fermé, d'un angle $\delta\theta$ autour de l'axe z. Les coordonnées x et y se transforment de la manière suivante

$$x \leftarrow x \cos\delta\theta - y \sin\delta\theta$$

$$y \leftarrow x \sin\delta\theta + y \cos\delta\theta$$

ce qui, dans le cas d'une transformation infinitésimale donne (à l'ordre 1)

$$x \leftarrow x - y\delta\theta, \text{ donc } \delta x = -y\delta\theta \ ; \ y \leftarrow y + x\delta\theta, \text{ donc } \delta y = x\delta\theta$$

Par conséquent,

$$f_x = -y \quad \text{et} \quad f_y = +x$$

Dans un système à une particule, nous en déduisons (équation (2.1)) la conservation de la quantité $xp_y - yp_x$, où p_x et p_y sont les composantes selon x et y du vecteur quantité de mouvement. Cette quantité est la composante suivant z du vecteur moment cinétique $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, où $\times$ désigne le produit vectoriel. En faisant de même dans les plans (x, z) et (y, z) nous en déduisons la conservation du vecteur $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$. Dans le cas général à N particules, l'équation (2.1) nous permet de conclure que la quantité

$$\boxed{\boldsymbol{M} = \sum_a \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{p}_a} \tag{2.7}$$

appelée **moment cinétique** du système est conservée au cours du mouvement d'un système fermé. Comme la quantité de mouvement, le moment cinétique est additif, que les particules du système interagissent ou non.

La valeur du moment cinétique dépend du choix de l'origine. Lorsqu'on change d'origine, $\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{r}'_a + \boldsymbol{a}$, le moment cinétique devient

$$\boldsymbol{M} = \sum_a \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{p}_a = \sum_a \boldsymbol{r}'_a \times \boldsymbol{p}_a + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{P} = \boldsymbol{M}' + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{P}$$

Ceci n'affecte pas la conservation de $\boldsymbol{M}$, puisque $\boldsymbol{P}$ est également conservée pour un système fermé. De plus, si le système est au repos ($\boldsymbol{P} = 0$), le moment cinétique ne dépend pas, dans ce référentiel, du choix de l'origine.

Considérons maintenant deux référentiels inertiels, K et K', ce dernier se déplaçant à une vitesse $\boldsymbol{V}$ par rapport au premier, et les deux coïncidant à un instant donné : seules les vitesses sont transformées, et

$$\boldsymbol{M} = \sum_a m_a \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{v}_a = \sum_a m_a \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{v}'_a + \sum_a m_a \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{V}$$

D'où

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' + \mu \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{V} \tag{2.8}$$

où $\mu = \sum_a m_a$, et $\boldsymbol{R} = \sum_a m_a \boldsymbol{r}_a / \mu$ est la position du centre de masse. La formule (2.8) donne la loi de transformation du moment cinétique d'un référentiel à un autre.

Si le référentiel K' est le référentiel dans lequel le système est au repos, alors $\boldsymbol{V} = \sum_a m_a \boldsymbol{v}_a / \mu = \boldsymbol{P}/\mu$, et

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' + \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P} \tag{2.9}$$

Le moment cinétique est ainsi décomposé en un moment cinétique intrinsèque, calculé dans le référentiel où le système est au repos, plus le moment cinétique $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P}$, correspondant au mouvement moyen.

La loi de conservation des 3 composantes du moment cinétique est valide pour un système fermé. Si le système est placé dans un champ externe symétrique autour d'un axe, alors les propriétés mécaniques du système seront conservées par rotation autour de cet axe, et la composante du moment cinétique le long de cet axe sera conservée, pourvu que le moment cinétique soit défini par rapport à une origine située sur cet axe.

Par exemple, un champ de force centrale est un champ dans lequel l'énergie potentielle ne dépend que de la distance à un point particulier appelé centre. La composante le long de tout axe passant par ce centre du moment cinétique est conservée dans un tel champ. En d'autres mots, le moment cinétique $\boldsymbol{M}$ est conservé lorsqu'il est défini par rapport au centre de ce champ (voir figure 2.1)

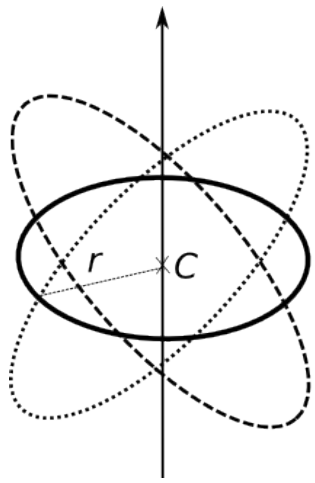


FIGURE 2.1: Différentes rotations définies autour d'axes passant par le centre d'un champ de force centrale.

Un autre exemple est celui d'un champ homogène dans la direction z, $U(z)$. Dans un tel champ, M_z est conservée quelle que soit l'origine choisie.

Exercice 2.1 ***Conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique.*** *Quelles sont les composantes de la quantité de mouvement* $\boldsymbol{P}$ *et du moment cinétique* $\boldsymbol{M}$ *conservées lorsque le mouvement a lieu dans les champs suivants : a. le champ d'un plan homogène infini (par exemple dans le plan xy) ; b. le champ d'un cylindre homogène infini (d'axe z par exemple).*

2.4 Énergie

La dernière loi de conservation est différente des deux précédentes en ce sens que la symétrie considérée ici n'est pas spatiale mais temporelle et résulte de l'**homogénéité du temps**. En vertu de cette homogénéité, le lagrangien d'un système fermé ne dépend pas explicitement du temps. La dérivée totale en temps du lagrangien s'écrit donc :

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$$

Si L dépendait explicitement du temps, un terme $\partial L/\partial t$ apparaîtrait dans le second membre. En utilisant l'équation du mouvement :

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \sum_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \\ &= \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = 0$$

Ainsi, la quantité

$$\boxed{E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L} \tag{2.10}$$

est conservée tout au long du mouvement pour un système fermé. Cette quantité est donc une intégrale du mouvement. Elle est appelée **énergie** du système. L'additivité de l'énergie est immédiatement donnée par celle du lagrangien L lorsque l'interaction entre les particules peut être négligée. Notons que la conservation de l'énergie est également valable pour un système soumis à un champ extérieur constant (ne dépendant pas du temps). Les systèmes mécaniques vérifiant la conservation de l'énergie sont dits **systèmes conservatifs**.

Rappel : une fonction f est dite homogène de degré n si pour tout réel t, $f(tx_1, tx_2, \cdots) = t^n f(x_1, x_2, \cdots)$. Le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes dit que, si f est une fonction homogène de degré n, alors

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}x_i = nf$$

La preuve de ce théorème se fait en différenciant par rapport à t l'égalité $f(tx_1, tx_2, \cdots) = t^n f(x_1, x_2, \cdots)$, puis en prenant $t = 1$.

Nous avons vu que le lagrangien d'un système fermé (ou dans un champ externe constant) est de la forme : $L = T(q, \dot{q}) - U(q)$, où T est une fonction quadratique des vitesses, *i.e.* une fonction homogène de degré 2 des vitesses. Donc, par le théorème d'Euler, nous avons :

$$\sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T$$

En substituant ceci dans (2.10), nous arrivons à

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q) \tag{2.11}$$

ou encore, en coordonnées cartésiennes :

$$E = \frac{1}{2} \sum_a m_a v_a^2 + U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots)$$

Ainsi, l'énergie est la somme de deux termes : l'énergie cinétique, qui dépend des vitesses, et l'énergie potentielle qui dépend seulement des coordonnées des particules.

Il n'y a pas d'autre intégrale du mouvement additive. Ainsi, un système fermé a sept intégrales du mouvement additives : l'énergie, les 3 composantes de la quantité de mouvement, et les 3 composantes du moment cinétique.

Exercice 2.2 ***Changement de trajectoire d'une particule.*** *Une particule de masse m en mouvement avec une vitesse $\boldsymbol{v}_1$ quitte un demi-espace dans lequel son énergie potentielle est une constante U_1, et entre dans un autre où son énergie potentielle est une constante différente U_2. En utilisant la conservation de la quantité de mouvement (selon certaines directions) et la conservation de l'énergie, déterminez le changement de direction (mesuré par l'angle fait entre la vitesse et la normale au plan séparant les deux demi-espaces) de la particule.*

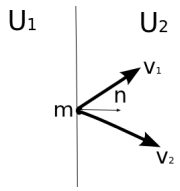


FIGURE 2.2: Particule de masse m, passant d'une région où son énergie potentielle est une constante U_1 à une région où son énergie potentielle est une constante différente U_2.

3 Intégration des lois du mouvement

3.1 Mouvement dans un champ de force centrale

Considérons le problème de l'interaction de deux particules (problème à deux corps). La résolution de ce problème peut être simplifiée en décomposant le mouvement du système en, d'une part, le mouvement du centre de masse, et d'autre part le mouvement des particules par rapport au centre de masse.

L'énergie potentielle d'interaction des particules ne dépend que de la distance $r = \|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\|$ entre les particules, de sorte que le lagrangien du système s'écrit

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2^2 - U(r)$$

Le choix de l'origine au centre de masse se traduit par $m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 = 0$. Cette équation combinée avec la définition de la position relative $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ permet d'écrire

$$\boldsymbol{r}_1 = m_2\boldsymbol{r}/(m_1 + m_2) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{r}_2 = -m_1\boldsymbol{r}/(m_1 + m_2)$$

Ainsi, le lagrangien du système s'écrit

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - U(r)}$$

où

$$m = m_1m_2/(m_1 + m_2)$$

est appelée masse réduite. Le lagrangien est donc identique à celui d'une seule particule de masse m en mouvement dans un champ externe $U(r)$ symétrique par rapport à une origine fixe. Une fois que $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, la solution de ce problème, est connue, les trajectoires $\boldsymbol{r}_1(t)$ et $\boldsymbol{r}_2(t)$ des deux particules par rapport à leur centre de masse commun, sont obtenues grâce aux équations ci-dessus.

Le problème à deux corps ci-dessus se réduit donc au problème du mouvement d'une particule dans un champ de force centrale, *i.e.* un champ dont l'énergie potentielle ne dépend que de la distance r à un point fixe. La force agissant sur la particule est

$$\boldsymbol{F} = -\frac{dU(r)}{d\boldsymbol{r}} = -\frac{dU(r)}{dr}\frac{dr}{d\boldsymbol{r}} = -\frac{dU(r)}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

car $r = \sqrt{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}$.

Le moment cinétique d'un système mécanique calculé par rapport au centre du champ de force centrale est conservé. Pour une particule, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$. $\boldsymbol{M}$ étant perpendiculaire à $\boldsymbol{r}$, le fait que $\boldsymbol{M}$ soit constant montre que le vecteur position de la particule se trouve dans un plan perpendiculaire à $\boldsymbol{M}$.

Ainsi, la trajectoire d'une particule dans un champ à force centrale se trouve dans un plan (1ère loi de Kepler). En utilisant les coordonnées polaires r, ϕ dans ce plan, on peut écrire le lagrangien comme

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r)}$$

L n'est pas une fonction explicite de la coordonnée ϕ. Cette coordonnée est dite **cyclique**. L'équation du mouvement donne alors

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0$$

Autrement dit, l'impulsion généralisée $p_\phi = \partial L/\partial\dot{\phi}$ est une intégrale du mouvement. Or en coordonnées polaires, l'impulsion p_ϕ est égale à la composante M_z du moment

cinétique, composante qui est ainsi conservée. En effet, M_z est la quantité conservée par rotation du système mécanique d'un angle $\delta\phi$ autour de l'axe $\boldsymbol{e}_z$, tandis que p_ϕ est la quantité conservée par translation dans la direction $\boldsymbol{e}_\phi$. Or, la translation du système de $\boldsymbol{r}\delta\phi$ selon $\boldsymbol{e}_\phi$ équivaut à sa rotation d'angle $\delta\phi$ autour de $\boldsymbol{e}_z$.

En notant $M = M_z$ ($\boldsymbol{M} = M\boldsymbol{e}_z$),

$$\boxed{M = mr^2\dot{\phi} = cste} \tag{3.1}$$

Cette loi a une interprétation physique simple pour le mouvement plan d'une particule dans un champ central. L'expression $\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}d\phi$ est l'aire d'un secteur borné par deux vecteurs position voisins et un élément de la trajectoire (voir Figure 3.1). En appelant df cette aire, on peut écrire le moment cinétique de la particule comme :

$$M = 2m\dot{f}$$

La dérivée $\dot{f}$ est appelée *vitesse aréolaire*. Ainsi, la conservation du moment cinétique implique une vitesse aréolaire constante : l'aire balayée, dans un même intervalle de temps donné, par le vecteur position d'une particule soumise à un champ de force centrale, est constante le long de sa trajectoire (seconde loi de Kepler).

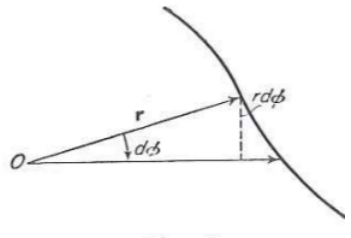


FIGURE 3.1: Seconde loi de Kepler

Le mouvement général d'une particule dans un champ de force centrale peut directement être déduit du principe de conservation de l'énergie et du moment cinétique sans écrire les lois du mouvement. L'énergie s'écrit en effet

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$$

D'où,

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2r^2}} \tag{3.2}$$

La coordonnée ϕ de la particule peut être vu comme une fonction de t ou de r : $\phi(t) = \phi(r(t))$ (avec un abus de notation). Il s'en suit que $\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dr}\frac{dr}{dt}$. Ainsi,

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{M}{mr^2}\frac{1}{dr/dt}$$

Et,

$$\phi(r) = \int_{r_{min}}^{r} \frac{Md\rho/\rho^2}{\sqrt{2m(E - U(\rho)) - \frac{M^2}{\rho^2}}} + constante \tag{3.3}$$

Ces deux expressions définissent intégralement le mouvement : (3.2) définit la distance au centre, r, comme une fonction implicite du temps, tandis que (3.3) établit la relation

entre r et ϕ, *i.e.* l'équation de la trajectoire. Notons que ϕ est une fonction monotone du temps puisque $\dot{\phi} = M/mr^2$ ne change jamais de signe.

L'expression de l'énergie montre que la partie radiale du mouvement peut être décrite comme dans un champ à une dimension avec une énergie potentielle "effective"

$$U_{eff} = U(r) + M^2/2mr^2 \tag{3.4}$$

La quantité $M^2/2mr^2$ est appelée énergie centrifuge. Les valeurs de r pour lesquelles

$$U(r) + M^2/2mr^2 = E$$

déterminent les limites du mouvement par rapport à la distance au centre. Pour ces valeurs, $\dot{r} = 0$. Cependant, comme $\dot{\phi}$ est non nul, cela ne signifie pas que la particule est au repos, comme pour un mouvement 1D, mais que $\dot{r}$ change de signe et donc que r se met à croître ou à décroître.

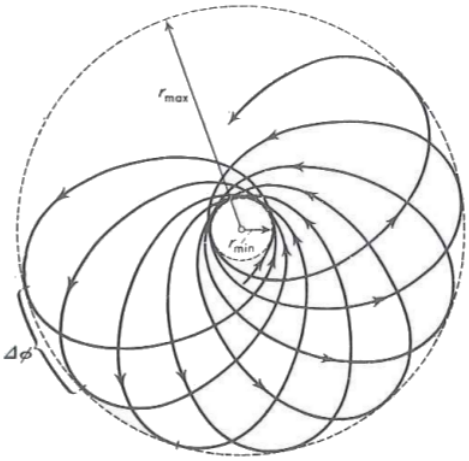


FIGURE 3.2: Trajectoire bornée d'une particule dans un champ central. Source : Landau et Lifshitz.

Si l'intervalle de valeurs dans lequel r peut varier est seulement limité par $r \geq r_{min}$, alors le mouvement est infini : la particule arrive de l'infini et retourne à l'infini. Si cet intervalle est borné par deux valeurs r_{min} et r_{max}, le mouvement est borné, et la trajectoire est entièrement comprise dans la couronne bornée par les cercles $r = r_{max}$ et $r = r_{min}$. Cela ne signifie cependant pas que la trajectoire est un chemin fermé, puisque durant le temps où r varie de r_{max} à r_{min} puis revient, le vecteur position $\boldsymbol{r}$ a tourné d'un angle $\Delta\phi$ donné, d'après (3.3) par :

$$\Delta\phi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{Mdr/r^2}{\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{M^2}{r^2}}}$$

Donc, pour que la trajectoire soit fermée, il faut que $\Delta\phi = 2\pi m/n$, où m et n sont des entiers. Dans ce cas, après n périodes, la particule aura effectué m révolutions complètes, et occupera exactement sa position initiale. C'est le cas, nous le verrons, si $U(r)$ est en $1/r$: toute trajectoire bornée est alors fermée. Lorsque $U(r)$ est arbitraire, la particule effectue un mouvement borné non fermé : r passe par un maximum et un minimum une

infinité de fois, et la particule finit par balayer toute l'aire de la couronne en un temps infini (voir Figure 3.2).

Enfin, notons que la présence de l'énergie centrifuge lorsque $M \neq 0$, qui tend vers l'infini en $1/r^2$ lorsque r tend vers 0, rend impossible, en général, le fait qu'une particule atteigne le centre du champ ($U(r)$ devrait tendre suffisamment vite vers $-\infty$ pour que l'on ait toujours $m\dot{r}^2/2 = E - U(r) - M^2/2mr^2 > 0$).

3.2 Problème de Kepler

Une classe extrêmement importante de problèmes est constituée par les cas où l'énergie potentielle est inversement proportionnelle à r, *i.e.* la force est en $1/r^2$. Ceci inclut les champs de l'attraction gravitationnelle de Newton et de l'interaction électrostatique de Coulomb. Ce dernier peut être attractif ou répulsif.

Nous ne traiterons ici que le cas d'un champ attractif, où

$$U(r) = -\alpha/r$$

avec α une constante positive. L'énergie potentielle effective est alors égale à

$$U_{eff} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

et est de la forme tracée sur la Figure 3.3. Lorsque $r \to 0$, U_{eff} tend vers $+\infty$, et U_{eff} tend vers zéro en valeurs négatives lorsque $r \to +\infty$. La valeur minimale de U_{eff} est atteinte en $r = M^2/m\alpha$ et vaut

$$U_{eff,min} = -m\alpha^2/2M^2$$

Nous avons déjà vu que les points pour lesquels $U_{eff} = E$ déterminent les limites du mouvement au regard de la distance par rapport au centre. Vu la figure 3.3, le mouvement est borné si $E < 0$, car il y a alors deux points pour lesquels $U_{eff} = E$ (et donc $\dot{r} = 0$), tandis que le mouvement est non borné si $E > 0$.

La forme de la trajectoire est obtenue par l'équation (3.3) en remplaçant U par $-\alpha/r$. On trouve alors :

$$\phi = \cos^{-1} \frac{M/r - m\alpha/M}{\sqrt{2mE + m^2\alpha^2/M^2}} + cste$$

En prenant l'origine de ϕ pour que la constante d'intégration soit nulle, et en posant

$$p = M^2/m\alpha \quad \text{et} \quad e = \sqrt{1 + 2EM^2/m\alpha^2} \tag{3.5}$$

on a

$$\boxed{\frac{p}{r} = 1 + e\cos\phi} \tag{3.6}$$

C'est l'équation d'une conique en coordonnées polaires où un foyer se situe à l'origine.

Rappel : les coniques en coordonnées polaires

On se donne, comme indiqué sur la Figure 3.4 un point F appelé foyer et une droite (d) dite droite directrice. Par définition, une conique est alors l'ensemble des points M tels que $MF/MH = e$, où H est le projeté orthogonal de M sur (d), et e est un nombre strictement positif appelé excentricité.

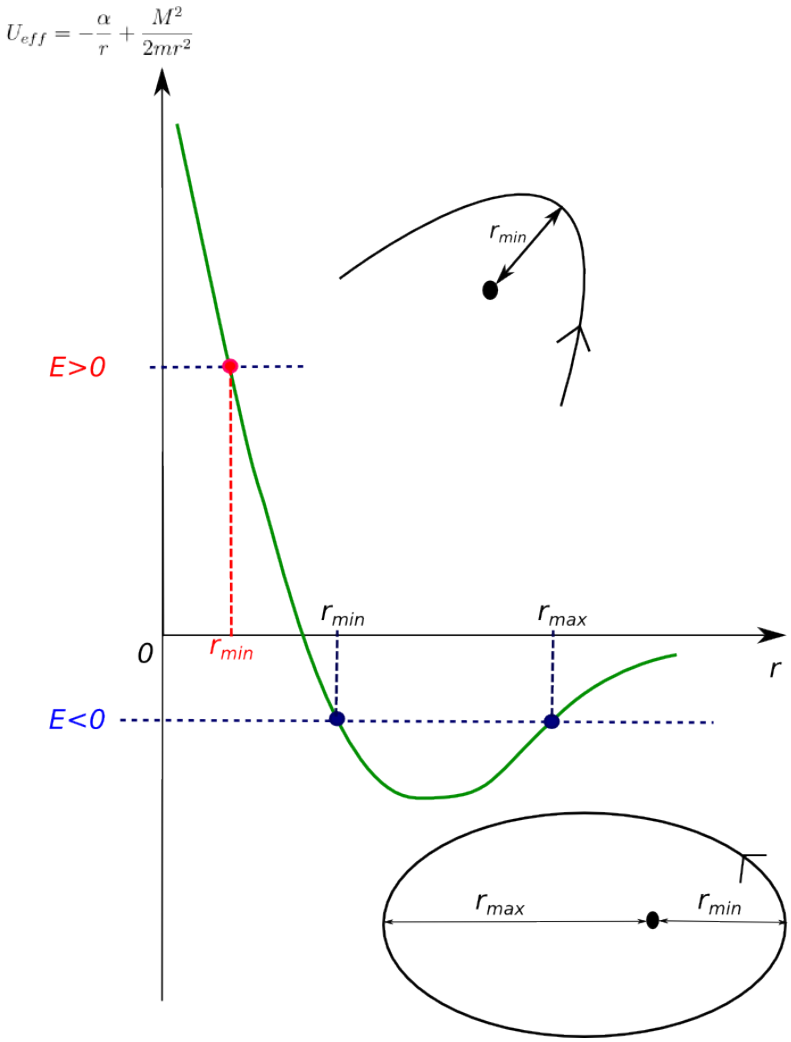


FIGURE 3.3: Énergie potentielle effective dans un champ gravitationnel Newtonien et les différentes trajectoires possibles en fonction du signe de l'énergie E.

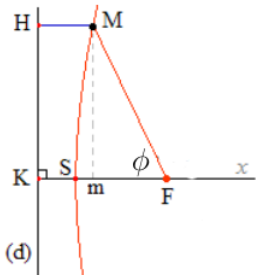


FIGURE 3.4: Définition des coniques en coordonnées polaires.

En coordonnées polaires, M est caractérisé par r et l'angle ϕ, avec le foyer F pris comme origine. La relation $MF = e\,MH$ s'écrit, selon les notations de la figure :

$$r = e(Km) = e(KF - mF)$$

On définit p tel que $KF = p/e$. De plus, on a $mF = r\cos\phi$ Donc

$$r = e(\frac{p}{e} - r\cos\phi),$$

ce qui fait

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\phi}, \quad \text{ou encore} \quad \frac{p}{r} = 1 + e\cos\phi$$

Si M se projette perpendiculairement sur le foyer F, alors on a $MH = KF$, donc $MF/KF = e$. On a posé $KF = p/e$, d'où, dans ce cas

$$MF = p$$

Ainsi, p, appelé paramètre de la conique, est la longueur de la demi-corde passant par un foyer et perpendiculaire à l'axe focal (KF). La corde mesure donc (par symétrie) $2p$. On rappelle également que si $e < 1$ la conique est une ellipse ; si $e = 1$ c'est une parabole ; enfin, pour $e > 1$, la conique est une hyperbole.

Revenons à l'équation (3.6). Nous voyons que ϕ a été choisi tel que le point correspondant à $\phi = 0$ $(r = p/(1 + e))$ est le point le plus proche de l'origine. Ce point est appelé périhélie.

Dans le problème équivalent de deux particules interagissant selon la loi décrite ici, la trajectoire de chaque particule est une section conique, avec un foyer au centre de masse des deux particules.

Si l'énergie E est négative, alors nous voyons de l'expression de l'excentricité (3.5) que celle-ci est inférieure à 1. La **trajectoire décrit donc une ellipse** (voir Figure 3.5), et le mouvement est alors borné, ce qui est en accord avec ce que nous avons déjà vu.

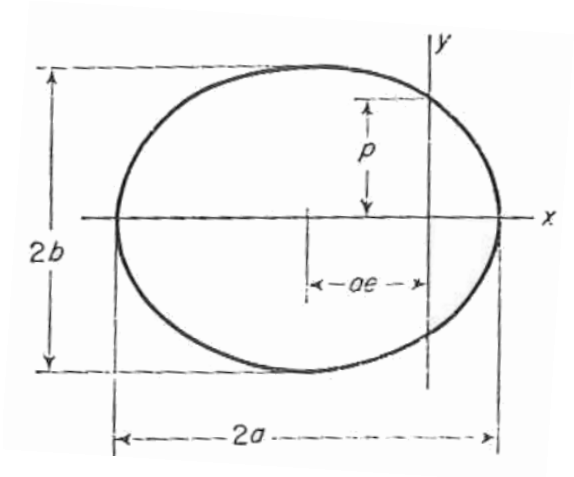


FIGURE 3.5: Trajectoire elliptique : $E < 0$, $e < 1$

Soient a et b le grand axe et le petit axe de cette ellipse. Nous avons alors

$$a = p/(1 - e^2) = \alpha/2|E|, \quad b = p/\sqrt{1 - e^2} = M/\sqrt{2m|E|}$$

La valeur minimale possible pour l'énergie est celle de $U_{eff,min} = -m\alpha^2/2M^2$. Pour cette valeur, $e = 0$ et la trajectoire est alors un cercle. Notons également que, d'après ce que l'on a vu en rappel, $r_{min} = p/(1 + e) = a(1 - e)$ et $r_{max} = p/(1 - e) = a(1 + e)$ (ce qui correspond aux racines de $U_{eff}(r) = E$).

Enfin, la période T de révolution sur une orbite elliptique peut être facilement déduite de la 2 ième loi de Kepler (3.1) $M = 2m\dot{f}$ avec $\dot{f}$ l'aire balayée par unité de temps. En

intégrant en temps cette relation de zéro à T, on obtient $2mf = MT$, et puisque toute l'aire a été balayée, $f = \pi ab$. D'où

$$T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{m/\alpha} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$$

Il s'agit de la 3ième loi de Kepler, établissant la la proportionnalité entre le carré de la période et le cube de la dimension de l'orbite.

Si l'énergie E est positive ou nulle, le mouvement est non borné. Si $E > 0$, alors $e > 1$. La trajectoire est donc une branche d'hyperbole avec l'origine prise comme foyer interne.

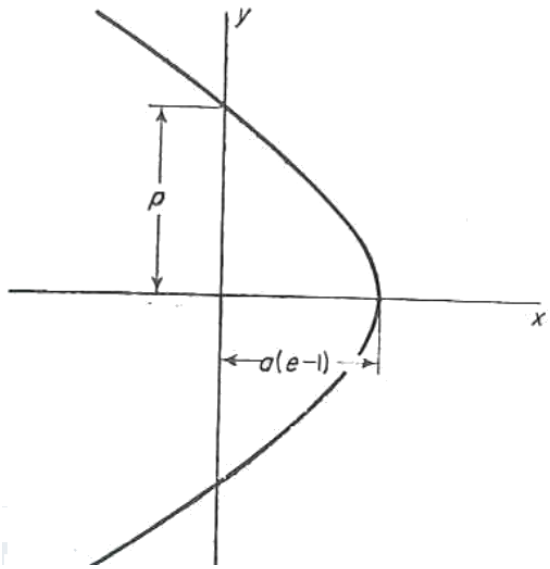


FIGURE 3.6: Trajectoire hyperbolique : $E > 0$, $e > 1$

Enfin, si $E = 0$, alors l'excentricité vaut 1, et la trajectoire décrit une parabole. Cette situation a lieu lorsque la particule est initialement au repos à l'infini.

4 Équations canoniques de Hamilton

L'écriture des lois de la mécanique en termes de lagrangien et des équations de Lagrange associées, présuppose que l'état mécanique du système est décrit en spécifiant ses coordonnées généralisées et ses vitesses. Ceci ne constitue pas la seule description possible. Un certain nombre de problèmes mécaniques trouvent avantage à être formulés en terme de coordonnées généralisées et de quantités de mouvement du système. Se pose alors la question de la forme des équations du mouvement associées à cette description. C'est ce que nous allons voir et appellerons la description hamiltonienne de la mécanique.

4.1 Transformée de Legendre

Soient deux variables v et p en correspondance biunivoque : v peut être vue comme une fonction de p, on note $v(p)$, et p comme une fonction de v, $p(v)$. Soit $L(v)$ une fonction de v vérifiant $\frac{dL}{dv} = p$. Alors il existe une fonction $H(p)$ telle que $\frac{dH}{dp}(p) = v$.

Preuve : L peut s'écrire sous la forme $L(v) = \int_0^v p(v)\,dv$, où l'on a choisi arbitrairement $p(0) = 0$. De même, on pose

$$H(\pi) = \int_0^\pi v(p)\,dp$$

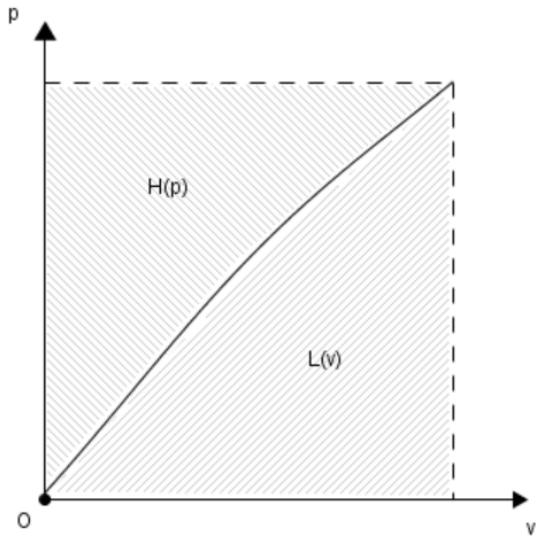


FIGURE 4.1: Transformée de Legendre

On se limite ici à l'interprétation géométrique de la figure 4.1 :

$$H + L = pv$$

et donc

$$H(p) = pv(p) - L(v(p))$$

De plus, H ainsi défini vérifie

$$\delta H = p\delta v + v\delta p - \frac{dL}{dv}\delta v = v\delta p$$

Puisque $\delta H = \frac{dH}{dp}\delta p$, on en déduit

$$\frac{dH}{dp} = v$$

H est appelée transformée de Legendre de L.

Dans le cas à plusieurs variables, $\boldsymbol{v} = \{v_i\}$ et $\boldsymbol{p} = \{p_i\}$, avec $\frac{\partial L}{\partial v_i} = p_i$, on définit H par

$$\boxed{H(\boldsymbol{p}) = \sum_i p_i v_i(\boldsymbol{p}) - L(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p}))} \tag{4.1}$$

et on vérifie que $\dfrac{\partial H}{\partial p_i} = v_i$.

4.2 Équations de Hamilton

Le passage du formalisme lagrangien au formalisme hamiltonien, *i.e.* le passage d'un ensemble de variables indépendantes à un autre, s'effectue par la transformation de Legendre introduite ci-dessus. En effet, le lagrangien $L(q, \dot{q})$ est telle que $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$. Sa transformée de Legendre est donc définie par :

$$\boxed{H(q, p, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}(p))} \tag{4.2}$$

Cette fonctionnelle H représente l'énergie du système exprimée en termes de coordonnées et d'impulsion. On l'appelle **hamiltonien du système**. De plus :

$$\begin{aligned} \delta H &= \sum_i (p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i) \\ &= \sum_i (\dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i) = \sum_i (\dot{q}_i \delta p_i - \dot{p}_i \delta q_i) \end{aligned}$$

De la variation δH exprimée ci-dessus, dans laquelle les variables indépendantes sont les coordonnées et impulsion, on déduit

$$\boxed{\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i, \quad \dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i} \tag{4.3}$$

Ce sont les équations du mouvement en termes de variables p et q, appelées équations de Hamilton. Elles constituent un ensemble de $2s$ équations différentielles du premier ordre pour les $2s$ inconnues $p_i(t)$ et $q_i(t)$, et remplacent les s équations du second ordre du formalisme lagrangien. En raison de leur simplicité et de leur symétrie de forme, elles sont aussi appelées **équations canoniques**.

La dérivée totale en temps du hamiltonien s'écrit

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i$$

La somme des deux derniers termes est nulle. On a donc

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

En particulier, si le hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, alors $dH/dt = 0$, et nous avons la loi de conservation de l'énergie.

Exercice 4.1 *Trouvez le hamiltonien associé à une particule en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.*

Exercice 4.2 *Trouvez le hamiltonien d'une particule dans un référentiel en rotation uniforme.*

4.3 Hamiltonien d'un oscillateur harmonique

Nous considérons ici de petites oscillations d'un système autour de sa position d'équilibre stable. Nous nous limitons à un système ayant un seul degré de liberté.

L'équilibre stable correspond à la position du système pour laquelle l'énergie potentielle $U(q)$ est minimum. Hors de cette position, le système subit une force $-dU/dq$ tendant à le faire retourner à son état d'équilibre. Soit q_0 la valeur d'équilibre de la coordonnée généralisée q. Pour de petites déviations autour de la position d'équilibre, on peut ne retenir que le premier terme non nul dans le développement de $U(q)-U(q_0)$ en puissances de $q-q_0$. En général ce terme est quadratique ($U(q_0)$ extremum $\Rightarrow dU(q_0)/dq = 0$) :

$$U(q) - U(q_0) \approx \frac{1}{2}k(q-q_0)^2$$

où k est un coefficient positif ($U(q_0)$ est un minimum), $k = U''(q_0)$. Nous mesurerons l'énergie potentielle depuis q_0, et donc $U(q_0) = 0$. De plus nous posons $x = q - q_0$. Ainsi,

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{4.4}$$

Le lagrangien du système s'écrit

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2$$

Effectuons le changement de variable suivant : $q = (km)^{1/4}x$. Le lagrangien devient

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2\omega}\dot{q}^2 - \frac{\omega}{2}q^2$$

où $\omega = \sqrt{k/m}$ est la fréquence propre de l'oscillateur.

Le hamiltonien du système s'écrit : $H = p\dot{q} - L(q,\dot{q})$. L'impulsion p est égale à

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{\omega}\dot{q}$$

d'où

$$\boxed{H(q,p) = \frac{\omega}{2}(p^2+q^2)} \tag{4.5}$$

Les équations du mouvement correspondantes sont :

$$\dot{q} = \partial H/\partial p = +\omega p, \quad \dot{p} = -\partial H/\partial q = -\omega q \tag{4.6}$$

Le changement de variable effectué met en avant la quasi-symétrie entre p et q. Remarquons ensuite qu'en dérivant la première équation de (4.6) puis en substituant $\dot{p}$ par l'expression donnée dans la seconde équation, on obtient l'équation du second ordre classique décrivant un oscillateur harmonique, à savoir

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

Enfin, l'étude de l'oscillateur harmonique 1D nous donne l'occasion d'introduire l'**espace des phases** dans un cas simple. On appelle espace des phases un espace de dimension $2s$, dont les axes de coordonnées sont les s coordonnées généralisées et les s impulsions

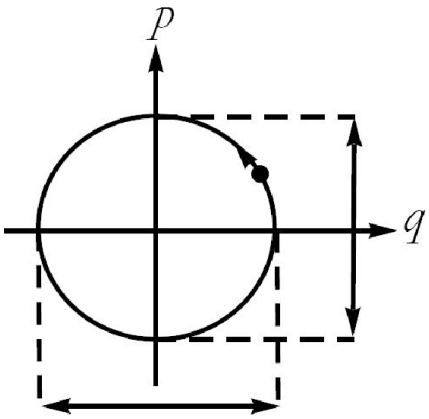


FIGURE 4.2: L'oscillateur harmonique dans l'espace des phases

du système concerné. Ainsi, chaque point dans l'espace des phases correspond à un état défini du système. Lorsque le système évolue, les points le représentant dans l'espace des phases forment une trajectoire dans cet espace. Ici, l'espace des phases est de dimension 2, et les équations de Hamilton (4.6) décrivent comment l'état du système (q, p) évolue dans l'espace des phases.

Dans le cas présent, les équations de Hamilton (4.6) décrivent un mouvement circulaire dans l'espace des phases : l'état du système (q, p) décrit un cercle avec une vitesse angulaire ω indépendante de l'énergie du système. Le système étant fermé, son hamiltonien est constant, égal à l'énergie du système : $H = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2) = E$ (voir figure 4.2). L'oscillateur harmonique est un cas très simple. L'évolution du système dans l'espace des phases est généralement beaucoup plus compliquée. Cependant, le fait que le point (q, p) reste sur un contour d'énergie constante est universel (pour un système fermé).

4.4 Théorème de Liouville

Dans le cas général où s coordonnées généralisées décrivent le système, l'espace des phases est un espace à $2s$ dimensions (s coordonnées plus s impulsions généralisées). Pour un système fermé, la relation $H(q, p) = E$ définit une hypersurface dans l'espace des phases. Ainsi, tout point (q, p) de l'espace des phases est situé sur une certaine hypersurface caractérisée par une énergie E constante. De plus, la "vitesse" de ce point est donnée par les équations de Hamilton (4.3) et est telle que ce point reste, au cours de son mouvement, sur la même hypersurface d'énergie constante. Par analogie, on peut voir l'espace des phases comme étant rempli d'un fluide s'écoulant à la vitesse (4.3).

Laissons de côté l'espace des phases, et considérons un fluide réel s'écoulant à la vitesse $\boldsymbol{v}(x, y) = (v_x(x, y), v_y(x, y))$. Cherchons la condition que doit vérifier cette vitesse pour que le fluide soit incompressible. Considérons le domaine infinitésimal

$$[x, x + dx] \times [y, y + dy] \times [z, z + dz]$$

de la figure 4.3.

L'incompressibilité implique que ce domaine doit contenir toujours le même nombre de particules fluides. Autrement dit, le nombre de particules entrantes et sortantes par les faces du domaines doit être à somme nulle. Le nombre de particules qui traversent une face donnée est proportionnel à $\boldsymbol{v} \cdot (S\boldsymbol{n})$, où $\boldsymbol{n}$ est la normale extérieure à la face, et S

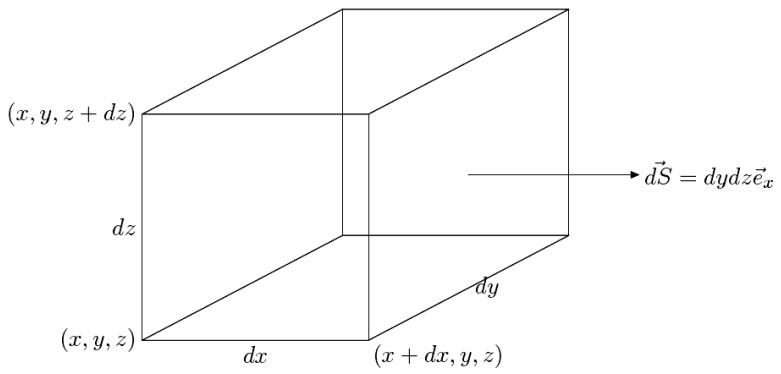


FIGURE 4.3: Cube $dxdydz$

l'aire de cette face. D'où, en faisant un bilan selon l'axe x :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot(S\boldsymbol{n})(x,y,z)+\boldsymbol{v}(x+dx,y,z)\cdot(S\boldsymbol{n})(x+dx,y,z)\\ &= -v_x(x,yz)dydz + v_x(x+dx,y,z)dydz\\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x}dxdydz\end{aligned}$$

En faisant de même selon les axes y et z, nous trouvons au final que l'incompressibilité du fluide se traduit par $\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$. Ceci se généralise directement à n dimensions :

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0 \tag{4.7}$$

où $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ est la divergence de $\boldsymbol{v}$.

Revenons à présent au fluide de l'espace des phases. La vitesse de ce fluide est le vecteur $\boldsymbol{v}_{qp}=(\dot{q}_1,\dot{p}_1,\dot{q}_2,\dot{p}_2,\cdots,\dot{q}_s,\dot{p}_s)$ de dimension $2s$. En utilisant les équations de Hamilton, ce vecteur se réécrit en

$$\boldsymbol{v}_{qp}=\left(\frac{\partial H}{\partial p_1},-\frac{\partial H}{\partial q_1},\frac{\partial H}{\partial p_2},-\frac{\partial H}{\partial q_2},\cdots,\frac{\partial H}{\partial p_s},-\frac{\partial H}{\partial q_s}\right)$$

et la divergence de $\boldsymbol{v}_{qp}$ est ainsi nulle :

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{qp}=\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)=0 \tag{4.8}$$

Si nous considérons donc une certaine région de l'espace des phases, chaque point qui la compose évolue au cours du temps selon les équations du mouvement du système mécanique. La région évolue, mais, d'après ce que nous venons de voir, son volume dans l'espace des phase reste constant :

$$\int dq_1\cdots dq_s\,dp_1\cdots dp_s = constante \tag{4.9}$$

Ceci constitue le **théorème de Liouville**.

Ce théorème exprime la réversibilité des lois de la mécanique classique, ou encore la conservation de l'information : un ensemble d'états ne peut pas évoluer vers un ensemble plus petit ou plus grand. Ce théorème est très important en mécanique statistique. Il montre par exemple la conservation de l'entropie dans une évolution hamiltonienne. En effet, l'entropie d'un système peut être définie comme le logarithme du nombre de configurations accessibles au système. Compter ce nombre de configurations, c'est mesurer le volume de l'espace des phases correspondant à un petit intervalle d'énergie. En mécanique quantique, l'analogue du théorème de Liouville est que les opérateurs décrivant l'évolution de l'état du système doivent être unitaires.

Exercice 4.3 *L'état d'un système mécanique réel est, rappelons le, donné par un couple de variable, par exemple* $(q, \dot{q})$ *ou* (q, p)*. Ici nous considérons un système très simple, pouvant prendre seulement trois états, notés 1, 2, 3. Ce système est dynamique, et sa loi d'évolution donne, étant donné l'état actuel du système, son état suivant. La figure 4.4 décrit quatre lois d'évolution différentes, les flèches symbolisant le passage d'un état à un autre. En utilisant le théorème de Liouville, ici dans un cadre discret, indiquez, en*

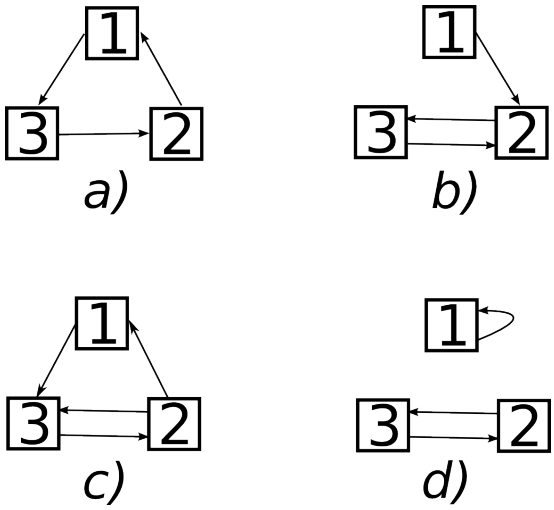


FIGURE 4.4: Lois d'évolution du système dynamique

justifiant votre réponse, quelles sont les lois d'évolution valides et quelles sont les lois non physiques. En particulier, quelle loi est irréversible et quelle loi est non prédictive ? Enfin quelle est la propriété sous-jacente au fait de pouvoir diviser l'espace des phases en cycles comme c'est le cas avec la loi d).

Dans le cas de l'oscillateur harmonique étudié plus haut, le mouvement dans l'espace des phases est circulaire : non seulement le volume d'une région de l'espace des phases est préservé, mais les distances entre ses points sont également préservées, *i.e.* la région ne subit aucune déformation. Cependant, ce mouvement de corps rigide résulte de la simplicité du système mécanique. L'évolution de systèmes dynamiques se traduit très souvent par des écoulements dans l'espace des phases tel que celui représenté sur la figure 4.5. Ce type de comportement reflète la sensibilité du problème aux conditions initiales. On parle de comportement chaotique : quelle que soit la précision avec laquelle nous résolvons le problème, l'évolution de la région de la figure 4.5 ne peut être correctement décrite au-delà d'un certain temps t_c. Ainsi, bien que le théorème de Liouville soit respecté, nous mesurons une augmentation du volume de la région suivie dans l'espace des phases (effet

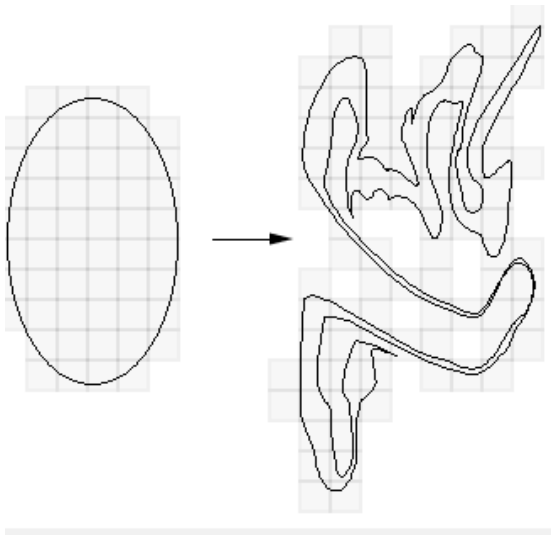


FIGURE 4.5: Comportement chaotique. Sources : L. Susskind (Harvard.edu)

"grossissement de grains", ou "coarse graining", représenté sur la figure par une augmentation du volume mesuré par les carreaux), donc une augmentation de l'entropie du système qui mesure ainsi l'incertitude que l'on a sur l'état du système.

4.5 Crochet de Poisson

Soit $f(q,p)$ une fonction des coordonnées et de la quantité de mouvement. Sa dérivée totale en temps est :

$$\frac{df}{dt}(q,p) = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k \right)$$

La substitution des valeurs de $\dot{p}_k$ et $\dot{q}_k$ par leurs expressions données par les équations de Hamilton (4.3) donne :

$$\frac{df}{dt}(q,p) = [f,H](q,p) \tag{4.10}$$

où

$$[f,H] = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} \right)$$

Cette expression est appelée crochet de Poisson des quantités f et H. Si f est une intégrale du mouvement, alors $[f,H]=0$. Pour deux fonctions f et g, le crochet de Poisson $[f,g]$ est défini de manière analogue :

$$\boxed{[f,g] = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k} \right)} \tag{4.11}$$

Remarquons que la relation (4.10) contient les équations de Hamilton. En effet, $\dot{q} = [q,H] = \frac{\partial H}{\partial p}$ tandis que $\dot{p} = [p,H] = -\frac{\partial H}{\partial q}$. En fait, la signification des crochets de Poisson est très profonde, puisqu'ils permettent une définition axiomatique de la mécanique classique. Ce sont eux qui donnent à l'espace des phases sa structure mathématique (on parle de structure symplectique). Leur équivalent en mécanique quantique est le commutateur de deux opérateurs $[A,B] = AB - BA$.

Propriétés. Soient f, g et h trois fonctions de q et p. Le crochet de Poisson a les propriétés suivantes.

- Anti-symétrie :
$$[f,g] = -[g,f] \tag{4.12}$$
En particulier, $[f,f] = 0$
- Linéarité : si λ_1 et λ_2 sont deux réels, alors
$$[\lambda_1 f + \lambda_2 g, h] = \lambda_1[f,h] + \lambda_2[g,h] \tag{4.13}$$
- La dérivation du produit fg entraîne :
$$[fg,h] = g[f,h] + f[g,h] \tag{4.14}$$
- En introduisant δ_{ij} le symbole de Kronecker, valant 1 si $i = j$ et 0 sinon, on a :
$$[q_i, p_j] = \delta_{ij} \tag{4.15}$$

Les relations (4.12), (4.13), (4.14) et (4.15) forment un ensemble de règles qui suffisent à calculer n'importe quel crochet de Poisson. Il est donc possible d'oublier la définition (4.11) et de définir l'opérateur "crochet de Poisson" de façon axiomatique par les quatre relations ci-dessus.

Par exemple, montrons que pour toute constante C, $[C,f] = 0$. En effet, si $C \neq 0$, $[C,f] = C[1,f] + [C,f]$, donc $[1,f] = 0$, d'où, par linéarité, le résultat. Si $C = 0$, $[0,f] = 0 \times [g,f] + g[0,f]$, d'où le résultat. Ensuite, prouvons par récurrence que pour tout entier $n > 0$,
$$[q^n, p] = nq^{n-1}$$
en nous restreignant ici au cas d'un seul degré de liberté.

La relation est vérifiée pour $n = 1$, puisque par (4.15), $[q,p] = 1$ (en fait, d'après ce que nous venons de dire, elle est vérifiée aussi pour $n = 0$). Supposons maintenant qu'elle est vérifiée à l'ordre n, et montrons qu'alors elle l'est aussi à l'ordre $n+1$:
$$\begin{aligned}
[q^{n+1}, p] &= [qq^n, p] \\
&= q[q^n, p] + q^n[q,p] \quad \text{relation (4.14)} \\
&= qnq^{n-1} + q^n \\
&= (n+1)q^n
\end{aligned}$$
ce qui démontre la propriété. Ce résultat peut également se mettre sous la forme
$$[q^n, p] = \frac{d(q^n)}{dq}$$

Or, toute fonction $f(q)$ suffisamment régulière peut être localement développée en série polynomiale. Donc, par linéarité, $[f(q),p] = df(q)/dq$. Il est aisé d'étendre cette propriété à une fonction $f(q,p)$ pour un nombre quelconque de degrés de liberté :
$$[f(q,p), p_i] = \frac{\partial f}{\partial q_i}(q,p) \tag{4.16}$$

De même on montre, soit directement à partir de la définition, soit en passant par les axiomes, que
$$[f(q,p), q_i] = -\frac{\partial f}{\partial p_i}(q,p) \tag{4.17}$$

Exercice 4.4 *Un système dynamique à s degrés de libertés est décrit dans l'espace des phases par les variables dites conjuguées (q_i, p_i). On effectue une transformation dite canonique et les nouvelles variables sont notées (Q_i, P_i). Ces nouvelles variables sont fonction des anciennes variables, à savoir :*

$$Q_i = Q_i(q, p, t) \quad \text{et } P_i = P_i(q, p, t)$$

On appelle fonction génératrice de la transformation canonique, une fonction

$$F = F(q_i, Q_i, t)$$

vérifiant

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - H'(Q, P, t) + \frac{dF}{dt}(q, Q, t)$$

où H' est le nouveau hamiltonien, fonction de Q, P et t.

1. *Exprimez $\frac{dF}{dt}$ et en déduire les relations suivantes entre anciennes et nouvelles variables conjuguées :*

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

2. *Quelle est la transformation canonique générée par la fonction*

$$F = \sum_i q_i Q_i$$

   Cette transformation présente-t-elle un intérêt ?

3. *On considère maintenant le hamiltonien d'un oscillateur harmonique,*

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2$$

   ainsi que la génératrice

$$F = \frac{1}{2} m \omega q^2 \cot Q$$

   avec $\omega = \sqrt{k/m}$ la fréquence propre de l'oscillateur.
   Donnez la transformation générée par F. Calculez alors l'expression du nouvel Hamiltonien H'. En déduire l'expression de $q(t)$.

4.6 Transformations canoniques

Nous abordons ici ce qui constitue l'un des intérêts essentiels de la formulation hamiltonienne. La complète symétrie entre les positions et les impulsions généralisées permet d'envisager des changements de variables mêlant ces deux types de quantités. On peut ainsi rendre triviale la dynamique d'un problème, en prenant par exemple comme nouvelles variables les conditions initiales. Bien sûr, la difficulté est de trouver le bon changement de variables.

Le choix des coordonnées généralisées q n'est pas sujet à une restriction particulière. Elles sont s quantités quelconques, pourvu qu'elles déterminent de manière univoque la position du système dans l'espace. De plus, la forme des équations de Lagrange (1.2) ne

dépend pas du choix des coordonnées : ces équations sont dites invariantes par transformation des coordonnées q_1, q_2, ..., en n'importe quelles autres quantités indépendantes Q_1, Q_2, ... Les nouvelles quantités sont des fonctions de q, et nous supposerons qu'elles peuvent dépendre explicitement du temps

$$Q_i = Q_i(q, t)$$

Les équations de Hamilton (4.3) sont également inchangées sous une telle transformation. De plus, l'indépendance des variables p et q implique que la transformation des coordonnées généralisées ci-dessus peut être étendue aux $2s$ variables p et q :

$$Q_i = Q_i(q, p, t), \quad P_i = P_i(q, p, t) \tag{4.18}$$

Cependant, les équations du mouvement ne gardent pas leur forme canonique (4.3) sous toute transformation de la forme (4.18). Pour qu'il en soit ainsi, nous devons avoir

$$\dot{Q}_i = \partial H'/\partial P_i, \quad \dot{P}_i = -\partial H'/\partial Q_i$$

avec $H'(Q, P)$ l'hamiltonien du système exprimé en termes de variables Q et P. Parmi les transformations satisfaisant ces conditions, une classe importante regroupe les transformations dites **transformations canoniques**.

Rappelons la définition de l'action $S = \int L(q, \dot{q})\, dt$. En considérant la définition du Hamiltonien $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$, l'action peut se reformuler en

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \frac{dq_i}{dt} - H \right) dt \tag{4.19}$$

Avec le nouveau jeu de variables :

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i P_i \frac{dQ_i}{dt} - H' \right) dt \tag{4.20}$$

Par le principe de Hamilton (moindre action, ou action extremum), les variations de S et S' doivent s'annuler sur les trajectoires réelles :

$$\delta S = 0 \quad \text{et} \quad \delta S' = 0$$

Remarquons de plus, avant de conclure, que les équations de Hamilton peuvent être retrouvées à partir de (4.19). En effet (en omettant les indices),

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta p \dot{q} + p \delta \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \right) dt$$

En intégrant par parties le second terme :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta p \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) + [p \delta q]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right)$$

Le terme entre crochets s'annule car $\delta q = 0$ aux bornes d'intégration. Il en résulte donc que l'on a $\delta S = 0$ si les deux intégrandes sont nulles, *i.e.* si $\dot{q} = \partial H/\partial q$ et $\dot{p} = -\partial H/\partial q$,

ce qui correspond aux équations de Hamilton.

Nous pouvons maintenant revenir à la définition des transformations canoniques. Pour que la structures des équations de Hamilton soit préservée, et que $\delta S = \delta S'$, il suffit qu'il existe fonction F des coordonnées et du temps, $F \equiv F(q, Q, t)$, telle que :

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - H' + \frac{dF}{dt}$$

avec

$$\frac{dF}{dt}(q, Q, t) = \sum_i (\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i}\dot{Q}_i) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Les deux intégrales S et S' ne diffèrent alors que d'une constante, la différence de F entre les deux bornes d'intégration, ce qui n'affecte pas la variation. Les transformations satisfaisant cette condition sont dites **canoniques**. Chaque transformation canonique est caractérisée par une fonction F particulière, appelée fonction génératrice de la transformation.

Nous voyons qu'alors

$$\frac{dF}{dt}(q, Q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - \sum_i P_i \dot{Q}_i + (H' - H)$$

ce qui entraîne

$$p_i = \partial F/\partial q_i, \quad P_i = -\partial F/\partial Q_i, \quad H' = H + \partial F/\partial t \tag{4.21}$$

Lorsque F est connue, les expressions (4.21) donnent les relations entre p, q et P, Q ainsi que le nouvel hamiltonien. Il est également possible d'exprimer F en fonction de (q, P), (q, Q) ou (p, P). Par exemple en écrivant

$$\frac{d}{dt}(F + \sum_i P_i Q_i) = \sum_i p_i \dot{q}_i + \sum_i Q_i \dot{P}_i + (H' - H)$$

nous obtenons, en appelant $\Phi(q, P, t)$ l'argument de la dérivée du membre de gauche :

$$p_i = \partial \Phi/\partial q_i, \quad Q_i = \partial \Phi/\partial P_i, \quad H' = H + \partial \Phi/\partial t$$

Le grand choix de transformations canoniques possibles fait perdre aux coordonnées généralisées et aux impulsions leurs significations originelles, puisque P et Q sont fonctions à la fois de p et q. Par exemple, en prenant $F = \sum q_i Q_i$, nous avons $Q_i = p_i$ et $P_i = -q_i$. En fait, pour prendre en compte ce caractère arbitraire des nomenclatures, p et q dans le formalisme hamiltonien sont dites canoniquement conjuguées.

En termes de crochets de Poisson, on montre que pour une transformation canonique

$$[f, g]_{q,p} = [f, g]_{Q,P} \tag{4.22}$$

où les indices désignent les variables par rapport auxquelles la différentiation s'effectue.

La démonstration complète est assez calculatoire. Cependant, nous reprenons ici l'argumentation proposée par Landau, qui constitue également une démonstration. Sans introduire de restriction, nous considérons que f et g ne dépendent pas explicitement du temps, puisque le temps n'intervient que comme un paramètre dans les transformations

canoniques. Il est toujours possible de considérer que g est le Hamiltonien d'un système fictif : $g \equiv H_g$. Par la relation (4.10) nous avons :

$$\frac{df}{dt} = [f, H_g]_{q,p}$$

Puisque la transformation est canonique, le même système est décrit par (q, p) et (Q, P). La dérivée totale en temps de f ne dépend donc pas du système de coordonnées choisi, et $[f, g]_{q,p} = [f, g]_{Q,P}$.

Développons ces crochets de Poisson :

$$\begin{aligned}
[f, g]_{q,p} &= \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right) \\
&= \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \sum_i \left(\frac{\partial g}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} + \frac{\partial g}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_k} \sum_i \left(\frac{\partial g}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial g}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right) \right) \\
&= \sum_i \frac{\partial g}{\partial Q_i} \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \right) + \sum_i \frac{\partial g}{\partial P_i} \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial P_i}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right) \\
&= \sum_i \frac{\partial g}{\partial Q_i} [f, Q_i]_{q,p} + \sum_i \frac{\partial g}{\partial P_i} [f, P_i]_{q,p}
\end{aligned}$$

Utilisons cette relation avec $f \equiv Q_j$ et $g \equiv f$. Alors :

$$[Q_j, f]_{q,p} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial Q_i} [Q_j, Q_i]_{q,p} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial P_i} [Q_j, P_i]_{q,p}$$

Appliquons la propriété (4.22) aux crochets "fondamentaux" :

$$[Q_i, Q_j]_{q,p} = 0, \quad [P_i, P_j]_{q,p} = 0, \quad [Q_i, P_j]_{q,p} = \delta_{ij} \tag{4.23}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
[f, Q_i]_{q,p} &= -\frac{\partial f}{\partial P_i} \\
[f, P_i]_{q,p} &= \frac{\partial f}{\partial Q_i},
\end{aligned}$$

ce qui permet de retrouver $[f, g]_{q,p} = [f, g]_{Q,P}$.

Les conditions (4.23) sont donc les conditions, en terme de crochet de Poisson, pour que la transformation $(q, p) \mapsto (Q, P)$ soit canonique. Autrement dit, une transformation canonique est une transformation qui préserve la structure de l'espace des phases.

4.7 Transformations canoniques infinitésimales et symétries

Considérons la fonction génératrice

$$S_E(q, P) = \sum_i q_i P_i$$

qui induit la transformation

$$p_i = P_i \ ; \ Q_i = q_i \ ; \ H' = H,$$

autrement dit la transformation identité.

Nous nous intéressons à des transformations canoniques qui varient très peu autour de l'identité, autrement dit à des transformations dont la génératrice peut s'écrire :

$$\Phi(q, P, \varepsilon) = S_E(q, P) + \varepsilon\sigma(q, P) + O(\varepsilon^2) \tag{4.24}$$

où $\sigma = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon}|_{\varepsilon=0}$, et où l'on ne considère pas de dépendance en temps ($H = H'$).

La transformation canonique associée s'écrit

$$p_i = P_i + \varepsilon\frac{\partial\sigma}{\partial q_i}(q, P) + O(\varepsilon^2) \ ; \ Q_i = q_i + \varepsilon\frac{\partial\sigma}{\partial P_i}(q, P) + O(\varepsilon^2)$$

Les dérivées $\partial\sigma/\partial q_i$ et $\partial\sigma/\partial P_i$ dépendent des anciennes coordonnées q_i et des nouvelles impulsions P_i. Cependant, en ne gardant que les termes en $O(\varepsilon)$, il est possible de remplacer P_i par p_i. Nous définissons alors la transformation infinitésimale suivante

$$\delta q_i = Q_i - q_i = \varepsilon\frac{\partial\sigma}{\partial p_i}(q, p) \ ; \ \delta p_i = P_i - p_i = -\varepsilon\frac{\partial\sigma}{\partial q_i}(q, p)$$

qui peut se réécrire avec les crochets de Poisson comme

$$\boxed{\delta q_i = [q_i, \sigma(q, p)]\varepsilon \ ; \ \delta p_i = [p_i, \sigma(q, p)]\varepsilon} \tag{4.25}$$

et σ est appelée fonction génératrice de cette transformation infinitésimale.

Considérons une fonction $A(q, p)$ des coordonnées et des impulsions du système. Si le système est invariant par translation selon x, alors on sait que la quantité p_x est conservée. La variation de A sous une translation infinitésimale ε selon x est

$$\delta A = \varepsilon\frac{\partial A}{\partial x},$$

et on a déjà vu que cette dernière expression valait aussi $\varepsilon[A, p_x]$. D'où

$$\delta A = \varepsilon[A, p_x]$$

De même, si le système est invariant par rotation autour de l'axe z, la quantité M_z est conservée, et le calcul montre que la variation de A par rotation infinitésimale d'angle ε s'écrit

$$\delta A = \varepsilon[A, M_z]$$

Si le système est invariant par translation en temps, ceci signifie que son hamiltonien est conservé. Là encore, la variation de A par une translation en temps de ε vaut $\delta A = \varepsilon\frac{dA}{dt}$, soit

$$\delta A = \varepsilon[A, H]$$

Revenons à la génératrice $\sigma(q, p)$. Cette fonction génère, via les équations (4.25) une transformation infinitésimale dans l'espace des phases. La variation de $A(q, p)$ sous cette transformation s'écrit

$$\begin{aligned} \delta A &= \frac{\partial A}{\partial q}\delta q + \frac{\partial A}{\partial p}\delta p \\ &= \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial\sigma}{\partial p}\varepsilon - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial\sigma}{\partial q}\varepsilon, \end{aligned}$$

soit

$$\delta A = \varepsilon[A, \sigma]$$

La transformation générée par σ peut être ou non une symétrie du système. σ génère une symétrie si, quel que soit le point de l'espace des phases d'où l'on part, la transformation qu'elle génère ne change pas l'énergie du système ($\delta H = 0$). Autrement dit, σ génère une symétrie du système si :

$$[H, \sigma] = 0 \tag{4.26}$$

Cette relation peut également s'écrire

$$[\sigma, H] = 0$$

qui signifie exactement que σ est conservée par translation en temps, *i.e.* est conservée au cours du mouvement. Ainsi, le même crochet de Poisson exprime la variation de H sous la transformation générée par σ, mais aussi, la variation de σ en temps.

Par exemple, prenons le hamiltonien d'une particule libre évoluant dans le plan (x, y), $H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2)$, avec $m = 1$, et considérons $\sigma = M_z = xp_y - yp_x$. On vérifie que $[\sigma, H] = 0$, traduisant ainsi la conservation du moment angulaire M_z et la symétrie du système par rotation autour de l'axe $\boldsymbol{e}_z$.

Considérons une dernière application qui fera le lien avec le chapitre suivant. Considérons une particule en rotation rapide sur elle même. À chaque instant cette particule a un certain axe de rotation, et son moment angulaire est aligné sur cet axe. En l'absence de tout champ extérieur, le moment angulaire est conservé et donc l'axe de rotation reste fixe au cours du temps. Supposons maintenant que cette particule soit chargée. En raison de sa rotation rapide, la particule se comporte comme un électro-aimant, avec apparition de deux pôles opposés alignés sur le moment angulaire. Là encore, en l'absence de champ externe, le moment angulaire est conservé.

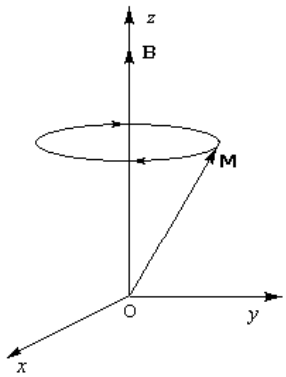


FIGURE 4.6: Précession du moment angulaire

Plaçons cette particule dans un champ magnétique $\boldsymbol{B}$. Une énergie peut alors être associée au non alignement de $\boldsymbol{B}$ et du moment angulaire $\boldsymbol{M}$, que l'on peut supposer être proportionnelle à la magnitude de ces deux vecteurs ainsi qu'au cosinus de l'angle qu'ils font : $H \propto \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{B}$. En prenant $\boldsymbol{B}$ aligné suivant $\boldsymbol{e}_z$, le hamiltonien de la particule s'écrit

$$H = \omega M_z$$

où ω est une constante rendant compte de l'effet du champ magnétique, de la charge électrique ou de tout autre paramètre du problème.

Comment évolue le moment angulaire de la particule ? Nous savons que la dérivée en temps de la composante M_i du moment angulaire est obtenue par le crochet de Poisson de cette quantité avec le hamiltonien :

$$\dot{M}_i = [M_i, H]$$

ce qui implique

$$\dot{M}_i = \omega[M_i, M_z], \quad i = x, y, z$$

On en déduit immédiatement que $\dot{M}_z = 0$, *i.e.* la composante z du moment angulaire $\boldsymbol{M}$ est conservée. D'autre part, le calcul montre que $[M_x, M_z] = -M_y$ et $[M_y, M_z] = M_x$, d'où

$$\dot{M}_x = -\omega M_y \quad \text{et} \quad \dot{M}_y = \omega M_x$$

ce qui est exactement l'équation de la rotation d'un vecteur dans le plan (x, y), par rapport à l'origine et avec une fréquence angulaire ω. En d'autres mots, $\boldsymbol{M}$ effectue une précession autour du champ constant $\boldsymbol{B}$ comme indiqué sur la figure 4.6. Ainsi, le formalisme hamiltonien permet résoudre le problème bien que disposant de très peu d'information sur le système.

Exercice 4.5 ***Du problème de Kepler à la précession du périhélie de Mercure***

1. *On considère le mouvement non-relativiste d'un objet ponctuel de masse m dans un potentiel gravitationnel $V(\boldsymbol{r}) = -\frac{k}{r}$, $k > 0$.*

   (a) *Écrire le lagrangien $L(\dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{r})$ du point matériel.*

   (b) *En déduire l'équation du mouvement du point matériel (Aide : montrer que $\frac{d}{d\boldsymbol{r}} r^{-1} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$).*

   (c) *Écrire le hamiltonien H. En déduire que l'énergie E du point matériel est conservée le long de la trajectoire.*

   (d) *Écrire les équations de Hamilton pour le point matériel.*

   (e) *Évaluer les crochets de Poisson $[\boldsymbol{r}, H]$ et $[\boldsymbol{p}, H]$ du vecteur position $\boldsymbol{r}$ et du vecteur impulsion $\boldsymbol{p}$ avec le hamiltonien. Confirmer ainsi le résultat de la question précédente.*

   (f) *Démontrez, toujours en utilisant les crochets de Poisson, que le vecteur moment cinétique $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ est conservé (Aide : $[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, f] = \boldsymbol{u} \times [\boldsymbol{v}, f] + [\boldsymbol{u}, f] \times \boldsymbol{v}$). En déduire que le mouvement du point matériel est planaire.*

   (g) *Le vecteur de Runge-Lenz est défini comme*

   $$\boldsymbol{A} = \frac{1}{m}\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{M} - \frac{k}{r}\boldsymbol{r}$$

   Utiliser les crochets de Poisson pour vérifier que ce vecteur est également une quantité conservée (Aide : pour 3 vecteurs $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, on donne la relation $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$).

   (h) *Montrer que $\boldsymbol{A}$ est situé dans le plan du mouvement, puis que Montrer que*

   $$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r} = \frac{1}{m}M^2 - kr$$

(Aide : $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = -(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{v}$).
On paramétrise le plan de la trajectoire par les coordonnées polaires r et ϕ. On supposera que $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{r}$ sont parallèles pour $\phi = 0$ (choix de l'origine des ϕ) de sorte que ϕ est l'angle entre $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{r}$. En déduire la forme géométrique de la trajectoire. Quelle est cette trajectoire pour

$$\frac{A}{k} < 1, \quad \frac{A}{k} = 1, \quad \frac{A}{k} > 1?$$

(i) *L'origine $\phi = 0$ a été choisie comme correspondant à la direction de $\boldsymbol{A}$. Montrer que cette position donne le périhélie de la trajectoire. Dans le cas $A/k < 1$, qu'en déduire sur le chemin emprunté par la particule ?*

2. *On considère la planète Mercure, prise comme un objet ponctuel de masse m, dans le champ gravitationnel du soleil. La théorire de la gravitation d'Einstein prédit de faibles corrections au potentiel $V(\boldsymbol{r}) = -\frac{k}{r}$, entraînant une modification du hamiltonien de la première partie. Le hamiltonien corrigé H' s'écrit*

$$H' = H + \delta H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r} + mc^2(\frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{3}{2}\beta^2\varepsilon - \frac{\beta^4}{8})$$

où les quantités sans dimension

$$\beta^2 = (\frac{\boldsymbol{p}}{mc})^2 \quad et \quad \varepsilon = \frac{M_\odot G}{c^2}\frac{1}{r}$$

sont petites et du même ordre de grandeur. Le paramètre k de la première partie vaut

$$k = mM_\odot G$$

Les données numériques sont :
— $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ *kg, la masse du soleil.*
— $G = 6,67 \times 10^{-11}$ $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$, *la constante gravitationnelle.*
— $c = 3 \times 10^8$ *m/s, la vitesse de la lumière dans le vide.*
— $\overline{r} = 55 \times 10^9$ *m, la distance moyenne de Mercure autour du soleil. Cette distance ne varie que très faiblement au cours d'une révolution.*

(a) *Calculer $\frac{M_\odot G}{c^2}\frac{1}{\overline{r}}$ et vérifier que ε est bien un paramètre sans dimension et petit.*

(b) *Pour le système décrit par le hamiltonien H', les quantités E et $\boldsymbol{M}$ sont toujours conservées. Pourquoi ?*

(c) *On définit Δ comme l'angle de rotation de l'orientation du périhélie de la trajectoire de la planète par révolution. $\boldsymbol{A}(0)$ est le vecteur $\boldsymbol{A}$ à $t = 0$ ou $\phi = 0$. Le vecteur $\boldsymbol{A}$ après une période T (ou en $\phi = 2\pi$) est décomposé en une partie parallèle à $\boldsymbol{A}(0)$ et une partie perpendiculaire : $\boldsymbol{A}(T) = \boldsymbol{A}_{//} + \boldsymbol{A}_\perp$.*
Exprimer Δ sous forme d'une intégrale portant sur la variable temps. On se souviendra de la signification géométrique de $\boldsymbol{A}$, et on fera intervenir les crochets de Poisson de $A_\perp$ et H', en utilisant le fait que δH est une perturbation faible (Aide : commencer par calculer $\tan\Delta$ dans cette situation de petites perturbations).

(d) *Le calcul du crochet de Poisson* $[A_\perp, \delta H]$ *n'est pas compliqué mais un peu long. On admettra donc le résultat de ce calcul sous la forme suivante : pour la composante* $A_\perp$ *perpendiculaire à la direction de* $\boldsymbol{A}(t=0) = \boldsymbol{A}(\phi=0)$ *dans le plan du mouvement on trouve*

$$\frac{dA_\perp}{d\phi} = \frac{1}{\dot{\phi}}\frac{dA_\perp}{dt} = 6A(0)\frac{M_\odot G}{c^2\overline{r}}\cos^2\phi + C_1\cos\phi + C_2\sin^2\phi\cos\phi$$

où C_1 *et* C_2 *sont des constantes. En déduire l'angle* Δ *et la précession (décalage) du périhélie de Mercure en radians par siècle.*

Donnée numérique : la période de révolution de Mercure autour du soleil est de 0,24 ans.

(Aide : les primitives de $\cos^2\phi$ *sont de la forme* $\sin 2\phi + \frac{\phi}{2} + Cste$*).*

5 Particule chargée dans un champ électromagnétique

Tout champ magnétique $\boldsymbol{B}(x, y, z)$ possède la propriété d'être à divergence nulle :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Il découle de cette propriété l'existence d'un vecteur $\boldsymbol{A}$, appelé potentiel vecteur, tel que le champ magnétique est égal au rotationnel de ce vecteur :

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{5.1}$$

Ce potentiel vecteur n'est pas unique. En effet, on peut montrer que pour tout champ scalaire $s(x, y, z)$, le rotationnel du gradient de s est nul : $\nabla \times \nabla s = 0$. Il s'en suit que les potentiels vecteurs $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla s$ produisent le même champ magnétique, et ne peuvent donc pas être distingués expérimentalement. L'opération consistant à passer d'un potentiel à un autre pour décrire le même champ magnétique, s'appelle **transformation de jauge**. Le principe de moindre action ne peut être énoncé qu'en faisant intervenir le potentiel vecteur et non le champ magnétique lui-même. Ainsi, la physique est invariante par transformation de jauge, mais son formalisme exige le choix d'une jauge particulière !

Nous considérons une particule chargée, de charge e. Cette particule est influencée par les champs électrique et magnétique $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$. La force induite par le champ électrique est de la forme de celles étudiées dans les chapitres précédents. Elle s'exprime par

$$\boldsymbol{F}_e = e\boldsymbol{E}$$

Si l'on se place de plus dans le cadre où le **champ électromagnétique est statique** (indépendant du temps), les lois de l'électromagnétisme (équations de Maxwell) nous disent que le rotationnel de $\boldsymbol{E}$ est nul, donc que $\boldsymbol{E}$ dérive d'un potentiel scalaire V :

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$

Ainsi, nous pouvons écrire la force due au champ électrique comme

$$\boldsymbol{F}_e = -e \nabla V \tag{5.2}$$

et eV est l'énergie potentielle associée à $\boldsymbol{E}$. On retrouve donc le formalisme déjà utilisé.

La force induite par le champ magnétique sur une particule chargée est d'une nature différente, et son expression est un peu plus complexe. En effet cette force dépend non seulement de la position de la particule via le champ magnétique, mais aussi de la vitesse de la particule. Son expression a été établie par le physicien néerlandais H.A. Lorentz (1853 - 1928), d'où le nom de force de Lorentz :

$$\boldsymbol{F}_b = \frac{e}{c} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{5.3}$$

où $\boldsymbol{v}$ est la vitesse de la particule et c la vitesse de la lumière dans le vide. En unité SI l'unité du champ magnétique est le Tesla, exprimé en unité de masse par un temps au carré et par Ampère, ce qui donne $kg.s^{-1}.C^{-1}$ où C est l'unité de charge, le Coulon. L'expression (5.3) n'est pas en unité SI (on aurait $c = 1$). Ici, une unité de champ magnétique est égale à c

fois un Tesla. c étant une constante universelle, il s'agit juste d'un changement d'échelle. Ceci entraîne que le champ électrique et le champ magnétique, les deux composantes du champ électromagnétique, possèdent les mêmes unités.

Remarquons que $\boldsymbol{F}_b$ est perpendiculaire à la vitesse et au champ magnétique. La loi du mouvement s'écrit

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \frac{e}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

Notons enfin que la théorie de la relativité restreinte d'Einstein constitue le vrai cadre théorique pour l'étude de la force $e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ agissant sur une particule chargée.

5.1 Particule dans un champ magnétique

Nous allons établir ici le lagrangien d'une particule chargée évoluant dans un champ magnétique, et pour ce faire tout d'abord établir l'action. D'abord, remarquons que si la charge e est nulle, alors on doit retrouver l'action définie en début du cours pour une particule libre. Nous avons déjà dit que c'est le potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ et non le champ magnétique lui-même qui doit intervenir. En conséquence, la formulation la plus simple, et qui est la formulation correcte, est de poser :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}})\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m\dot{r}^2}{2}\, dt + \frac{e}{c}\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{5.4}$$

où $\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ est la projection de $\boldsymbol{A}$ sur un élément de trajectoire $d\boldsymbol{r}$.

L'action s'exprime comme l'intégrale du lagrangien par rapport au temps. Nous pouvons voir le vecteur position comme une fonction du temps, $\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{r}(t)$, et $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(t)) \equiv \boldsymbol{A}(t)$ (avec un abus de notation). Le changement de variable est complété en remplaçant $d\boldsymbol{r}$ par $\dot{\boldsymbol{r}}dt$ (correspondance entre un élément de trajectoire et un élément de temps). Ainsi, l'action devient :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} \right) dt \tag{5.5}$$

En conséquence, le lagrangien d'une particule de charge e évoluant dans un champ magnétique s'écrit :

$$\boxed{L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}} \tag{5.6}$$

où, rappelons-le, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ et $\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}^2$.

Si nous considérons une transformation de jauge

$$\boldsymbol{A} \leftarrow \boldsymbol{A} + \frac{ds}{d\boldsymbol{r}}$$

dans l'expression de l'action (5.4), nous obtenons une nouvelle action S' vérifiant

$$S' = S + \frac{e}{c}(s(\boldsymbol{r}_2) - s(\boldsymbol{r}_1))$$

Ainsi, S et S' ne différant que d'une constante, leurs variations sont égales, $\delta S = \delta S'$, conduisant à la même loi du mouvement.

L'impulsion de la particule est donnée par la relation

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = m\dot{r}_i + \frac{e}{c}A_i$$

autrement dit,

$$\boxed{\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}} \tag{5.7}$$

L'équation du mouvement est donnée par la relation $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \frac{\partial L}{\partial r_i}$, soit

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}_i + \frac{e}{c}A_i) = \frac{e}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial r_i} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}$$

Nous nous plaçons toujours dans le cas **statique**, où $\boldsymbol{A}$ est indépendant du temps. Par contre, dans l'évaluation de la dérivée temporelle ci-dessus, il faut prendre en compte le mouvement de la particule "dans" le champ $\boldsymbol{A}$: à l'instant t la particule est en $\boldsymbol{r}$ et "ressent" donc le champ $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$, tandis qu'à $t + \Delta t$ la particule se trouve en $\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}$ et ressent donc l'effet de $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r})$. En ce sens, on a une variation non nulle avec le temps de l'effet de $\boldsymbol{A}$ sur la particule, même si $\boldsymbol{A}$ ne dépend pas du temps. Ceci se traduit par le fait que $\boldsymbol{A}$ est évalué sur la trajectoire $\boldsymbol{r}(t)$ de la particule. On doit donc calculer la dérivée totale en temps de $A_i(\boldsymbol{r}(t))$. Ceci donne :

$$m\ddot{r}_i + \frac{e}{c}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial A_i}{\partial r_j}\dot{r}_j = \frac{e}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial r_i} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}$$

Pour nous assurer que nous retrouvons bien l'équation du mouvement connue, prenons $i = 3$. L'équation ci-dessus devient :

$$m\ddot{z} = \frac{e}{c}[(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\dot{x} + (\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y})\dot{y}]$$

Soit,

$$m\ddot{z} = \frac{e}{c}[B_y\dot{x} - B_x\dot{y}] = \frac{e}{c}(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B})_z$$

En faisant de même pour $i = 1$ et $i = 2$, on constate que le lagrangien (5.6) conduit bien à l'équation du mouvement attendue.

Calculons à présent le hamiltonien $H(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ du système. Remarquons d'abord que si $\boldsymbol{A}$ ne dépend pas du temps, alors H ne dépend pas non plus explicitement du temps. On a alors $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$, ce qui signifie que le hamiltonien, *i.e.* l'énergie du système, est conservé. Ainsi, la force de Lorentz est d'une toute autre nature que les forces de frottement, qui elles aussi dépendent de la vitesse mais modifient l'intensité de la vitesse, dissipent donc de l'énergie et sont ainsi non conservatives. La force de Lorentz, elle, est perpendiculaire à la vitesse, ne modifiant que son orientation. Elle est donc conservative.

Le hamiltonien est défini par :

$$H = \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} - L = \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} - \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}$$

L'expression (5.7) permet d'exprimer $\dot{\boldsymbol{r}}$ en fonction de $\boldsymbol{p}$: $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{p}/m - \frac{e}{cm}\boldsymbol{A}$. D'où :

$$H = \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 - \frac{e}{cm}\boldsymbol{A}\cdot\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)$$

Finalement, le hamiltonien du système s'écrit :

$$\boxed{H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2} \tag{5.8}$$

Remarquons que si nous remplaçons dans cette expression $\boldsymbol{p}$ par la forme donnée en (5.7), on trouve que $H \equiv \frac{1}{2}m\dot{r}^2$, autrement dit la valeur numérique du hamiltonien est égale à celle de l'énergie cinétique de la particule. Ceci montre que l'énergie est invariante par transformation de jauge. Ceci montre également que l'énergie cinétique est conservée, à condition bien sûr que le champ magnétique ne dépende pas du temps. Cependant, ceci ne signifie pas que la particule est insensible au champ magnétique, puisque le hamiltonien doit être exprimé en fonction de $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{p}$ pour formuler les équations du mouvement de Hamilton.

5.2 Particule dans un champ électromagnétique

On a vu en début de chapitre que la force due au champ électrique (la force de Coulomb) est une force classique, conservative, qui dérive d'une énergie potentielle $U(\boldsymbol{r}) = eV(\boldsymbol{r})$. En conséquence, on définit l'action associée à une particule de charge e dans un champ électromagnétique $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$ ($\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ sont perpendiculaires) en ajoutant à l'expression (5.4) le terme correspondant à l'énergie potentiel eV :

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{m\dot{r}^2}{2} - eV(\boldsymbol{r})\right)dt + \frac{e}{c}\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} \tag{5.9}$$

Remarquons que le terme de l'action dû au champ électromagnétique, $\frac{e}{c}\int(\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} - V c dt)$ correspond à l'intégrale du produit scalaire entre les vecteurs (à quatre dimensions) $(V,\boldsymbol{A})$ et $(-cdt, d\boldsymbol{r})$. Ceci exprime le couplage entre V et $\boldsymbol{A}$ dans un espace à quatre dimensions, décrit par la relativité restreinte d'Einstein.

Comme précédemment, nous utilisons le fait que $d\boldsymbol{r} = \dot{\boldsymbol{r}}dt$ pour trouver :

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{m\dot{r}^2}{2} - eV(\boldsymbol{r}) + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}\right)dt \tag{5.10}$$

Le lagrangien s'exprime alors comme :

$$\boxed{L(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + e(\frac{1}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\dot{\boldsymbol{r}} - V(\boldsymbol{r}))} \tag{5.11}$$

5.3 Mouvement dans un champ magnétique uniforme

Considérons dans un premier temps uniquement un champ magnétique $\boldsymbol{B}$, uniforme et orienté selon $\boldsymbol{e}_z$. On note :

$$\boldsymbol{B} = -b\boldsymbol{e}_z$$

Le potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ vérifie $\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, soit

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_z = -b$$

Deux choix triviaux, compatibles avec les deux autres conditions, sont $A_z = 0$, et soit $A_x = 0$, $A_y = -bx$, soit $A_x = by$, $A_y = 0$.
On sait déjà que l'énergie est conservée, donc que le mouvement se fait à vitesse constante en norme. Considérons la seconde jauge ci-dessus. Le lagrangien vaut alors :

$$L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{be}{c} y\dot{x}$$

Les coordonnées x et z n'apparaissent pas dans l'expression du lagrangien : elles sont dites cycliques, et les composantes correspondantes de l'impulsion sont conservées. Ainsi, $p_z = m\dot{r}_z$ est conservée. Donc, si initialement la composante selon $\boldsymbol{e}_z$ de la vitesse est nulle, alors le mouvement se fait dans le plan (x, y).
De plus,

$$p_x = m\dot{x} + \frac{be}{c} y$$

est également conservée. Si à un instant donné, par exemple à $t = 0$, $p_x = 0$, alors

$$\dot{x} = -\frac{be}{mc} y \tag{5.12}$$

Choisissons maintenant la première jauge. Le lagrangien, qui décrit la même réalité physique, s'écrit maintenant

$$L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{be}{c} x\dot{y}$$

Cette fois, la coordonnée y est cyclique donc la quantité

$$p_y = m\dot{y} - \frac{be}{c} x$$

est conservée. Si cette quantité s'annule à un instant donné, alors

$$\dot{y} = \frac{be}{mc} x \tag{5.13}$$

Les équations (5.12) et (5.13) montrent que le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme est circulaire. Posons

$$x(t) = r\cos\omega t \quad \text{et} \quad y(t) = r\sin\omega t$$

On a alors

$$\dot{x} = -r\omega\sin\omega t = -y\omega \quad \text{et} \quad \dot{y} = r\omega\cos\omega t = \omega x$$

On en déduit que la fréquence du mouvement est

$$\omega = \frac{eb}{mc}$$

Remarque : le champ magnétique étant uniforme, le mouvement doit rester inchangé par translation dans le plan (x, y). Choisissons donc le point (x_0, y_0) comme centre du mouvement circulaire, au lieu de $(0, 0)$. On a alors

$$x(t) = r\cos\omega t + x_0 \quad \text{et} \quad y(t) = r\sin\omega t + y_0$$

Dans la première configuration que nous avons traitée, la quantité p_x se conservait. Il en va de même ici, et

$$p_x = -\omega m r \sin \omega t + \frac{be}{c} r \sin \omega t + \frac{be}{c} y_0 = \frac{be}{c} y_0$$

Dans le second cas, p_y est conservée, et

$$p_y = m\omega r \cos \omega t - \frac{be}{c} r \cos \omega t - \frac{be}{c} x_0 = -\frac{be}{c} x_0$$

Ainsi, la conservation de l'impulsion nous dit que le centre (x_0, y_0) reste inchangé durant le mouvement !

Considérons maintenant un champ électrique $\boldsymbol{E} = (E, 0, 0)$. Les équations du mouvement sont :

$$\dot{p}_x = \frac{\partial L}{\partial x}, \quad m\ddot{x} + \frac{eb}{c}\dot{y} = eE$$
$$\dot{p}_y = \frac{\partial L}{\partial y}, \quad m\ddot{y} - \frac{eb}{c}\dot{x} = 0$$

Essayons un mouvement à accélération nulle : $\dot{y} = Ec/b$ et $\dot{x} = 0$. Le champ électrique est orienté selon x et la vitesse selon y. C'est l'effet Hall illustré sur la figure 5.1.

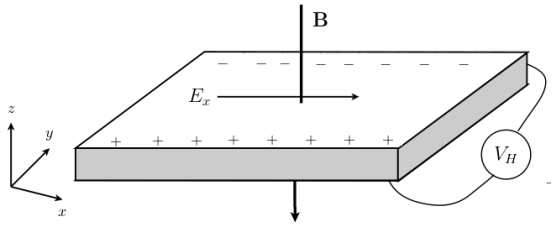


FIGURE 5.1: Effet Hall classique

Exercice 5.1 *On considère un particule de charge e et de masse m dans un champ magnétique uniforme et constant dirigé selon l'axe z :* $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$. *On négligera les forces autres que la force de Lorentz. De plus, les unités du champ magnétique ou du temps sont telles que* $c = 1$, *avec c la vitesse de la lumière.*

1. *Montrer que*
$$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z) = (-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0)$$
est une jauge associée au champ magnétique $\boldsymbol{B}$. *Donner, dans cette jauge, l'expression du Hamiltonien de la particule* $H(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$.
2. *On propose d'effectuer le changement de variables suivant* $(x, y, p_x, p_y) \to (Q_x, Q_y, P_x, P_y)$:
$$Q_x = \frac{1}{\alpha}(p_x + \frac{eB}{2}y) \; ; \; Q_y = \frac{1}{\alpha}(p_x - \frac{eB}{2}y)$$
$$P_x = \frac{1}{\alpha}(p_y - \frac{eB}{2}x) \; ; \; P_y = -\frac{1}{\alpha}(p_y + \frac{eB}{2}x)$$

avec $\alpha = \sqrt{eB}$ *tandis que* z *et* p_z *restent inchangés.*

Vérifier que cette transformation définit bien une transformation canonique en calculant les crochets de Poisson des nouvelles variables (Q_x, Q_y, P_x, P_y) *prises deux à deux.*

3. *En introduisant la fréquence* $\omega = eB/m$*, donner l'expression du hamiltonien* H *en fonction des nouvelles variables* (Q, P)*. Quel modèle standard de dynamique obtient t-on ?*

4. *Écrire les équations du mouvement de Hamilton pour les variables canoniques* (P, Q)*, en déduire l'allure de la trajectoire dans ces variables, puis dans les variables* (x, y, z, p_x, p_y, p_z)*. Qu'est-ce-qui différencie les cas* $e > 0$ *et* $e < 0$ *?*