Annexe A

Rappels de numération

A.1 Numération positionnelle

Un nombre positif se représente dans un système de numération positionnelle en base b de la façon suivante :

$$a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0.a_{-1}a_{-2}\ldots{}_b$$

où :

- un **point** sépare la partie entière de la partie fractionnaire ;
- les a_i sont des chiffres qui ont des notations différentes pour les valeurs de 0 jusqu'à $b-1$ inclus ;
- les index représentent la position dans l'écriture du nombre.

Un nombre négatif se représente par le symbole $-$ suivi de la représentation de sa valeur absolue.

La valeur numérique de la représentation ci-dessus est obtenue en utilisant la formule polynomiale suivante :

$$N = a_{n-1}b^{n-1} + a_{n-2}b^{n-2} + \ldots + a_0b^0 + a_{-1}b^{-1} + a_{-2}b^{-2} + \ldots$$

A.1.1 Base 10

En base 10, on utilise les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, et 9, et on a par exemple :

$$\begin{aligned} 3.1415_{10} &= 3.1415 \\ &= 3\times10^0 + 1\times10^{-1} + 4\times10^{-2} + 1\times10^{-3} + 5\times10^{-4} \end{aligned}$$

A.1.2 Base 2

En base 2, on n'utilise que les chiffres 0 et 1. Les poids attribués aux positions successives sont les puissances de deux :

$$\begin{array}{lcl} 2^4 & = & 16 \\ 2^3 & = & 8 \\ 2^2 & = & 4 \\ 2^1 & = & 2 \\ 2^0 & = & 1 \\ 2^{-1} & = & 0.5 \\ 2^{-2} & = & 0.25 \\ 2^{-3} & = & 0.125 \end{array}$$

et la valeur de la chaîne :

$$a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0.a_{-1}a_{-2}\ldots{}_2$$

est :

$$N = a_{n-1}2^{n-1} + a_{n-2}2^{n-2} + \ldots + a_02^0 + a_{-1}2^{-1} + a_{-2}2^{-2} + \ldots$$

On a par exemple :

$$\begin{aligned} 1011.011_2 &= 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} \\ &= 8 + 2 + 1 + 0.25 + 0.125 \\ &= 11.375 \end{aligned}$$

et aussi :

$$-1011.011_2 = -11.375$$

A.1.3 Base 16

En base 16, il nous faut 16 chiffres : on utilise les chiffres décimaux habituels puis les six premières lettres de l'alphabet. Ainsi, en base 16, les 16 premiers nombres entiers s'écrivent : 0_{16}, 1_{16}, 2_{16}, 3_{16}, 4_{16}, 5_{16}, 6_{16}, 7_{16}, 8_{16}, 9_{16}, A_{16}, B_{16}, C_{16}, D_{16}, E_{16}, F_{16}.

On a par exemple :

$$\begin{aligned} -AD0.8_{16} &= -(A_{16} \times 16^2 + D_{16} \times 16^1 + 0_{16} \times 16^0 + 8_{16} \times 16^{-1}) \\ &= -(10 \times 256 + 13 \times 16 + 8 \times \tfrac{1}{16}) \\ &= -2768.5 \end{aligned}$$

A.2 Conversion entre une base b et la base 10

Convertir la représentation d'un nombre en base b en base 10 consiste à trouver sa valeur et à l'écrire "normalement", ce qui se fait en utilisant la formule polynomiale évoquée précédemment.

Réciproquement, pour convertir de la base 10 vers la base b, on pourrait utiliser la même formule à condition d'effectuer tous les calculs en base b, ce qui ne nous est vraiment pas familier. On utilise donc la méthode des divisions et multiplications successives.

La partie entière du nombre puis les quotients obtenus sont divisés par b, et les restes successifs donnent les chiffres de droite à gauche dans la base b. On poursuit ces divisions jusqu'à obtenir un quotient nul.

Une fois obtenue la partie entière écrite en base b, on s'occupe de la partie fractionnaire. On multiplie la partie fractionnaire du nombre puis chaque partie fractionnaire des produits obtenus par b, chaque partie entière des résultats obtenus donne un chiffre de la partie fractionnaire en base b de la gauche vers la droite.

Par exemple, pour convertir 11.33 en base 2, on divise 11 par 2, puis on recommence sur les quotients :

$$\begin{array}{rcl} 11 & = & 2 \times 5 + 1 \\ 5 & = & 2 \times 2 + 1 \\ 2 & = & 2 \times 1 + 0 \\ 1 & = & 2 \times 0 + 1 \end{array}$$

On recopie les restes en mettant le dernier le plus à gauche :

$$11 = 1011_2$$

Puis on s'occupe de la partie fractionnaire :

$$\begin{array}{rcl} 0.33 \times 2 & = & 0.66 \\ 0.66 \times 2 & = & 1.32 \\ 0.32 \times 2 & = & 0.64 \\ 0.64 \times 2 & = & 1.28 \\ 0.28 \times 2 & = & 0.56 \\ 0.56 \times 2 & = & 1.12 \\ 0.12 \times 2 & = & 0.24 \\ 0.24 \times 2 & = & 0.48 \\ 0.48 \times 2 & = & 0.96 \\ 0.96 \times 2 & = & 1.92 \\ 0.92 \times 2 & = & 1.84 \\ 0.84 \times 2 & = & 1.68 \\ 0.68 \times 2 & = & 1.36 \\ 0.36 \times 2 & = & 0.72 \\ & \ldots & \end{array}$$

On recopie les parties entières en mettant la première le plus à gauche :

$$0.33 = 0.01010100011110\ldots_2$$

On réunit le tout :

$$11.33 = 1011.01010100011110\ldots_2$$

Un autre exemple de conversion, cette fois de la base 10 vers la base 16 : convertissons 3141.59 :

$$\begin{array}{rcl} 3141 & = & 16 \times 196 + 5 \\ 196 & = & 16 \times 12 + 4 \\ 12 & = & 16 \times 0 + 12 \end{array}$$

d'où :

$$3141 = C45_{16}$$

puis :

$$\begin{array}{rcl} 0.59 \times 16 & = & 9.44 \\ 0.44 \times 16 & = & 7.04 \\ 0.04 \times 16 & = & 0.64 \\ 0.64 \times 16 & = & 10.24 \\ 0.24 \times 16 & = & 3.84 \\ 0.84 \times 16 & = & 13.44 \\ & \ldots & \end{array}$$

d'où :

$$3141.59 = C45.970A3D\ldots_{16}$$

A.3 Conversion entre deux bases dont l'une est une puissance de l'autre

Si b' est une puissance de b, il existe n tel que $b' = b^n$. Prenons par exemple $b' = 16$ et $b = 2$, dans ce cas n vaut 4.

Ainsi le nombre N qui s'écrit :

$$N = \ldots a_{11}a_{10}a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}a_{-4}\ldots_2$$

a la valeur :

$$\begin{array}{rllllllll} N = & \ldots & & & & & & & \\ & + & a_{11}2^{11} & + & a_{10}2^{10} & + & a_9 2^9 & + & a_8 2^8 \\ & + & a_7 2^7 & + & a_6 2^6 & + & a_5 2^5 & + & a_4 2^4 \\ & + & a_3 2^3 & + & a_2 2^2 & + & a_1 2^1 & + & a_0 2^0 \\ & + & a_{-1}2^{-1} & + & a_{-2}2^{-2} & + & a_{-3}2^{-3} & + & a_{-4}2^{-4} \\ & + & \ldots & & & & & & \end{array}$$

ce que l'on peut regrouper sous la forme :

$$\begin{array}{rll} N = & \ldots & \\ & + & (a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0) \times 2^8 \\ & + & (a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0) \times 2^4 \\ & + & (a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0) \times 2^0 \\ & + & (a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0) \times 2^{-4} \\ & + & \ldots \end{array}$$

ou encore :

$$\begin{array}{rll} N = & \ldots & \\ & + & (a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0) \times 16^2 \\ & + & (a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0) \times 16^1 \\ & + & (a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0) \times 16^0 \\ & + & (a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0) \times 16^{-1} \\ & + & \ldots \end{array}$$

On en déduit donc immédiatement l'écriture en base 16. Il suffit de regrouper quatre par quatre les chiffres de l'écriture en base 2 pour obtenir un chiffre de l'écriture en base 16.

Dans le cas général où b' vaut b^n, on regroupe n par n les chiffres de l'écriture en base b pour obtenir ceux de l'écriture en base b', et on remplace chaque groupe par sa valeur.

Pour les conversions entre la base 2 et la base 16, le tableau suivant peut aider :

0_{16}	0000_2	8_{16}	1000_2
1_{16}	0001_2	9_{16}	1001_2
2_{16}	0010_2	A_{16}	1010_2
3_{16}	0011_2	B_{16}	1011_2
4_{16}	0100_2	C_{16}	1100_2
5_{16}	0101_2	D_{16}	1101_2
6_{16}	0110_2	E_{16}	1110_2
7_{16}	0111_2	F_{16}	1111_2

Par exemple, du résultat trouvé précédemment :

$$3141.59 = C45.970A3D\ldots_{16}$$

on peut déduire :

$$3141.59 = 110001000101.100101110000101000111101\ldots_2$$