ÉLÉMENTS DE CALCUL TENSORIEL

Roland FORTUNIER

Centre Micro-électronique de Provence "Georges Charpak"

Avenue des anémones

13541 - GARDANNE

Table des matières

Introduction

En 1900, Ricci et Levi-Civita ont donné le premier exposé systématique relatif au calcul tensoriel. Dans cet ouvrage, les auteurs ont attiré l'attention des mathématiciens et des physiciens sur un certain nombre d'applications de cette théorie mathématique. Depuis, l'apparition de la théorie de la relativité, qui n'a été possible que grâce à l'existence préalable du calcul tensoriel, lui a fait réaliser par contrecoup d'immenses progrès. Ce calcul est devenu l'un des instruments essentiels de toute la physique théorique moderne.

L'étude du calcul tensoriel peut être réalisée au sein d'un cadre mathématique formel, à l'aide de définitions et de démonstrations plus ou moins compliquées. Mais le calcul tensoriel est aussi un outil très pratique pour l'écriture et l'étude des équations servant à décrire des phénomènes physiques. En effet, les lois physiques ne sont valables que si elles sont indépendantes de tout système de coordonnées particulier utilisé pour les représenter mathématiquement. Il est ainsi très commode d'utiliser l'analyse tensorielle en relativité générale, en géométrie différentielle, en mécanique, en thermodynamique, et dans de nombreuses autres branches de la science ou de la technologie, et il n'est pas nécessaire pour cela de connaître l'ensemble des fondements mathématiques de la théorie.

Dans ce document, nous avons choisi de traiter l'analyse tensorielle comme un outil de description simple et concis des lois physiques que l'ingénieur aura sans doute à connaître et à utiliser au cours de sa vie professionnelle. Le premier chapitre est consacré à la définition des notions élémentaires nécessaires à la compréhension du calcul tensoriel. Il donne le cadre mathématique, volontairement restreint, dans lequel se place ce document. Ensuite, nous définissons dans le second chapitre les tenseurs, leurs composantes, et les différentes opérations classiques qui y sont associées. Quelques notions d'algèbre extérieure sont également fournies. Dans le troisième chapitre, nous utilisons le calcul tensoriel pour introduire la géométrie différentielle, qui concrétise cet outil. Enfin, dans le quatrième chapitre, quelques opérateurs différentiels sont introduits dans un cadre tensoriel. Ces opérateurs sont à la base de la plupart des lois physiques. Ils sont explicités dans les annexes A et B pour le cas de systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques.

Le cadre théorique de ce document a été réalisé à l'aide des document [LIC 87, RIE 85]. Le lecteur pourra également trouver des applications du calcul tensoriel dans [HIL 78, FOR 96] pour la mécanique et la déformation plastique, ainsi que dans [HEI 73] pour la cosmologie. Enfin, de nombreux exercices résolus se trouvent dans [MUR 73].

Chapitre 1

Notions de base

1.1. Espace vectoriel E et espace dual E^*

Dans l'ensemble de ce document, nous considérons un espace vectoriel E de dimension N sur un corps K, dont les vecteurs de base sont notés $\boldsymbol{a}_i$. D'une façon générale, les éléments de E seront notés en caractère gras ("vecteurs"), pour les différencier des éléments de K ("scalaires"). Un élément $\boldsymbol{x}$ de E se décomposera donc sur la base des $\boldsymbol{a}_i$ sous la forme de composantes x^i telles que $\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{a}_1 + x^2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x^N\boldsymbol{a}_N$.

Nous utiliserons donc fréquemment des sommes sur des indices variant de 1 à la dimension N de l'espace considéré. Pour simplifier les notations, ces sommes seront rendues implicites lorsque, dans un produit ou sur un seul terme, le même indice apparaîtra à la fois en position inférieure et supérieure. Par exemple, la décomposition d'un élément $\boldsymbol{x}$ de E sur la base des $\boldsymbol{a}_i$ s'écrira de façon condensée sous la forme $\boldsymbol{x} = x^i\boldsymbol{a}_i$. De même, en notant A^j_i les termes d'une matrice, les composantes y^i de lélément de E issu du produit de cette matrice par un élément $\boldsymbol{x}$ de E, et la trace de cette matrice, s'écriront successivement :

$$\begin{aligned} &y^i = A^i_j x^j = A^i_1 x^1 + \ldots + A^i_N x^N \\ &A^i_i = A^1_1 + \ldots + A^N_N \end{aligned} \tag{1.1}$$

Il s'agit de la convention de sommation dite d'Einstein.

Souvent, cette convention de sommation est étendue à tous les indices présents dans un produit ou sur un seul terme, quelle que soit leur position (inférieure ou supérieure). Dans ce document, nous n'effectuerons pas cette extension. Nous verrons en effet que la signification mathématique d'un indice dépend de sa position.

La première notion fondamentale utile en calcul tensoriel est celle d'espace vectoriel dual E^*, issue de l'analyse vectorielle. Pour simplifier, nous citerons simplement la définition de E^*. Il s'agit de l'ensemble des formes linéaires $\overline{\boldsymbol{u}}$ de E dans K, qui satisfont les conditions :

$$\forall \boldsymbol{x} \in E, \forall \boldsymbol{y} \in E, \forall \lambda \in K, \begin{cases} \overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) + \overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{y}) \\ \overline{\boldsymbol{u}}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) \end{cases} \tag{1.2}$$

Dans la suite, les éléments de E^* seront différenciés des éléments de E par un "trait supérieur".

Considérons maintenant un certain nombre d'éléments de l'espace E^* définis sous la forme :

$$\forall \boldsymbol{x} \in E, \overline{\boldsymbol{a}}^i(\boldsymbol{x}) = x^i \text{ si } \boldsymbol{x} = x^i\boldsymbol{a}_i \tag{1.3}$$

On peut remarquer sur l'équation précédente que les éléments $\overline{\boldsymbol{a}}^i$ de l'espace E^* sont associés aux éléments $\boldsymbol{a}_i$ de E. En particulier, ils sont au nombre de N et satisfont la relation :

$$\overline{\boldsymbol{a}}^j(\boldsymbol{a}_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \tag{1.4}$$

Les éléments $\overline{\boldsymbol{a}}^i$ forment une base de E^*. Pour démontrer cela, nous vérifions qu'ils forment dans E^* :

– une famille libre, en considérant une combinaison linéaire nulle $\lambda_i \overline{\boldsymbol{a}}^i$, où les λ_i sont des éléments du corps K. L'image des vecteurs de base $\boldsymbol{a}_j$ de E par cette combinaison linéaire est donc également nulle, et on peut écrire :

$$\lambda_i \overline{\boldsymbol{a}}^i(\boldsymbol{a}_j) = \lambda_i \delta_j^i = \lambda_j = 0 \tag{1.5}$$

– une famille génératrice, en écrivant pour tout élément $\overline{\boldsymbol{u}}$ de E^* :

$$\forall \boldsymbol{x} \in E, \overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = \overline{\boldsymbol{u}}(x^i \boldsymbol{a}_i) = x^i \overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}_i) = \overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}_i) \overline{\boldsymbol{a}}^i(\boldsymbol{x}) = u_i \overline{\boldsymbol{a}}^i(\boldsymbol{x}) \tag{1.6}$$

ce qui montre que les composantes de $\overline{\boldsymbol{u}}$ sur la base des $\overline{\boldsymbol{a}}^i$ sont les images par $\overline{\boldsymbol{u}}$ des vecteurs de base $\boldsymbol{a}_i$ de E ($u_i = \overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}_i)$).

La base des $\overline{\boldsymbol{a}}^i$ est souvent appelée "base duale" des $\boldsymbol{a}_i$. Elle est constituée de N termes, ce qui montre que E^* est de dimension N.

1.2. Covariance et contravariance

Nous considérons maintenant dans E deux systèmes de vecteurs de base $\boldsymbol{a}_i$ et $\boldsymbol{b}_j$, qui se déduisent l'un de l'autre par une combinaison linéaire ($\boldsymbol{b}_j = B_j^i \boldsymbol{a}_i$ et $\boldsymbol{a}_i = A_i^j \boldsymbol{b}_j$, où les termes B_i^j et A_i^j forment des matrices inverses l'une de l'autre). Les bases duales associées à ces deux systèmes se déduisent alors l'une de l'autre par des relations analogues, mais en inversant les deux matrices mises en jeu. On obtient $\overline{\boldsymbol{b}}^j = A_i^j \overline{\boldsymbol{a}}^i$ et $\overline{\boldsymbol{a}}^i = B_j^i \overline{\boldsymbol{b}}^j$. Ceci se montre facilement par exemple en écrivant l'image par $\overline{\boldsymbol{b}}^j$ d'un élément $\boldsymbol{x}$ de E sous la forme :

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{b}}^j(\boldsymbol{x}) &= \overline{\boldsymbol{b}}^j(x^i \boldsymbol{a}_i) = \overline{\boldsymbol{b}}^j(\boldsymbol{a}_i) x^i = \overline{\boldsymbol{b}}^j(A_i^k \boldsymbol{b}_k) x^i \\ &= A_i^k \overline{\boldsymbol{b}}^j(\boldsymbol{b}_k) x^i = A_i^k \delta_k^j x^i = A_i^j x^i = A_i^j \overline{\boldsymbol{a}}^i(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Considérons maintenant un élément quelconque $\boldsymbol{u}$ de E et $\overline{\boldsymbol{u}}$ de E^*. Notons x^i et y^i les composantes de $\boldsymbol{u}$ dans les deux systèmes de base ($\boldsymbol{u} = x^i \boldsymbol{a}_i = y^j \boldsymbol{b}_j$). Notons maintenant f_i et g_i les composantes de $\overline{\boldsymbol{u}}$ dans ces deux systèmes de base ($\overline{\boldsymbol{u}} = f_i \overline{\boldsymbol{a}}^i = g_j \overline{\boldsymbol{b}}^j$). A l'aide des relations précédentes, on montre alors facilement que l'on a :

$$\begin{cases} x^i = B_j^i y^j \\ y^j = A_i^j x^i \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f_i = A_i^j g_j \\ g_j = B_j^i f_i \end{cases} \tag{1.8}$$

On remarque sur l'équation précédente que les composantes f_i et g_j de $\overline{\boldsymbol{u}}$ évoluent de la même façon (dans le même "sens") que les vecteurs de base de E. On dit qu'elles évoluent de façon covariante par rapport à ces vecteurs. Inversement, les composantes x^i et y^j de $\boldsymbol{u}$ évoluent de façon inverse (dans le sens "inverse") des vecteurs de base de E. On dit qu'elles évoluent de façon contravariante par rapport à ces vecteurs.

1.3. Cas pré-euclidien et euclidien : identification de E et E^*

Lorsque E est un espace pré-euclidien, il existe dans cet espace une loi de composition, appelée "produit scalaire", qui à tout couple d'éléments $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ de E fait correspondre un élément du corps K (le "scalaire"), que nous noterons $\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}$. Ce produit scalaire satisfait de plus les conditions suivantes :

– $\forall \boldsymbol{x} \in E, \forall \boldsymbol{y} \in E, \boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}.\boldsymbol{x}$
– $\forall \lambda \in E, \forall \boldsymbol{x} \in E, \forall \boldsymbol{y} \in E, (\lambda \boldsymbol{x}).\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}.(\lambda \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y})$
– $\forall \boldsymbol{x} \in E, \forall \boldsymbol{y} \in E, \forall \boldsymbol{z} \in E, \boldsymbol{x}.(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}.\boldsymbol{z}$
– Si $\forall \boldsymbol{x} \in E, \boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} = 0$, alors $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$

Le caractère pré-euclidien de E a une conséquence importante sur E^*. En effet, chaque élément de base $\overline{\boldsymbol{a}}^i$ de E^* est une forme linéaire de E dans K. On peut donc écrire :

$$\forall \boldsymbol{x} \in E, \overline{\boldsymbol{a}}^i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^i.\boldsymbol{x} \tag{1.9}$$

Pour obtenir les $\boldsymbol{a}^i$, il suffit d'utiliser la définition des $\overline{\boldsymbol{a}}^i$ pour écrire :

$$\boldsymbol{a}^i.\boldsymbol{a}_j = \delta^i_j \tag{1.10}$$

Les $\boldsymbol{a}^i$ sont donc les éléments de E orthogonaux aux vecteurs $\boldsymbol{a}_i$. Il s'en suit que les $\boldsymbol{a}^i$ forment une base de E.

Plus généralement, l'image de tout élément $\boldsymbol{x}$ de E par un élément $\overline{\boldsymbol{u}}$ de E^* peut être écrite sous la forme $\overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}.\boldsymbol{x}$. En effet, on a :

$$\overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = f_i \overline{\boldsymbol{a}}^i(\boldsymbol{x}) = f_i \boldsymbol{a}^i.\boldsymbol{x} = (f_i \boldsymbol{a}^i).\boldsymbol{x} \tag{1.11}$$

Les composantes f_i de $\overline{\boldsymbol{u}}$ dans E^* sont celles de $\boldsymbol{u}$ dans E, relativement à la base des $\boldsymbol{a}^i$ (on a donc $\boldsymbol{u} = f_i \boldsymbol{a}^i$). On peut donc identifier tout élément $\overline{\boldsymbol{u}}$ de E^* avec son vecteur associé $\boldsymbol{u}$ de E, et donc ne considérer qu'un seul espace E.

Dans un espace vectoriel pré-euclidien E, la base des $\boldsymbol{a}_i$ est dite "covariante" et celle des $\boldsymbol{a}^i$ est dite "contravariante". Un vecteur quelconque $\boldsymbol{u}$ de E aura donc des composantes dans ces deux bases. Pour simplifier les notations, les composantes f_i sont souvent notées x_i et on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{u} = x^i \boldsymbol{a}_i \\ \boldsymbol{u} = x_i \boldsymbol{a}^i \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_i = \boldsymbol{u}.\boldsymbol{a}_i \\ x^i = \boldsymbol{u}.\boldsymbol{a}^i \end{array} \right. \tag{1.12}$$

Les composantes x^i de $\boldsymbol{u}$ sont dites "contravariantes", tandis que les composantes x_i (i.e. f_i) sont dites "covariantes". La figure 1.1 illustre ce résultat dans le cas d'un espace euclidien de dimension 2.

Les espaces euclidiens sont des espaces pré-euclidiens sur le corps des réels, où la dernière condition satisfaite par le produit scalaire est remplacée par la suivante :

– Si $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, alors $\boldsymbol{x}.\boldsymbol{x} > 0$

Il est alors possible de définir une norme sur cet espace vectoriel sous la forme :

$$\forall \boldsymbol{x} \in E, \| \boldsymbol{x} \| = \sqrt{\boldsymbol{x}.\boldsymbol{x}} \tag{1.13}$$

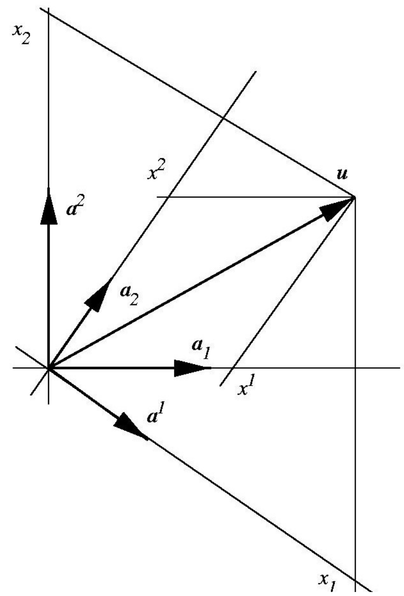

Figure 1.1. Covariance et contravariance dans un espace de dimension 2

1.4. Le tenseur métrique

Dans un espace pré-euclidien E, le produit scalaire entre deux vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$, de composantes contravariantes x^i et y^i, et covariantes x_i et y_i, par rapport à des vecteurs de base $\boldsymbol{a}_i$ et $\boldsymbol{a}^i$, s'écrit sous la forme :

$$\forall \boldsymbol{x} \in E, \forall \boldsymbol{y} \in E, \boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} = g_i^j x^i y_j = g_j^i x_i y^j = g_{ij} x^i y^j = g^{ij} x_i y_j \tag{1.14}$$

avec :

$$\begin{cases} g_{ij} = \boldsymbol{a}_i.\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}_j.\boldsymbol{a}_i = g_{ji} \\ g^{ij} = \boldsymbol{a}^i.\boldsymbol{a}^j = \boldsymbol{a}^j.\boldsymbol{a}^i = g^{ji} \\ g_i^j = \boldsymbol{a}_i.\boldsymbol{a}^j = \delta_i^j = \delta_j^i = \boldsymbol{a}^i.\boldsymbol{a}_j = g_j^i \end{cases} \tag{1.15}$$

Les termes g_{ij}, g^{ij}, $g_i^j = \delta_i^j$ et $g_j^i = \delta_j^i$ forment les composantes d'un tenseur symétrique appelé "tenseur métrique" ou "tenseur fondamental", qui est d'une grande importance en calcul tensoriel. En effet, il permet de calculer le produit scalaire de deux vecteurs quelconques. On peut d'ailleurs remarquer que les composantes contravariantes g^{ij} sont obtenues en "inversant" la matrice formée par les g_{ij}, tandis que les composantes "mixtes" g_i^j forment la matrice identité.

Chapitre 2

Algèbre tensorielle

2.1. Les tenseurs pré-euclidiens

Les tenseurs sont construits sur la base d'une opération appelée "produit tensoriel". Par exemple, si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension N et P respectivement, sur un même corps K, on définit leur produit tensoriel $E \otimes F$ de la façon suivante. Chaque élément de $E \otimes F$ peut être écrit sous la forme $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}$, où $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont des vecteurs de E et F respectivement, l'opération jouissant des propriétés suivantes :

– $\left\{ \begin{array}{l} \forall \boldsymbol{u} \in E, \forall \boldsymbol{v}_1 \in F, \forall \boldsymbol{v}_2 \in F, \boldsymbol{u} \otimes (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}_2 \\ \forall \boldsymbol{u}_1 \in E, \forall \boldsymbol{u}_2 \in E, \forall \boldsymbol{v} \in F, (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) \otimes \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 \otimes \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}_2 \otimes \boldsymbol{v} \end{array} \right.$

– $\forall \lambda \in K, \forall \boldsymbol{u} \in E, \forall \boldsymbol{v} \in F, \lambda(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \otimes \lambda \boldsymbol{v}$

– Si N vecteurs $\boldsymbol{a}_i$ constituent une base de E et P vecteurs $\boldsymbol{b}_j$ une base de F, alors les $N \times P$ vecteurs $\boldsymbol{a}_i \otimes \boldsymbol{b}_j$ constituent une base de $E \otimes F$.

Le produit tensoriel de deux espaces vectoriels est également un espace vectoriel. On peut donc à son tour le multiplier (de façon tensorielle) par un troisième espace vectoriel G, et on obtiendra l'espace vectoriel $(E \otimes F) \otimes G$. En constatant que l'opérateur $\otimes$ est associatif, on peut noter l'espace final $E \otimes F \otimes G$. D'une façon générale, on appelle tenseur construit sur les espaces E, F, G, ... tout élément de l'espace vectoriel $E \otimes F \otimes G \otimes$ ... Dans ce qui suit, nous nous limiterons au cas où l'espace vectoriel est engendré uniquement par un espace E et son dual E^*, tous deux éventuellement multipliés plusieurs fois entre eux. Dans ce cas les éléments de l'espace vectoriel engendré sont appelés tenseurs affines.

Considérons par exemple un élément $\boldsymbol{T}$ de l'espace vectoriel $E \otimes E^*$. Si les vecteurs $\boldsymbol{a}_i$ et $\overline{\boldsymbol{a}}^j$ constituent des bases respectives de E et E^*, alors les composantes de $\boldsymbol{T}$ dans l'espace vectoriel $E \otimes E^*$ seront notées T^i_j et on aura $\boldsymbol{T} = T^i_j \boldsymbol{a}_i \otimes \overline{\boldsymbol{a}}^j$. Il est évident que $\boldsymbol{T}$ aura des équivalents dans les espaces $E \otimes E$, $E^* \otimes E$, et $E^* \otimes E^*$, mais les notations dans ce cas deviennent vite lourdes. Or dans la plupart des applications, l'espace vectoriel E est pré-euclidien, de sorte que l'on identifie E et E^*. Il s'en suit que l'on peut identifier $\boldsymbol{T}$ et ses équivalents. Dans la suite, nous nous limiterons au cas d'un espace vectoriel pré-euclidien E.

Les tenseurs affines définis dans des espaces vectoriels issus de produits tensoriels (successifs ou non) entre un espace vectoriel pré-euclidien E et son dual (identifié à E) sont appelés tenseurs pré-euclidiens. En notant $\boldsymbol{a}^j$ les vecteurs de la base duale des $\boldsymbol{a}_i$, on peut alors écrire :

$$\forall \boldsymbol{T} \in E \otimes E, \boldsymbol{T} = T^{ij} \boldsymbol{a}_i \otimes \boldsymbol{a}_j = T_{ij} \boldsymbol{a}^i \otimes \boldsymbol{a}^j = T^j_i \boldsymbol{a}^i \otimes \boldsymbol{a}_j = T^i_j \boldsymbol{a}_i \otimes \boldsymbol{a}^j \tag{2.1}$$

Ceci permet de définir l'ordre d'un tenseur (nombre d'indices sur les composantes), ainsi que le type de ses composantes (voir paragraphe suivant).

2.2. Composantes d'un tenseur

Nous avons vu que les composantes d'un vecteur $\boldsymbol{u}$ de E exprimées par rapport à deux systèmes de vecteurs de base $\boldsymbol{a}_i$ (de dual $\boldsymbol{a}^j$) et $\boldsymbol{b}_i$ (de dual $\boldsymbol{b}^j$) se déduisaient les unes des autres par des combinaisons linéaires faisant intervenir une matrice ou son inverse suivant leur caractère covariant ou contravariant. D'une façon plus générale, on peut définir des tenseurs d'ordre quelconque qui se transforment de façon mixte (covariante et contravariante). Par exemple, X_{ij}^{klm} et Y_{ij}^{klm} sont les composantes trois fois contravariantes et deux fois covariantes d'un même tenseur $\boldsymbol{T}$ d'ordre 5, exprimées respectivement par rapport aux vecteurs de base $\boldsymbol{a}_i$ et $\boldsymbol{b}_i$. Ces composantes respectent donc la relation suivante :

$$\boldsymbol{T} = X_{ij}^{klm}\boldsymbol{a}^i \otimes \boldsymbol{a}^j \otimes \boldsymbol{a}_k \otimes \boldsymbol{a}_l \otimes \boldsymbol{a}_m = Y_{ij}^{klm}\boldsymbol{b}^i \otimes \boldsymbol{b}^j \otimes \boldsymbol{b}_k \otimes \boldsymbol{b}_l \otimes \boldsymbol{b}_m \tag{2.2}$$

et se déduisent les unes des autres sous la forme :

$$Y_{pq}^{rst} = A_p^i A_q^j B_k^r B_l^s B_m^t X_{ij}^{klm} \tag{2.3}$$

Un tenseur d'ordre zéro est un scalaire invariant par changement de système de coordonnées. Un tenseur est dit symétrique par rapport à deux indices covariants ou deux indices contravariants si ses composantes restent inchangées dans une permutation des deux indices. Il sera dit antisymétrique par rapport à ces indices si ses composantes changent de signe dans une permutation.

Le tenseur métrique permet de relier entre elles les différentes composantes d'un tenseur. En effet,la multiplication par g^{ij} peut être interprétée de la façon suivante : poser $i = j$ (ou $j = i$) dans tout ce qui suit et élever l'indice. De même nous pouvons donner à la multiplication par g_{ij} la signification suivante : poser $i = j$ (ou $j = i$) dans tout ce qui suit et abaisser l'indice. Par exemple, les composantes covariantes du tenseur $\boldsymbol{Y}$ de l'équation précédente sont obtenues sous la forme :

$$Y_{pqrst} = g_{ri}g_{sj}g_{tk}Y_{pq}^{ijk} \tag{2.4}$$

Il existe enfin pour les tenseurs un autre type de composantes, largement utilisé en physique, dans les espaces euclidiens. Ces composantes sont d'ailleurs appelées "composantes physiques". Ce sont les projections du tenseur sur les vecteurs de base de l'espace. Nous avons donc pour un vecteur $\boldsymbol{u}$ les composantes physiques u_I suivantes, en fonction de ses composantes covariantes et contravariantes, et de la métrique :

$$u_I = \boldsymbol{u}.\frac{\boldsymbol{a}_i}{\|\boldsymbol{a}_i\|} = \frac{u_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{g_{ij}u^j}{\sqrt{g_{ii}}} \tag{2.5}$$

De même, pour un tenseur $\boldsymbol{A}$ d'ordre 2, les composantes physiques A_{IJ} s'obtiennent de la façon suivante :

$$A_{IJ} = \boldsymbol{A} : \frac{\boldsymbol{a}_i \otimes \boldsymbol{a}_j}{\|\boldsymbol{a}_i \otimes \boldsymbol{a}_j\|} = \frac{A_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} = \frac{g_{ik}g_{jl}A^{kl}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} \tag{2.6}$$

Dans le cas d'une base orthogonale, les composantes de la métriques forment une matrice diagonale, ce qui permet de simplifier les relations précédentes. Dans un système orthonormé, les composantes du tenseur métrique coïncident toutes avec la matrice identité. Il s'en suit que tous les types de composantes d'un tenseur sont identiques. Dans ce cas, les indices sont tous placés "en bas" en ne considérant que les composantes covariantes des tenseurs. En calcul matriciel, ceci est couramment utilisé. La convention de sommation d'Einstein est alors étendue aux indices répétés en même position (et non en haut et en bas comme c'est normalement le cas).

2.3. Opérations sur les tenseurs

Considérons deux tenseurs $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ du même ordre. Alors, leur somme $\boldsymbol{Z}$ sera un tenseur du même ordre dont les composantes sont la somme des composantes correspondantes de $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$. Toutefois, il convient de sommer les composantes de même type uniquement. De même, la soustraction de deux tenseurs $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ donne un tenseur dont les composantes sont obtenues en soustrayant celles de $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$.

Le produit de deux tenseurs $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ se fait également en multipliant les composantes. Par contre, dans ce cas, le tenseur $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{Y}$ obtenu a un ordre égal à la somme des ordres de $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$. De plus, le produit de composantes de types différents peut être réalisé. Notons enfin que l'on ne peut pas écrire n'importe quel tenseur comme le produit de deux tenseurs d'ordres inférieurs. Pour cette raison, la division des tenseurs n'est pas toujours possible.

Si on pose l'égalité entre un indice contravariant et un indice covariant des composantes d'un même tenseur, le résultat indique qu'on doit faire une sommation sur les indices égaux d'après la convention d'Einstein. La somme résultante est la composante d'un tenseur d'ordre $N-2$ où N est l'ordre du tenseur initial. Le procédé s'appelle une contraction. Par exemple, dans un tenseur $\boldsymbol{X}$ d'ordre 5, si on applique une contraction à ses composantes X_{ij}^{klm} en posant $m = j$, on obtient les composantes Y_i^{kl} d'un nouveau tenseur $\boldsymbol{Y}$ d'ordre 3. De plus, en posant $l = i$, on obtient les composantes contravariantes Z^k d'un tenseur $\boldsymbol{Z}$ d'ordre 1.

Par un produit tensoriel de deux tenseurs suivi d'une contraction, on obtient un nouveau tenseur appelé produit contracté des tenseurs donnés. Par exemple, le produit d'un tenseur $\boldsymbol{X}$ d'ordre 3 et d'un tenseur $\boldsymbol{Y}$ d'ordre 2 fournit un tenseur d'ordre 5. En effectuant une contraction d'indice, on obtient un tenseur $\boldsymbol{Z}$ d'ordre 3 dont les composantes sont $Z_k^{il} = X_k^{ij} Y_j^l$. Un exemple courant de produit contracté est le produit matriciel. Ainsi, le produit de deux matrices (d'ordre 2) donne par contraction une nouvelle matrice (d'ordre 2x2-2=2).

Parfois, on utilise un produit "doublement contracté" de deux tenseurs. Il y a alors sommation sur deux indices, et l'ordre du tenseur final est diminué de 4. C'est le cas par exemple de l'énergie de déformation élastique (scalaire ou tenseur d'ordre 0), issue du produit doublement contracté entre les tenseurs de contraintes (ordre 2) et de déformations (ordre 2).

Notons enfin qu'il existe un critère, dit "critère de tensorialité", pour vérifier si une quantité est un tenseur. Si le produit contracté de cette quantité avec un tenseur donne un tenseur, alors cette quantité est elle-même un tenseur. Ce critère est également appelé "loi du quotient" en anglais.

2.4. Notions d'algèbre extérieure

Nous nous intéressons ici aux tenseurs d'ordre $p \leq N$ (où N est la dimension de E) complètement antisymétriques. Soit $\boldsymbol{T}$ un tel tenseur, alors ses composantes covariantes $T_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ changent de signe dès que l'on permute deux indices. On montrent alors qu'il en est de même pour tous ses types de composantes. Si $E^{(p)}$ est l'ensemble des tenseurs complètement antisymétriques d'ordre $p \leq N$, alors $E^{(p)}$ est un sous-espace vectoriel de celui des tenseurs d'ordre p sur E.

Soit $\boldsymbol{T}$ un élément de $E^{(p)}$. On définit ses composantes "strictes" $T_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}$ telles que $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p \leq N$. On a alors :

$$T_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \delta_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} T_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} \tag{2.7}$$

où le terme $\delta_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{j_1 j_2 \ldots j_p}$ est une généralisation du symbole de Kroenecker δ_i^j qui vaut $(-1)^q$ si les deux suites $i_1 i_2 \ldots i_p$ et $j_1 j_2 \ldots j_p$ se déduisent l'une de l'autre par q permutations d'indices, et 0 sinon.

Ainsi, tous les types de composantes de $\boldsymbol{T}$ se déduisent de ses composantes strictes, qui sont au nombre de C_n^p. Par exemple, pour $N = 3$, les tenseurs d'ordre 2 complètement antisymétriques ont $C_3^2 = 3$ composantes strictes (T_{12}, T_{23}, T_{13}). On reconnaît ici les termes indépendants des matrices $3x3$ antisymétriques.

On peut maintenant définir le "produit extérieur" entre p éléments de E $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p)$, qui est une généralisation du produit vectoriel classique, sous la forme du tenseur suivant :

$$\boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{u}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{u}_p = \delta^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{12 \ldots p} \boldsymbol{u}_{i_1} \otimes \boldsymbol{u}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{u}_{i_p} \tag{2.8}$$

Si on note $\boldsymbol{a}_j$ les vecteurs de base de E, et x_i^j les composantes contravariantes de $\boldsymbol{u}_i$ sur cette base ($\boldsymbol{u}_i = x_i^j \boldsymbol{a}_j$), alors le produit extérieur s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{u}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{u}_p &= x_{i_1}^{j_1} x_{i_2}^{j_2} \ldots x_{i_p}^{j_p} \delta^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{12 \ldots p} \boldsymbol{a}_{j_1} \otimes \boldsymbol{a}_{j_2} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{a}_{j_p} \\ &= x_1^{j_1} x_2^{j_2} \ldots x_p^{j_p} \boldsymbol{a}_{j_1} \wedge \boldsymbol{a}_{j_2} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_{j_p} \end{aligned} \tag{2.9}$$

On montre ainsi que les C_n^p tenseurs $\boldsymbol{a}_{\alpha_1} \wedge \boldsymbol{a}_{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_{\alpha_p}$ forment une base de l'espace vectoriel $E^{(p)}$ des tenseurs complètement antisymétriques d'ordre p. Ceci permet de donner la dimension de cet espace, et d'exprimer tout tenseur $\boldsymbol{T}$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= T^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} \boldsymbol{a}_{\alpha_1} \wedge \boldsymbol{a}_{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_{\alpha_p} \\ &= T_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} \boldsymbol{a}^{\alpha_1} \wedge \boldsymbol{a}^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}^{\alpha_p} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Lors d'un changement de base dans E (passage des $\boldsymbol{a}_i$ aux $\boldsymbol{b}_j$ avec $\boldsymbol{b}_j = B_j^i \boldsymbol{a}_i$ et $\boldsymbol{a}_i = A_i^j \boldsymbol{b}_j$), on constate que les composantes strictes $X^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}$ et $Y^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_p}$ d'un même tenseur $\boldsymbol{T}$ de $E^{(p)}$ dans les deux bases issues de celles de E sont reliées de la façon suivante :

$$\boldsymbol{T} = X^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} \boldsymbol{a}_{\alpha_1} \wedge \boldsymbol{a}_{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_{\alpha_p} = Y^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_p} \boldsymbol{b}_{\beta_1} \wedge \boldsymbol{b}_{\beta_2} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{b}_{\beta_p} \tag{2.11}$$

avec :

$$X^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} = \delta^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}_{j_1 j_2 \ldots j_p} B^{j_1}_{\beta_1} B^{j_2}_{\beta_2} \ldots B^{j_p}_{\beta_p} Y^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_p} \tag{2.12}$$

Chapitre 3

Géométrie différentielle

3.1. Repère naturel

Nous nous plaçons ici dans un espace ponctuel (affine) euclidien E_0, dont l'espace vectoriel associé E est de dimension N, muni d'un repère (R) d'origine O et d'un système de coordonnées curvilignes (x^i). Ce système de coordonnées est caractérisé par N fonctions plusieurs fois continuement différentiables reliant les coordonnées curvilignes x^i d'un point M à ses coordonnées X^i dans le repère (R). De plus, nous supposerons qu'il existe autour du point M une relation bi-univoque entre les x^i et les X^i. Les coordonnées curvilignes les plus utilisées en dimension 3 sont les coordonnées cylindriques (r, θ, z) et les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ).

En un point M de coordonnées curvilignes x^i, on définit un repère naturel de la façon suivante. L'origine du repère est fixée en M, et les vecteurs de base $\boldsymbol{a}_i$ sont définis par :

$$d\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{a}_i dx^i \text{ soit } \boldsymbol{a}_i = \frac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial x^i} \tag{3.1}$$

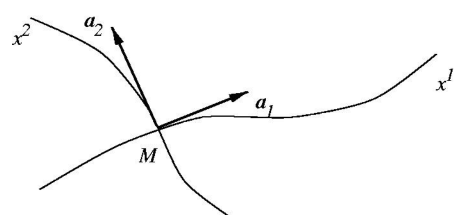

Figure 3.1. Repère naturel en un point de l'espace

Ce repère naturel est donc tangent aux lignes de coordonnées (figure 3.1). L'équation précédente montre que les dx^i sont les composantes contravariantes de $d\boldsymbol{OM}$ (vecteur de E) dans le repère naturel. Il est donc possible de définir le tenseur métrique (souvent appelé "métrique") de cet espace. Les composantes covariantes de ce tenseur sont issues du repère naturel ($g_{ij} = \boldsymbol{a}_i.\boldsymbol{a}_j$). Ce tenseur dépend du point M, origine du repère naturel, et donc de la position à laquelle on se trouve dans l'espace E_0.

Supposons maintenant que l'on définisse un nouveau système de coordonnées curvilignes (y^i). Au point M, un nouveau repère naturel sera constitué du point M et de vecteurs de base $\boldsymbol{b}_i$. D'après la formule de dérivation des fonctions composées, on peut écrire :

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{a}_i = \frac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial x^i} = \frac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\boldsymbol{b}_j = A_i^j \boldsymbol{b}_j \text{ avec } A_i^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \\ \boldsymbol{b}_j = \frac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial y^j} = \frac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^j} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\boldsymbol{a}_i = B_j^i \boldsymbol{a}_i \text{ avec } B_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \end{array}\right. \tag{3.2}$$

Cette équation montre qu'un changement de coordonnées curvilignes est caractérisé par un changement de repère naturel. Les composantes d'un tenseur $\boldsymbol{T}$ changeront donc lorsque, en un point M fixé, on changera de système de coordonnées. Pour obtenir les nouvelles composantes de $\boldsymbol{T}$ dans le repère naturel défini par les $\boldsymbol{b}_i$, on utilisera donc les relations de changement de base vues précédemment. Les composantes d'un tenseur $\boldsymbol{T}$ pourront également changer lorsque l'on déplacera le point M, tout en gardant le même système de coordonnées, puisque le repère naturel change. On parle alors de "champs de tenseurs".

3.2. Symboles de christoffel

Nous avons vu que, en chaque point M de l'espace E_0, on pouvait caractériser la métrique de cet espace par un tenseur de composantes covariantes g_{ij}. Ainsi, si l'on se déplace de quantités dx^i dans le repère naturel des $\boldsymbol{a}_i$, l'élément de longueur engendré ds est obtenu par le produit scalaire, dans E, du vecteur $d\boldsymbol{x}$ de composantes dx^i avec lui-même. On obtient alors :

$$ds^2 = d\boldsymbol{x}.d\boldsymbol{x} = g_{ij}dx^i dx^j \tag{3.3}$$

Le problème fondamental en géométrie différentielle réside dans le fait que le repère naturel, et donc la métrique, dépend du point M de l'espace. Il s'en suit que deux tenseurs définis par leurs composantes par rapport à deux repères différents (ou en deux points distincts de l'espace) ne pourront être comparés que si l'on connaît le lien entre ces deux repères. L'objectif des symboles de Christoffel est de réaliser le lien entre deux repères naturels infiniment voisins $\boldsymbol{a}_i$ et $\boldsymbol{a}_i + d\boldsymbol{a}_i$.

Lorsque l'on déplace l'origine M du repère naturel d'une quantité $d\boldsymbol{x}$, les vecteurs de base $\boldsymbol{a}_i$ de ce repère se modifient d'une quantité $d\boldsymbol{a}_i$. En notant dans le repère naturel initial dx^i et dx_i les composantes de $d\boldsymbol{x}$ ($d\boldsymbol{x} = dx^i\boldsymbol{a}_i$, $dx_i = d\boldsymbol{x}.\boldsymbol{a}_i$) et $d\omega_i^j$ et $d\omega_{ij}$ celles de $d\boldsymbol{a}_i$ ($d\boldsymbol{a}_i = d\omega_i^j\boldsymbol{a}_j$, $d\omega_{ij} = d\boldsymbol{a}_i.\boldsymbol{a}_j$), les symboles de Christoffel relient ces quantités sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} d\omega_{kj} = \Gamma_{ikj}dx^i \\ d\omega_j^k = \Gamma_{ij}^k dx^i \end{array}\right. \tag{3.4}$$

Les fonctions Γ_{ikj} et Γ_{ij}^k sont appelés symboles de Christoffel respectivement de première et de deuxième espèce. Il s'agit de N^3 fonctions reliées entre elles sous la forme $\Gamma_{ikj} = g_{kl}\Gamma_{ij}^l$ et $\Gamma_{ij}^k = g^{kl}\Gamma_{ilj}$. Pour obtenir ces N^3 fonctions, on différencie les composantes covariantes de la métrique pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{l} dg_{jk} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}dx^i \\ dg_{jk} = d\boldsymbol{a}_k.\boldsymbol{a}_j + d\boldsymbol{a}_j.\boldsymbol{a}_k = (\Gamma_{ikj} + \Gamma_{ijk})dx^i \end{array}\right. \Rightarrow \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{ijk} \tag{3.5}$$

On peut enfin interpréter les symboles de Christoffel de seconde espèce comme les composantes dans le repère naturel des dérivées partielles secondes du vecteur position $\boldsymbol{OM}$:

$$d\boldsymbol{a}_i = d\omega_i^j\boldsymbol{a}_j = \Gamma_{ki}^j dx^k\boldsymbol{a}_j = (\Gamma_{ki}^j\boldsymbol{a}_j)dx^k \Rightarrow \Gamma_{ki}^j\boldsymbol{a}_j = \frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{OM}}{\partial x^k \partial x^i} \tag{3.6}$$

La symétrie des dérivées secondes croisées du vecteur $\boldsymbol{OM}$ (qui sera discutée lors de la définition du tenseur de torsion) implique les relations de symétrie $\Gamma_{ikj} = \Gamma_{jki}$ et $\Gamma^l_{ij} = \Gamma^l_{ji}$, qui permettent d'écrire par permutation circulaire des indices les relations suivantes :

$$\begin{cases} \Gamma_{kij} + \Gamma_{ikj} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \\ \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jik} = \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \\ \Gamma_{jik} + \Gamma_{kji} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \end{cases} \tag{3.7}$$

En effectuant dans l'équation précédente la somme des deux premières relations moins la dernière, on obtient la définition des termes Γ_{ikj}. On peut finalement écrire l'expression des symboles de Christoffel de première et de seconde espèce sous la forme :

$$\begin{cases} \Gamma_{ikj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \\ \Gamma^k_{ij} = g^{kl}\Gamma_{ilj} \end{cases} \tag{3.8}$$

On remarque sur les équations précédentes que les symboles de Christoffel peuvent être exprimés directement en fonction des variations des composantes du tenseur métrique le long des lignes de coordonnées.

3.3. Différentielle absolue, dérivée covariante

Considérons un vecteur quelconque $\boldsymbol{u}$ défini par ses composantes contravariantes u^i dans le repère naturel des $\boldsymbol{a}_i$ au point M. Lorsque l'on va se déplacer d'un quantité infinitésimale sur le système de coordonnées curvilignes, les composantes de $\boldsymbol{u}$ vont être modifiées d'une quantité du^i, mais comme le repère naturel change également, un terme (souvent appelé "convectif") va venir s'ajouter à cette variation pour obtenir :

$$d\boldsymbol{u} = du^j \boldsymbol{a}_j + u^j d\boldsymbol{a}_j \tag{3.9}$$

Le dernier terme de cette équation est appelé "convectif". Il est dû à la variation du repère naturel au cours du déplacement dans l'espace. Il est illustré sur la figure 3.2, où un vecteur $\boldsymbol{u}$ est simplement transporté dans le système de coordonnées. On n'a donc pas de variation de ses coordonnées dans le repère initial ($du^i = 0$), mais ses nouvelles composantes (dans le nouveau repère naturel) sont tout de même modifiées.

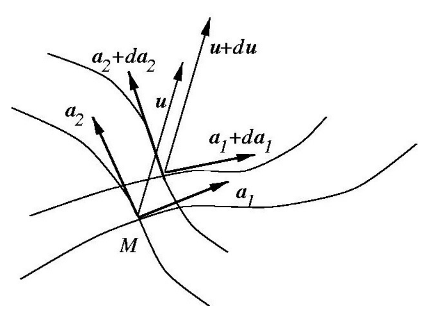

Figure 3.2. Transport d'un vecteur en coordonnées curvilignes

En utilisant les définitions précédentes, les composantes contravariantes du vecteur $d\boldsymbol{u}$ peuvent être écrites sous la forme :

$$d\boldsymbol{u} = (\Delta u^k)\boldsymbol{a}_k \text{ avec } \Delta u^k = du^k + u^j d\omega_j^k \tag{3.10}$$

On donne à Δu^k le nom de "différentielle absolue" de u^k. Il s'agit des composantes contravariantes du tenseur $d\boldsymbol{u}$, ce qui n'est pas le cas pour les termes du^k. Par abus de language, on dit souvent que $d\boldsymbol{u}$ est la différentielle absolue de $\boldsymbol{u}$. En introduisant maintenant les dérivées partielles par rapport aux coordonnées curvilignes x^i, on peut écrire :

$$\Delta u^k = u^k_{,i} dx^i \text{ avec } u^k_{,i} = \frac{\partial u^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ij} u^j \tag{3.11}$$

Les termes $u^k_{,i}$ sont les composantes mixte d'un tenseur appelé "dérivée covariante" de $\boldsymbol{u}$. Si $\boldsymbol{u}$ avait été donné par ses composantes covariantes u_k, alors le même raisonnement nous aurait conduit à définir la dérivée covariante de $\boldsymbol{u}$ par rapport à ses composantes covariantes. On peut résumer ces résultats par les formules suivantes :

$$\begin{array}{l} u^k_{,i} = \frac{\partial u^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ij} u^j \\ u_{k,i} = \frac{\partial u_k}{\partial x^i} - \Gamma^j_{ki} u_j \end{array} \tag{3.12}$$

D'une façon plus générale, on définit la dérivée covariante d'un tenseur d'ordre quelconque $\boldsymbol{T}$ par celles de ses composantes. Par exemple, si $\boldsymbol{T}$ est d'ordre 5, sa dérivée covariante sera d'ordre 6. Ses composantes mixtes (4 fois covariantes et 2 fois contravariantes) seront données par :

$$T^{mn}_{ijk,l} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T^{mn}_{ijk}}{\partial x^l} \\ -\Gamma^r_{il} T^{mn}_{rjk} - \Gamma^r_{jl} T^{mn}_{irk} - \Gamma^r_{kl} T^{mn}_{ijr} \\ +\Gamma^m_{lr} T^{rn}_{ijk} + \Gamma^n_{lr} T^{mr}_{ijk} \end{array} \right. \tag{3.13}$$

En applicant par exemple ces formules au tenseur métrique, et en utilisant les relations précédentes, on obtient :

$$g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} g_{lj} - \Gamma^l_{kj} g_{li} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - (\Gamma_{jik} + \Gamma_{kji}) = 0 \tag{3.14}$$

La différentielle absolue du tenseur métrique est donc nulle. Ce résultat est connu sous la nom de "théorème de Ricci".

3.4. Les tenseurs de courbure et de torsion

La dérivée covariante peut être calculée sur tout tenseur, et donc en particulier sur des tenseurs eux-même dérivée covariante. En utilisant les relations précédentes, on peut relier la différence entre les dérivées covariantes secondes croisées d'un vecteur à ce vecteur sous la forme :

$$u_{j,kl} - u_{j,lk} = R^n_{jkl} u_n \text{ avec } R^n_{jkl} = \Gamma^m_{jl}\Gamma^n_{mk} - \Gamma^m_{jk}\Gamma^n_{ml} + \frac{\partial \Gamma^n_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^n_{jk}}{\partial x^l} \tag{3.15}$$

Les termes R^n_{jkl} sont les composantes d'un tenseur. En effet, d'après cette équation, leur produit contracté avec un tenseur d'ordre 1 donne une différence de tenseurs, et donc un tenseur. Le tenseur $\boldsymbol{R}$ ainsi obtenu est d'ordre 4. Il est appelé "tenseur de Riemann-Christoffel" ou "tenseur de courbure". Ses composantes covariantes sont $R_{ijkl} = g_{in} R^n_{jkl}$. On montre qu'elles sont :

– antisymétriques en (k,l) : $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$
– antisymétriques en (i,j) : $R_{ijkl} = -R_{jikl}$
– symetriques en (i,j),(k,l) : $R_{ijkl} = R_{klij}$

Par exemple, en dimension 2, ce tenseur ne possède qu'une seule composante non nulle : R_{1212}. De plus, les propriétés preécédentes montrent que l'on peut caractériser ce tenseur à l'aide des seules composantes $R_{jk} = g^{il}R_{ijkl}$, qui forment un tenseur symétrique d'ordre 2 appelé "tenseur de Ricci". Enfin, la trace de ce tenseur est appelée "courbure scalaire".

Dans un espace euclidien, le tenseur de Riemann-Christoffel est nul. En effet, dans ce type d'espace, le changement de repère naturel ne dépend pas du chemin suivi. Ceci signifie que, si en chaque point d'un espace une métrique (c'est à dire des composantes g_{ij}) peut être choisie de façon arbitraire, celle-ci ne correspondra pas forcément à celle d'un espace euclidien. Pour cela, il faudra qu'elle annule le tenseur de Riemann-Christoffel. On peut maintenant se poser la question : si le tenseur de Riemann-Christoffel est nul, l'espace est-il euclidien ? En fait, l'espace n'est alors que "localement" euclidien, puisque ce tenseur n'est défini qu'autour d'un point M de l'espace. Plus généralement, si ce tenseur n'est pas nul, alors l'espace est dit "localement" non-euclidien. Nous entrons alors dans le domaine de la géométrie riemannienne (espaces de Riemann), géométrie par exemple largement utilisée en cosmologie [HEI 73].

Les symboles de Christoffel ont été définis comme des fonctions Γ_{ikj} et Γ_{ij}^k. Toutefois, ces fonctions ne sont pas les composantes d'un tenseur. Considérons en effet deux repères naturels en un point M de l'espace, avec des vecteurs de base $\boldsymbol{a}_i$ et $\boldsymbol{b}_i$ tels que $\boldsymbol{b}_i = B_i^j \boldsymbol{a}_j$ et $\boldsymbol{a}_i = A_i^j \boldsymbol{b}_j$. On montre alors facilement que :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\boldsymbol{b}_i = \Omega_i^j \boldsymbol{b}_j \\ d\boldsymbol{a}_i = \omega_i^j \boldsymbol{a}_j \end{array} \right. \Rightarrow \Omega_i^j = B_i^k A_l^j \omega_k^l + dB_i^k A_k^j \tag{3.16}$$

En notant maintenant x^i les coordonnées curvilignes associées aux $\boldsymbol{a}_i$, et y^i celles associées aux $\boldsymbol{b}_i$, et Γ_{ij}^k et Π_{ij}^k les symboles de Christoffel associés respectivement à ces deux systèmes de coordonnées, on obtient la relation suivante de transformation des symboles de Christoffel par changement de coordonnées :

$$\Pi_{ij}^k = A_i^l A_j^m B_n^k \Gamma_{lm}^n + B_n^k \frac{\partial^2 x^n}{\partial y^i \partial y^j} \tag{3.17}$$

Le dernier terme de cette équation montre que les symboles de Christoffel n'ont pas de caractère tensoriel. Par contre, ce dernier terme est symétrique en (i,j). Il s'en suit que les termes :

$$\tau_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k \tag{3.18}$$

forment les composantes d'un tenseur $\boldsymbol{T}$ du troisième ordre, antisymétrique en (i,j), appelé "tenseur de torsion" ou "tenseur de Cartan". Ce tenseur est par exemple utilisé dans la description des défauts linéaires (dislocations) dans les cristaux [FOR 96].

Nous avions précédemment relié les symboles de Christoffel aux dérivées secondes du vecteur position $\boldsymbol{OM}$. Il apparaît que la nullité du tenseur de torsion equivaut à la permutabilité des dérivées partielles de fonctions vectorielles (telles que le vecteur position). Elle conduit à la symétrie des symboles de Christoffel, et à leur expression explicite en fonction des variations de la métrique le long des lignes de coordonnées.

Chapitre 4

Expression de quelques opérateurs

4.1. Accélération d'un point

Nous considérons ici un point M de l'espace dont la trajectoire est paramétrée par t (que nous interprèterons comme le temps). Cette trajectoire est donc donnée par l'évolution au cours du temps des coordonnées du point M, que nous noterons $u^i(t)$. La vitesse instantanée du point sera un vecteur $\boldsymbol{v}$, de composantes contravariantes $v^i = \frac{du^i}{dt}$. L'accélération instantanée $\boldsymbol{\gamma}$ du point M sera également un vecteur, obtenu comme la dérivée du vecteur vitesse, soit $\boldsymbol{\gamma} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$. Comme le vecteur $d\boldsymbol{v}$ a pour composantes contravariantes les différencielles absolues des v^i, alors le vecteur accélération aura comme composantes contravariantes :

$$\gamma^i = \frac{\Delta v^i}{dt} = \frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{kl} v^l \frac{du^k}{dt} = \frac{d^2u^i}{dt^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{du^k}{dt}\frac{du^l}{dt} \tag{4.1}$$

Considérons maintenant les trajectoires des point M d'accélération nulle. Ces trajectoires sont communément appelées des "droites". En fait, les trajectoires d'accélération nulle sont données d'une façon générale par le système d'équations différentielles suivant, issu de l'équation précédente :

$$\forall i = 1, ..., N, \frac{d^2u^i}{dt^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{du^k}{dt}\frac{du^l}{dt} = 0 \tag{4.2}$$

Elles sont appelées "géodésiques". Dans un espace dont la métrique est constante, c'est-à-dire ne dépend pas du point M considéré, alors les symboles de Christoffel sont par définition nuls, est on retombe sur l'équation d'une droite. Notons enfin que la distance d qui sépare deux points situés sur une courbe paramétrée $x^i = x^i(t)$, aux abscisses t_1 et t_2, est donnée par :

$$d = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}}dt \tag{4.3}$$

On montre que les géodésiques rendent extrémale cette distance (minimum ou maximum). Par exemple, la surface d'une sphère peut être considérée comme un espace de dimension 2, dans lequel on peut définir un système de coordonnées curvilignes (lattitude et longitude), et dans lequel les grands cercles joignent deux point avec une distance minimum ou maximum. Ces grands cercles sont des courbes paramétrées qui satisfont le système d'équations différentielles précédent. Ce sont les géodésiques de cet espace.

4.2. Gradient

Le gradient d'un tenseur $\boldsymbol{T}$ est à son tour un tenseur, dont les composantes sont obtenues comme la dérivée covariante des composantes de $\boldsymbol{T}$. Le gradient d'un tenseur d'ordre N est donc un tenseur d'ordre $N+1$. Si f est un scalaire (tenseur d'ordre 0, invariant par changement de repère), le gradient de f est un tenseur d'ordre 1 (un vecteur) dont les composantes covariantes sont définies par $f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Si $\boldsymbol{u}$ est un vecteur (tenseur d'ordre 1), le gradient de $\boldsymbol{u}$ est un tenseur d'ordre 2, dont les composantes covariantes et mixtes sont :

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij} u_k \text{ et } u^i_{,j} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} u^k \tag{4.4}$$

Le gradient est largement présent dans les disciplines scientifiques. Il sert par exemple à définir les déformations en mécanique, et les forces motrices en thermique (gradient thermique) et en chimie minérale (gradients de potentiels chimiques ou d'activité). En coordonnées orthonormées (x, y, z), on obtient par exemple :

$$\boldsymbol{grad}(f) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right. \tag{4.5}$$

$$\boldsymbol{grad}(\boldsymbol{u}) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{array} \right] \tag{4.6}$$

4.3. Divergence

La divergence d'un tenseur $\boldsymbol{T}$ est à son tour un tenseur, dont les composantes sont obtenues par contraction de sa dérivée covariante (son gradient) par rapport à son dernier indice contravariant. La divergence d'un tenseur d'ordre N est donc un tenseur d'ordre $N-1$. La divergence d'un vecteur $\boldsymbol{u}$ est donc le scalaire $u^i_{,i}$, tandis que celle d'un tenseur $\boldsymbol{A}$ d'ordre 2 est un vecteur dont les composantes contravarientes sont $A^{ij}_{,j}$. L'expression générale de la divergence d'un tenseur d'ordre 2 peut être simplifiée en utilisant le théorème de Ricci.

La divergence est largement présente dans les équations d'équilibre en mécanique, ainsi que dans les équations de conservation en thermique et en transfert de masse. Elle est principalement appliqué sur des tenseurs d'ordre 1 et 2. En coordonnées orthonormées (x, y, z), on obtient :

$$div(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{4.7}$$

$$\boldsymbol{div}(\boldsymbol{A}) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} \end{array} \right. \tag{4.8}$$

4.4. Rotationel

Le rotationel appliqué sur un vecteur $\boldsymbol{u}$ (tenseur d'ordre 1) est un tenseur d'ordre 2 dont les composantes covariantes sont $u_{i,j} - u_{j,i}$. Du fait de la symétrie des symboles de Christoffel de seconde espèce sur les indices covariants, les composantes covariantes du rotationel d'un vecteur s'écrivent simplement $\frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \frac{\partial u_j}{\partial x^i}$. Le rotationel d'un vecteur est un tenseur anti-symétrie. Il est présent dans les équations de Maxwell en électromagnétisme. Il peut être écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -R_3 & R_2 \\ R_3 & 0 & -R_1 \\ -R_2 & R_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

où R_1, R_2 et R_3 sont les composantes d'un "vecteur rotation".

En coordonnées orthonormées (x, y, z), on obtient :

$$\begin{cases} R_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ R_y = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ R_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{cases} \tag{4.10}$$

4.5. Laplacien

Le laplacien est la divergence du gradient. Il est souvent noté Δ. Cet opérateur conserve donc l'ordre d'un tenseur. Appliqué sur une fonction scalaire f, on obtient le scalaire $\Delta(f) = (g^{ij} f_{,i})_{,i} = g^{ij} f_{,ji}$. Appliqué sur un vecteur $\boldsymbol{u}$, on obtient un tenseur d'ordre 1 dont les composantes covariantes sont $g^{kj} u_{i,jk}$.

Le laplacien est largement utilisé dans les équations d'équilibre ou de bilan, lorsque le comportement du matériau est linéaire. En coordonnées orthonormées (x, y, z), on obtient :

$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{4.11}$$

$$\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{u}) = \begin{cases} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{cases} \tag{4.12}$$

Annexe A

Coordonnées cylindriques

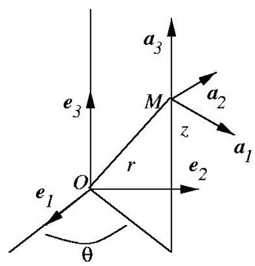

Figure A.1. Système de coordonnées cylindriques

Le système de coordonnées cylindriques est un système particulier de coordonnées curvilignes défini de la façon suivante (figure A.1). Soit un espace vectoriel E de dimension 3 sur le corps des réels, muni d'un système de coordonnées orthonormées (x^i) dans un repère ($\boldsymbol{e}_i$). Soit $\boldsymbol{u}$ un vecteur de E joignant les points O et M. Le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) est généré par un repère naturel ($\boldsymbol{a}_i$) tel que, au voisinage du point M :

$$d\boldsymbol{u} = dx^1\boldsymbol{e}_1 + dx^2\boldsymbol{e}_2 + dx^3\boldsymbol{e}_3 = dr\boldsymbol{a}_1 + d\theta\boldsymbol{a}_2 + dz\boldsymbol{a}_3 \tag{A.1}$$

avec la relation suivante entre les coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{l} x^1 = rcos\theta \\ x^2 = rsin\theta \\ x^3 = z \end{array}\right. \tag{A.2}$$

Les vecteurs $\boldsymbol{a}_i$ ont donc comme composantes dans le repère orthonormé :

$$\boldsymbol{a}_1 = \left| \begin{array}{l} cos\theta \\ sin\theta \\ 0 \end{array}\right. , \boldsymbol{a}_2 = \left| \begin{array}{l} -rsin\theta \\ rcos\theta \\ 0 \end{array}\right. , \boldsymbol{a}_3 = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right. \tag{A.3}$$

ce qui donne pour la métrique :

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \, g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \tag{A.4}$$

Les composantes physiques d'un vecteur $\boldsymbol{u}$ sont donc :

$$\begin{cases} u_r = u_1 = u^1 \\ u_\theta = \frac{u_2}{r} = r u^2 \\ u_z = u_3 = u^3 \end{cases} \tag{A.5}$$

tandis que celles d'un tenseur du second ordre $\boldsymbol{A}$ seront :

$$\begin{bmatrix} A_{rr} = A_{11} = A^{11} & A_{r\theta} = \frac{A_{12}}{r} = rA^{12} & A_{rz} = A_{13} = A^{13} \\ A_{\theta r} = \frac{A_{21}}{r} = rA^{21} & A_{\theta\theta} = \frac{A_{22}}{r^2} = r^2 A^{22} & A_{\theta z} = \frac{A_{23}}{r} = rA^{23} \\ A_{zr} = A_{31} = A^{31} & A_{z\theta} = \frac{A_{32}}{r} = rA^{32} & A_{zz} = A_{33} = A^{33} \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

Les symboles de Christoffel de première espèce sont obtenus à l'aide de leur définition et de la métrique définie précédemment sous la forme :

$$\Gamma_{i1j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \Gamma^1_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.7}$$

$$\Gamma_{i2j} = \begin{bmatrix} 0 & r & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \Gamma^2_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.8}$$

$$\Gamma_{i3j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \Gamma^3_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.9}$$

L'ensemble de ces équations permet de retrouver l'expression des opérateurs physiques en coordonnées cyclindriques. On trouve par exemple les composantes physiques suivantes :

– le gradient d'un scalaire f :

$$\boldsymbol{grad}(f) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases} \tag{A.10}$$

– le gradient d'un vecteur $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{grad}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r}(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{A.11}$$

– la divergence d'un vecteur $\boldsymbol{u}$:

$$div(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad \text{(A.12)}$$

– la divergence d'un tenseur $\boldsymbol{A}$ du second ordre symétrique :

$$\boldsymbol{div}(\boldsymbol{A}) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial A_{rz}}{\partial z} + \frac{A_{rr} - A_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial A_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial A_{\theta z}}{\partial z} + \frac{A_{r\theta} + A_{\theta r}}{r} \\ \frac{\partial A_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} + \frac{A_{zr}}{r} \end{array} \right. \qquad \text{(A.13)}$$

– les composantes du "vecteur rotation" associé au rotationel d'un vecteur $\boldsymbol{u}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_r = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ R_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ R_z = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} \end{array} \right. \qquad \text{(A.14)}$$

– le laplacien d'un scalaire f :

$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} \qquad \text{(A.15)}$$

Annexe B

Coordonnées sphériques

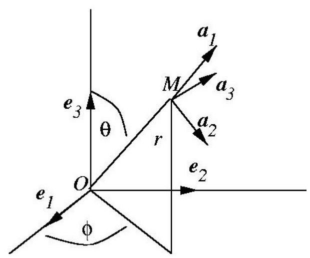

Figure B.1. Système de coordonnées sphériques

Le système de coordonnées sphériques est un système particulier de coordonnées curvilignes défini de la façon suivante (figure B.1). Soit un espace vectoriel E de dimension 3 sur le corps des réels, muni d'un système de coordonnées orthonormées (x^i) dans un repère $(\boldsymbol{e}_i)$. Soit $\boldsymbol{u}$ un vecteur de E joignant les points O et M. Le système de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) est généré par un repère naturel $(\boldsymbol{a}_i)$ tel que, au voisinage du point M :

$$d\boldsymbol{u} = dx^1\boldsymbol{e}_1 + dx^2\boldsymbol{e}_2 + dx^3\boldsymbol{e}_3 = dr\boldsymbol{a}_1 + d\theta\boldsymbol{a}_2 + d\phi\boldsymbol{a}_3 \tag{B.1}$$

avec des coordonnées liées entre elles sous la forme :

$$\begin{cases} x^1 = rsin\theta cos\phi \\ x^2 = rsin\theta sin\phi \\ x^3 = rcos\theta \end{cases} \tag{B.2}$$

Les vecteurs $\boldsymbol{a}_i$ ont donc comme composantes :

$$\boldsymbol{a}_1 = \left| \begin{array}{l} sin\theta cos\phi \\ sin\theta sin\phi \\ cos\theta \end{array} \right. , \boldsymbol{a}_2 = \left| \begin{array}{l} rcos\theta cos\phi \\ rcos\theta sin\phi \\ -rsin\theta \end{array} \right. , \boldsymbol{a}_3 = \left| \begin{array}{l} -rsin\theta sin\phi \\ rsin\theta sin\phi \\ 0 \end{array} \right. \tag{B.3}$$

ce qui donne pour la métrique :

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 sin^2\theta \end{bmatrix}, g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 sin^2\theta} \end{bmatrix}, \tag{B.4}$$

Les composantes physiques d'un vecteur $\boldsymbol{u}$ sont donc :

$$\begin{cases} u_r = u_1 = u^1 \\ u_\theta = \frac{u_2}{r} = ru^2 \\ u_\phi = \frac{u_3}{rsin\theta} = rsin\theta u^3 \end{cases} \tag{B.5}$$

tandis que celles d'un tenseur du second ordre $\boldsymbol{A}$ seront :

$$\begin{bmatrix} A_{rr} = A_{11} & A_{r\theta} = \frac{A_{12}}{r} & A_{r\phi} = \frac{A_{13}}{rsin\theta} \\ A_{\theta r} = \frac{A_{21}}{r} & A_{\theta\theta} = \frac{A_{22}}{r^2} & A_{\theta\phi} = \frac{A_{23}}{r^2 sin\theta} \\ A_{\phi r} = \frac{A_{31}}{rsin\theta} & A_{\phi\theta} = \frac{A_{32}}{r^2 sin\theta} & A_{\phi\phi} = \frac{A_{33}}{r^2 sin^2\theta} \end{bmatrix} \tag{B.6}$$

ou :

$$\begin{bmatrix} A_{rr} = A^{11} & A_{r\theta} = rA^{12} & A_{r\phi} = rsin\theta A^{13} \\ A_{\theta r} = rA^{21} & A_{\theta\theta} = r^2 A^{22} & A_{\theta\phi} = r^2 sin\theta A^{23} \\ A_{\phi r} = rsin\theta A^{31} & A_{\phi\theta} = r^2 sin\theta A^{32} & A_{\phi\phi} = r^2 sin^2\theta A^{33} \end{bmatrix} \tag{B.7}$$

Les symboles de Christoffel de première espèce sont obtenus à l'aide de leur définition et de la métrique définie précédemment :

$$\Gamma_{i1j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & -rsin^2\theta \end{bmatrix} \text{ et } \Gamma^1_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & -rsin^2\theta \end{bmatrix} \tag{B.8}$$

$$\Gamma_{i2j} = \begin{bmatrix} 0 & r & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r^2}{2} sin(2\theta) \end{bmatrix} \text{ et } \Gamma^2_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r}{2} sin(2\theta) \end{bmatrix} \tag{B.9}$$

$$\Gamma_{i3j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & rsin^2\theta \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} sin(2\theta) \\ rsin^2\theta & \frac{r^2}{2} sin(2\theta) & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \Gamma^3_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & \frac{cos\theta}{sin\theta} \\ \frac{1}{r} & \frac{cos\theta}{sin\theta} & 0 \end{bmatrix} \tag{B.10}$$

Ces équations permettent de retrouver les opérateurs différentiels classiques en coordonnées sphériques. On trouve par exemple les composantes physiques des tenseurs suivants :

– le gradient d'un scalaire f :

$$\boldsymbol{grad}(f) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi} \end{cases} \tag{B.11}$$

– le gradient d'un vecteur $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{grad}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{cos\theta}{rsin\theta}u_\phi \\ \frac{\partial u_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} & \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{cos\theta}{rsin\theta}u_\theta \end{bmatrix} \tag{B.12}$$

– la divergence d'un vecteur $\boldsymbol{u}$:

$$div(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{cos\theta}{rsin\theta}u_\theta \tag{B.13}$$

– la divergence d'un tenseur $\boldsymbol{A}$ symétrique d'ordre 2 :

$$\boldsymbol{div}(\boldsymbol{A}) = \begin{cases} \frac{\partial A_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial A_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{2A_{rr}-A_{\theta\theta}-A_{\phi\phi}}{r} + \frac{cos\theta}{rsin\theta}A_{r\theta} \\ \frac{\partial A_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial A_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{3A_{r\theta}}{r} + \frac{cos\theta}{rsin\theta}(A_{\theta\theta} - A_{\phi\phi}) \\ \frac{\partial A_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{\phi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial A_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{3A_{r\phi}}{r} + 2\frac{cos\theta}{rsin\theta}A_{\theta\phi} \end{cases} \tag{B.14}$$

– le "vecteur rotation" associé au rotationel d'un vecteur $\boldsymbol{u}$:

$$\begin{cases} R_r = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{cos\theta}{rsin\theta}u_\phi \\ R_\theta = \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \\ R_\phi = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \end{cases} \tag{B.15}$$

– le laplacien d'un scalaire f :

$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{cos\theta}{r^2 sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} \tag{B.16}$$

Bibliographie

[FOR 96] FOREST S., Modèles mécaniques de la déformation hétérogène des monocristaux, Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris, 1996.

[HEI 73] HEIDMANN J., *Introduction à la cosmologie*, PUF, 1973.

[HIL 78] HILL R., « Aspects of invariance in solid mechanics », *Advances in applied mechanics*, vol. 18, Academic Press, p. 1–75, 1978.

[LIC 87] LICHNEROWICZ A., *Eléments de calcul tensoriel*, Jacques Gabay, 1987, réimpression de Armand Colin (1946).

[MUR 73] MURRAY, SPIEGEL R., *Analyse vectorielle : cours et problemes*, McGraw-Hill Inc, New-York, 1973, traduit de 'theory and problems of vector analysis'.

[RIE 85] RIEU-BÉTRÉMA C., Elements de calcul tensoriel, cours ENSM-SE, 1985.