

# Identification de piézoviscosité en lubrification

J. MOLIMARD<sup>1</sup> et R. LE RICHE<sup>1,2</sup>

SMS<sup>1</sup> / CNRS URA 1884<sup>2</sup>, École des Mines de St Étienne, 158 Crs Fauriel, 42023 St Étienne Cedex 2

## RÉSUMÉ :

En lubrification, la connaissance des variations de viscosité de l'huile avec la pression est très importante. Une méthode de caractérisation basée sur des techniques d'analyse d'images est proposée. Un algorithme de Levenberg-Marquardt amélioré sert à l'identification. L'identifiabilité de la piézoviscosité est discutée. L'approche est appliquée à une expérience de blochet, en présence ou non de bruit expérimental.

## Introduction

En lubrification élastohydrodynamique (EHD), la connaissance de la rhéologie du lubrifiant conditionne fortement le comportement général du système tribologique (came/poussoir, engrenage, disque dur, ...). Cette communication est focalisée sur la sensibilité à la pression, appelée piézoviscosité.

Différents auteurs ont proposé des méthodes de mesure permettant de connaître précisément la hauteur de film puis la pression exercée sur le fluide dans un contact EHD [2, 3]. A partir de ces données, une modélisation de mécanique des fluides peut conduire à la rhéologie du lubrifiant, notamment sa piézoviscosité. Une première analyse théorique, menée par Ostensen [5], a conclu à la nécessité d'une connaissance très précise des données, ce qui semble aujourd'hui possible. Cependant, cette première approche souffre de plusieurs faiblesses : utilisation d'un seul modèle rhéologique, sensibilité excessive au bruit. Le présent travail explore diverses stratégies numériques de traitement des données et d'identification pour dépasser ces deux limitations.

## 1 - La dépendance viscosité-pression

### 1.1 - Modèles les plus utilisés

Le premier modèle proposé, le modèle de Barus, suppose une dépendance viscosité-pression exponentielle :

$$\eta(P) = \eta_0 \exp(\alpha \cdot P) \quad (1)$$

Dans l'équation (1),  $\eta_0$  est la viscosité dynamique à la pression ambiante et  $\alpha$  le coefficient de piézoviscosité de Barus. Ce modèle est couramment utilisé cependant, il peut surestimer la viscosité sous pression. Dans les études numériques récentes, on lui préfère souvent le modèle de Roelands :

$$\eta(P) = \eta_0 \exp\left( (9.67 + \ln \eta_0) \left[ -1 + \left( 1 + \frac{P}{P_0} \right)^z \right] \right) \quad (2)$$

Dans l'équation (2),  $z$  est le coefficient de piézoviscosité de Roelands et  $P_0$  une constante du modèle dont la valeur est  $1,98 \cdot 10^8$  Pa. Enfin le modèle WLF modifié, basé sur la théorie de volume libre s'exprime ainsi :

$$\log_{10} \eta(T, P) = \log_{10} \eta_g - \frac{C_1 (T - T_g(P)) \cdot F(P)}{C_2 + (T - T_g(P)) \cdot F(P)} \quad (3)$$

avec la température de transition  $T_g(P) = T_g(0) + A_1 \ln(1 + A_2 P)$  vitreuse, le coefficient d'expansion thermique  $F(P) = 1 - B_1 \ln(1 + B_2 P)$  et enfin la viscosité à la transition vitreuse  $\eta_g$ . Remarquons que cette loi suppose 8 paramètres ce qui donne une souplesse importante au modèle.

### 1.2 - Moyens de mesure actuels

Le moyen de mesure de la piézoviscosité le plus complet est l'utilisation d'un viscosimètre à chute de corps. Grâce à un tel appareil, chacune des lois décrites précédemment peut être identifiée. Cependant, les temps de mesure, de l'ordre de plusieurs minutes, voire d'heures, sont très différentes du temps de passage du lubrifiant dans un contact (quelques millisecondes). Mais cette approche reste rare et en pratique, le coefficient de piézoviscosité est souvent déduit de mesures de hauteur de film dans un contact bille/plan en fonction de la vitesse de roulement [3]. La piézoviscosité est alors identifiée à partir

de grandeurs macroscopiques et de modèles approchés de lubrification. Si les temps de passage sont bien respectés avec ce moyen, la modélisation rhéologique se réduit à la seule loi de Barus. D'autre part, les approximations successives font de ces modèles des outils parfois peu précis [3].

### 1.3 - Apport de l'analyse d'images en lubrification

Récemment, des méthodes optiques de champ couplées à des techniques d'analyse d'images ont permis de connaître avec précision la géométrie de l'entrefer d'un contact [3]. Outre l'épaisseur de film d'huile, donnée importante de la lubrification, il est possible d'évaluer l'écrasement des deux surfaces à l'échelle locale. En utilisant les équations d'élasticité, on remonte ainsi à la pression exercée dans le fluide [2]. Or, pression et épaisseur de film sont deux données fondamentales de l'équation de Reynolds, qui est l'expression des lois de Navier-Stokes dans le cas où une dimension est très petite devant les autres :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial P}{\partial y} \right) - \frac{u}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho h) = 0 \quad (4)$$

Dans l'expression (4), le lubrifiant est supposé compressible, mais la compressibilité reste faible, et on peut l'évaluer dans de bonnes conditions. Ainsi, dans un premier temps, seule la viscosité  $\eta$  est une inconnue. Il est donc possible de déterminer les variables de l'un des modèles rhéologiques décrits précédemment par minimisation des résidus adéquats sur l'ensemble des points du champ mesuré. Cette approche, dont la formulation ne dépend pas du modèle considéré, permet l'utilisation de toutes les informations contenues dans le champ de mesure. Si un traitement numérique pertinent est utilisé, l'influence du bruit peut être minimisée.

Du point de vue rhéologique, l'utilisation d'un contact bille/plan permet de tenir compte des effets temporels et l'équation de Reynolds, en s'affranchissant de la modélisation de l'ensemble du système tribologique, réduit fortement le nombre d'approximations.

## 2 - Méthode d'identification, calcul de sensibilité

En l'absence d'hypothèses statistiques particulières sur les expériences, l'approche de l'identification de modèle la mieux maîtrisée est la minimisation d'une distance en moindres carrés entre modèle et expériences,

$$\min_x J(x) = \frac{1}{2m} R(x)^T R(x) \quad , \quad (5)$$

où  $x$  est le vecteur des  $n$  paramètres à identifier (par exemple  $\eta_0$  et  $\alpha$  pour Barus) et  $R(x)$  est le vecteur des  $m$  résidus, c'est à dire un vecteur écart entre modèle et expériences.  $R$  étant une fonction non linéaire de  $x$ , le problème (5) est résolu au moyen de l'algorithme de Levenberg-Marquardt [4,1]. Cet algorithme est complété ici pour faire face aux trois difficultés de l'identification de lubrifiant : les ordres de grandeurs des paramètres sont très différents (dans WLF,  $A_2$  est en  $10^{-9}$ ,  $\eta_g^0$  en  $10^9$ ), les ordres de grandeurs des viscosités aussi ( $10^{-1}$  à  $10^5$  Pa.s), et les paramètres sont bornés. Deux stratégies de mise à l'échelle, par normalisation des variables  $x$ , et par limitation des déplacements de Levenberg-Marquardt en fonction de la sensibilité des résidus,  $\|(\nabla_x R(x_k))_i\|$ , sont utilisées simultanément pour résoudre le problème d'ordres de grandeurs des paramètres. Sans mises à l'échelle, l'identification de lubrifiant requiert, typiquement, 2 fois plus d'itérations, et est même susceptible d'échouer. La définition de résidus logarithmiques en viscosité permet de niveler les contributions à l'identification des différentes pressions (ce qui supprime des minima locaux de  $J$ ). Enfin, la satisfaction des conditions de Kuhn et Tucker à chaque itération de l'algorithme par résolution d'un problème adjoint est notre méthode de prise en compte des bornes. De plus amples détails sur cet algorithme se trouvent dans [1]. La sensibilité du critère  $J$  aux paramètres est caractérisée par les valeurs et vecteurs propres,  $s_k$  et  $v_k$  de la matrice de Gauss-Newton au point de convergence de l'algorithme,  $\nabla R(x^*)^T \nabla R(x^*)$ . Le conditionnement du problème est le rapport de la plus grande à la plus faible valeur propre,  $s_n/s_1$ .

### 3 - Identification numérique du lubrifiant

#### 3.1 - Identification à partir de mesures de viscosité

Une première série d'identifications est réalisée directement à partir de valeurs de viscosité pour différentes pressions, à une température constante ( $T=50^{\circ}C$ ). Ces premiers tests servent à évaluer l'influence du résidu, des stratégies de mise à l'échelle, et du modèle de piézoviscosité sur l'identification. Les conclusions obtenues sur ce problème sont généralisées à l'identification à partir de champs.

Les trois aspects de l'identifiabilité à savoir, l'unicité, la stabilité et la globalité des solutions, sont caractérisés en répétant les identifications des modèles de Barus, Roelands et WLF à partir de points initiaux différents, et en réalisant une étude de sensibilité au point de convergence. Les "mesures" sont générées par le modèle de Barus avec  $\eta_0=204 \text{ mPa}\cdot\text{s}$  et  $\alpha=43,5 \text{ GPa}^{-1}$ . Les résultats sont présentés dans le Tableau 1. Un unique point de convergence,  $x^*$ , est rapporté car aucun minimum local n'a été détecté pour les 3 modèles. L'adéquation entre la courbe cible et les courbes identifiées sont visuellement toujours excellentes (résidus faibles). Seul le conditionnement de WLF est mauvais. L'étude de sensibilité révèle que le modèle WLF n'est pas identifiable avec les expériences considérées, où la pression varie mais la température reste constante. En effet, la matrice de Gauss-Newton possède une valeur propre quasi-nulle avec un vecteur propre normé associé<sup>1</sup>  $= \bar{v}_1 [ 7,97e-03; -1,01e-02; -5,34e-03; 2,04e-02; -1,58e-09; -1,82e-13; -2,65e-19; -2,23e-15]^T$ . Les 4 premières composantes du vecteur sont nettement supérieures aux autres, ce qui montre que l'infinité de solutions est obtenue en variant les 4 premiers paramètres,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ , et  $B_2$ , les autres paramètres étant fixés.

modèle	Barus	Roelands	WLF
$x^*$	$\eta_0=204 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ $\alpha=43,5 \text{ GPa}^{-1}$	$\eta_0=214 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ $z=1,036 \text{ GPa}^{-1}$	$A_1 = 1,25 \cdot 10^2$ ; $A_2 = 1,45 \cdot 10^{-9}$ ; $B_1 = 2,98 \cdot 10^{-1}$ ; $B_2 = 1,39 \cdot 10^{-9}$ ; $C_1 = 2,60 \cdot 10^1$ ; $C_2 = 1,30 \cdot 10^2$ ; $\eta_g = 5,93 \cdot 10^7$ ; $T_{g0} = -1,27 \cdot 10^1$ ;
$J(x^*)$	$1, 10^{-19}$	$1,92 \cdot 10^{-4}$	$5,30 \cdot 10^{-9}$
Conditionnement en $x^*$	$2,41 \cdot 10^2$	$8,80 \cdot 10^1$	$1,01 \cdot 10^{17}$

Tableau 1 : Identifications à partir de données viscosité-pression, comparaison des modèles

#### 3.2 - Identification à partir de mesures de champ

Pour simuler un contact lubrifié, nous avons utilisé la solution analytique unidirectionnelle au problème du blochet, traité dans le cas d'un fluide incompressible piézovisqueux selon la loi de Barus. La viscosité  $\eta_0$  et le coefficient de piézoviscosité  $\alpha$  sont respectivement de  $204 \text{ mPa}\cdot\text{s}$  et de  $43,5 \text{ GPa}^{-1}$ . Les profils de hauteur et de pression sont représentés dans la Figure 1. La pression maximale est de 70,4 MPa dans ce cas, ce qui correspond à une valeur faible mais réaliste pour un contact EHD.

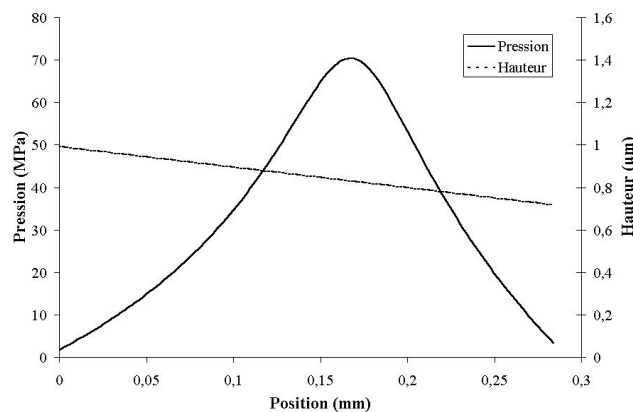


Figure 1 : champ de hauteur et de pression dans un blochet

<sup>1</sup> Le vecteur propre normé est un vecteur propre où chacune des composantes est divisée par son ordre de grandeur. L'ordre des coordonnées est  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\eta_g$ ,  $T_{g0}$

L'utilisation des mesures de champ impose l'utilisation d'un résidu correspondant à l'équation de Reynolds (membre de gauche de l'équation 4). Du fait de la présence dans le résidu de dérivées premières et secondes des données expérimentales  $P$  et  $h$ , il est nécessaire que cette dérivation soit effectuée avec le plus grand soin. Pour cela, les champs au voisinage d'un point sont approximés par des fonctions polynomiales d'ordre 3 par minimisation d'un écart quadratique. Ensuite, ces fonctions sont dérivées analytiquement, la dérivée seconde étant par construction continue.

Dans un premier temps, pour contrôler la validité de la fonction de minimisation choisie, nous avons traité le cas idéal d'un blochet non bruité. Les résultats trouvés avec les modèles de Barus et de Roelands sont en très bon accord avec les identifications sur les courbes viscosité/pression, comme le montre le Tableau 2.

	Valeurs identifiées	Valeurs cibles (Tableau 1)	Écarts
Modèle de Barus	$\eta_0 = 205 \text{ mPa.s}$	$\eta_0 = 204 \text{ mPa.s}$	0,50 %
	$\alpha = 43,5 \text{ GPa}^{-1}$	$\alpha = 43,5 \text{ GPa}^{-1}$	0,70 %
Modèle de Roelands	$\eta_0 = 207 \text{ mPa.s}$	$\eta_0 = 214 \text{ mPa.s}$	3,40 %
	$z = 1,0465$	$z = 1,036$	1,00%

Tableau 2 : Identification à partir du blochet sans bruit expérimental

Dans un second temps, nous avons étudié l'influence du bruit expérimental sur les grandeurs identifiées. Nous avons considéré un bruit uniforme de  $\pm 3 \text{ nm}$  sur la hauteur de film et de  $\pm 10 \%$  sur la pression. Il a été introduit dans les champs de hauteur et de pression théoriques. Comme la taille du voisinage choisie joue le rôle d'un filtre haute fréquence vis-à-vis du bruit, une étude a été conduite par rapport à ce paramètre. A partir d'un voisinage de 23 points de coté, l'incertitude sur les paramètres liée au bruit se stabilise à un niveau minimal inférieur à 15 %.

A l'avenir, ce travail devra être complété par une étude de sensibilité au bruit plus complète. Ensuite, les premiers tests sur des mesures expérimentales seront réalisés. Enfin, une implémentation ultérieure des phénomènes thermiques pourrait permettre l'utilisation du modèle rhéologique WLF.

## Références

- [1] Le Riche, R. et Guyon, F., Least Squares Parameter Estimation and the Levenberg-Marquardt Algorithm: Deterministic Analysis, Sensitivities and Numerical Experiments , *rapport technique no. 041/99*, Laboratoire de Mécanique de Rouen, INSA de Rouen, 1999
- [2] Molimard J., Querry M., Vergne P., Krupka I., Hartl M., Inverse evaluation of pressure distribution in an elastohydrodynamic point contact, SEM Annual Meeting, Milwaukee, Juin 2002.
- [3] Molimard J., Etude expérimentale du régime de lubrification en film mince- Application au laminage, *thèse de doctorat*, INSA de Lyon 1999.
- [4] Moré, J., The Levenberg-Marquardt algorithm : implementation and theory, *Numerical Analysis Proceedings, Lecture Notes in Mathematics, 630*, Watson, G.A., éd., Springer-Verlag, Dundee, pp. 105-116, 1997
- [5] Ostensen J.O., Larsson R., Venner C.H., Determination of viscosity and pressure in an elastohydrodynamic rolling contact by using optical interferometry: a theoretical study, *Proc Instn Mech Engrs* Vol 210, p259-267, 1996