

DECIMAXSUM : Décimer pour résoudre des DCOP cycliques plus efficacement

J. Cerquides* R. Emonet[†] **G. Picard**[‡] J.A. Rodriguez-Aguilar*

* IIIA-CSIC, Campus UAB, 08193 Cerdanyola, Catalonia, Spain
{cerquide, jar}@iia.csic.es

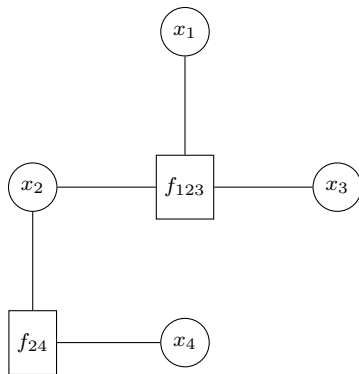
[†] Univ Lyon, UJM-Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School, Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France
remi.emonet@univ-st-etienne.fr

[‡] Mines Saint-Etienne, Univ Lyon, Univ Jean Monnet, IOGS, CNRS, UMR 5516 LHC, Institut Henri Fayol, Departement ISI, F - 42023 Saint-Etienne France
picard@emse.fr



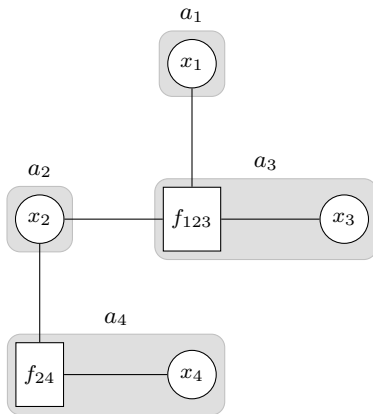
De quels problèmes parle-t-on ?

Des problèmes représentables sous forme de graphes de facteurs (ou *factor graphs*, FGs)



De quels problèmes parle-t-on ?

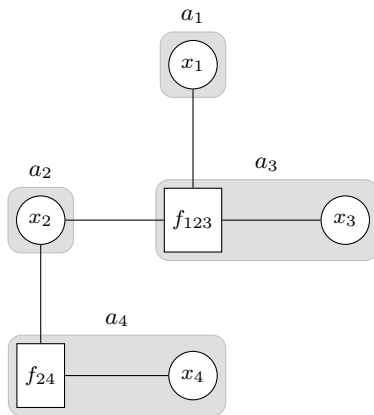
Des problèmes représentables sous forme de graphes de facteurs (ou *factor graphs*, FGs)



Problèmes d'optimisation sous contraintes distribués (DCOPs)

De quels problèmes parle-t-on ?

Des problèmes représentables sous forme de graphes de facteurs (ou *factor graphs*, FGs)

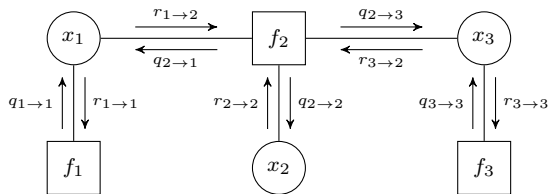


Problèmes d'optimisation sous contraintes distribués (DCOPs)

Une méthode souvent efficace pour trouver $\max_{\mathcal{X}} \sum_{m=1}^M f_m(\mathcal{X}_m)$ est **Max-Sum** [FARINELLI et al., 2008]

Qu'est-ce que Max-Sum (MS)?

Un algorithme de propagation de croyances par envois de messages (*Belief propagation, BP*)



Chaque variable/facteur envoie des messages :

$$q_{n \rightarrow m}(x_n) = \alpha_{nm} + \sum_{m' \in \mathcal{V}(n) \setminus m} r_{m' \rightarrow n}(x_n) \quad (1)$$

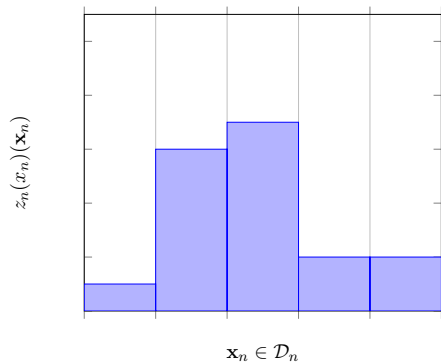
$$r_{m \rightarrow n}(x_n) = \max_{\mathcal{X}_m \setminus n} \left(f_m(\mathcal{X}_m) \sum_{n' \in \mathcal{F}(m) \setminus n} q_{n' \rightarrow m}(x_{n'}) \right) \quad (2)$$

et calcule une fonction marginale :

$$z_n(x_n) = \max_{\mathcal{X}_m \setminus n} \sum_{m=1}^M f_m(\mathcal{X}_m) \quad (3)$$

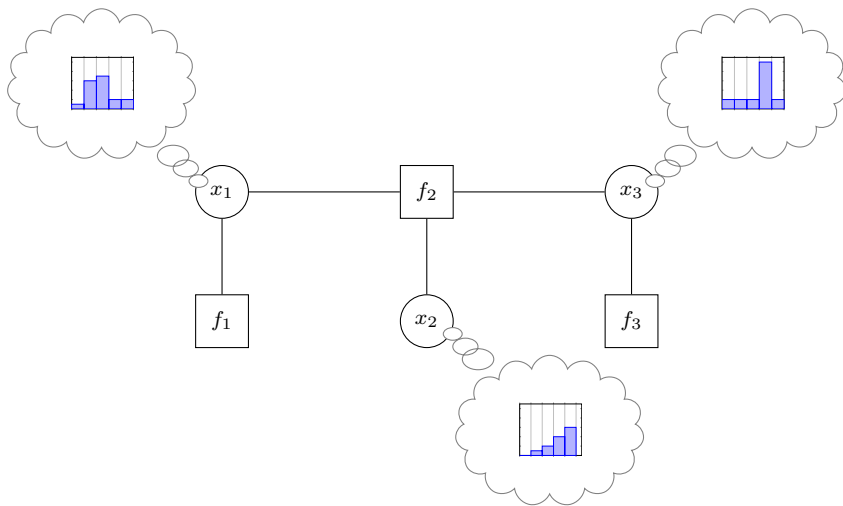
Qu'est-ce que Max-Sum? (cont.)

Au final, chaque variable construit une croyance sur son influence sur la fonction objectif globale \rightarrow à décoder pour obtenir la solution ($\operatorname{argmax} z_n(x_n)$)



Qu'est-ce que Max-Sum? (cont.)

Au final, chaque variable construit une croyance sur son influence sur la fonction objectif globale \rightarrow à décoder pour obtenir la solution ($\operatorname{argmax} z_n(x_n)$)



Quel est le problème avec MS ?

- Sur des FG en forme d'arbre, MS converge vers des solutions optimales (\approx programmation dynamique)
- Dans le cas **cyclique** plus général :
 - ▶ peut converger vers des solutions sous-optimales
 - ▶ peut ne pas converger

Ici, la convergence signifie que les fonctions marginales de changent plus

Quel est le problème avec MS ?

- Sur des FG en forme d'arbre, MS converge vers des solutions optimales (\approx programmation dynamique)
- Dans le cas **cyclique** plus général :
 - ▶ peut converger vers des solutions sous-optimales
 - ▶ peut ne pas converger

Ici, la convergence signifie que les fonctions marginales de changent plus

Plusieurs approches pour gérer les boucles dans MS

- Bounded MS [ROGERS et al., 2011]
- Max-Sum_AD_VP [ZIVAN et al., 2017]

Quel est le problème avec MS ?

- Sur des FG en forme d'arbre, MS converge vers des solutions optimales (\approx programmation dynamique)
- Dans le cas **cyclique** plus général :
 - ▶ peut converger vers des solutions sous-optimales
 - ▶ peut ne pas converger

Ici, la convergence signifie que les fonctions marginales de changent plus

Plusieurs approches pour gérer les boucles dans MS

- Bounded MS [ROGERS et al., 2011]
- Max-Sum_AD_VP [ZIVAN et al., 2017]

Mais allons voir ailleurs...

- **Decimation** [MONTANARI et al., 2007], issue de la physique statistique pour résoudre des problèmes cycliques de k -satisfiabilité

Qu'est-ce que la décimation ?

Principe simple = alterner propagation de croyances (BP) et affecter définitivement des valeurs à des variables en fonction de leur valeur marginale, jusqu'à ce que toutes les variables aient été affectée

Qu'est-ce que la décimation ?

Principe simple = alterner propagation de croyances (BP) et affecter définitivement des valeurs à des variables en fonction de leur valeur marginale, jusqu'à ce que toutes les variables aient été affectées

Exemple (Mettre en œuvre [MONTANARI et al., 2007])

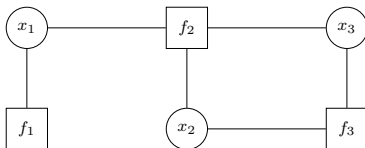
BP → choisir une variable aléatoirement → échantillonner une valeur en fonction des valeurs marginales → BP → ...

Qu'est-ce que la décimation ?

Principe simple = alterner propagation de croyances (BP) et affecter définitivement des valeurs à des variables en fonction de leur valeur marginale, jusqu'à ce que toutes les variables aient été affectées

Exemple (Mettre en œuvre [MONTANARI et al., 2007])

BP → choisir une variable aléatoirement → échantillonner une valeur en fonction des valeurs marginales → BP → ...

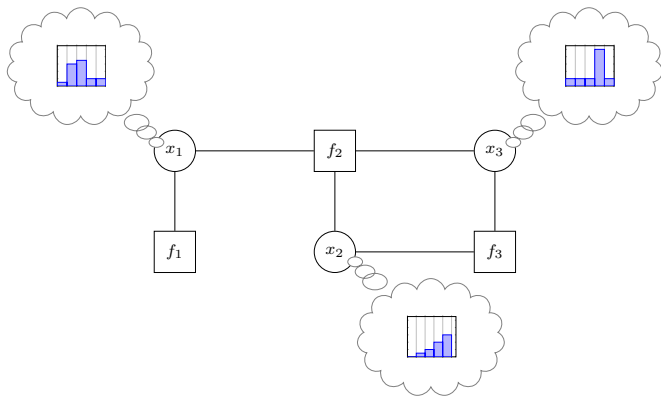


Qu'est-ce que la décimation ?

Principe simple = alterner propagation de croyances (BP) et affecter définitivement des valeurs à des variables en fonction de leur valeur marginale, jusqu'à ce que toutes les variables aient été affectées

Exemple (Mettre en œuvre [MONTANARI et al., 2007])

BP → choisir une variable aléatoirement → échantillonner une valeur en fonction des valeurs marginales → BP → ...

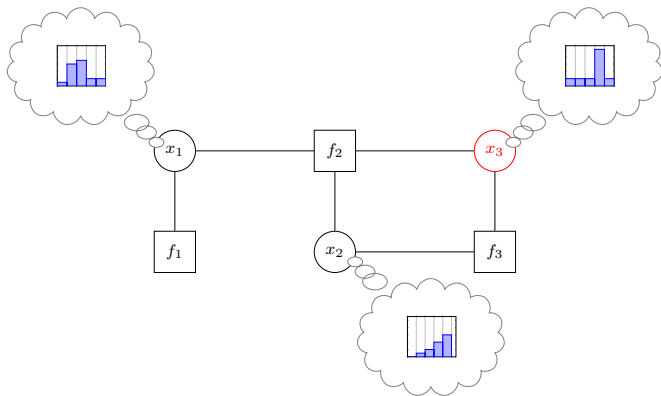


Qu'est-ce que la décimation ?

Principe simple = alterner propagation de croyances (BP) et affecter définitivement des valeurs à des variables en fonction de leur valeur marginale, jusqu'à ce que toutes les variables aient été affectées

Exemple (Mettre en œuvre [MONTANARI et al., 2007])

BP → choisir une variable aléatoirement → échantillonner une valeur en fonction des valeurs marginales → BP → ...

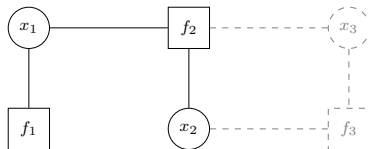


Qu'est-ce que la décimation ?

Principe simple = alterner propagation de croyances (BP) et affecter définitivement des valeurs à des variables en fonction de leur valeur marginale, jusqu'à ce que toutes les variables aient été affectées

Exemple (Mettre en œuvre [MONTANARI et al., 2007])

BP → choisir une variable aléatoirement → échantillonner une valeur en fonction des valeurs marginales → BP → ...

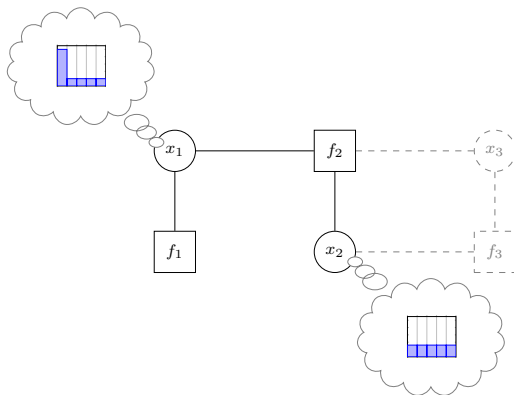


Qu'est-ce que la décimation ?

Principe simple = alterner propagation de croyances (BP) et affecter définitivement des valeurs à des variables en fonction de leur valeur marginale, jusqu'à ce que toutes les variables aient été affectées

Exemple (Mettre en œuvre [MONTANARI et al., 2007])

BP → choisir une variable aléatoirement → échantillonner une valeur en fonction des valeurs marginales → BP → ...

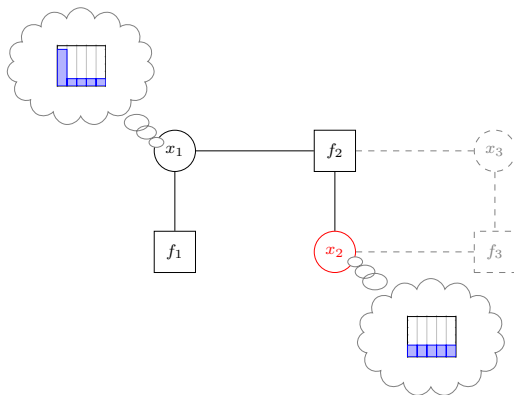


Qu'est-ce que la décimation ?

Principe simple = alterner propagation de croyances (BP) et affecter définitivement des valeurs à des variables en fonction de leur valeur marginale, jusqu'à ce que toutes les variables aient été affectées

Exemple (Mettre en œuvre [MONTANARI et al., 2007])

BP → choisir une variable aléatoirement → échantillonner une valeur en fonction des valeurs marginales → BP → ...

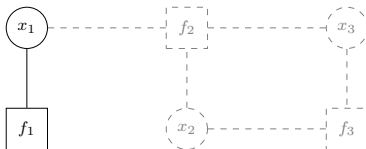


Qu'est-ce que la décimation ?

Principe simple = alterner propagation de croyances (BP) et affecter définitivement des valeurs à des variables en fonction de leur valeur marginale, jusqu'à ce que toutes les variables aient été affectées

Exemple (Mettre en œuvre [MONTANARI et al., 2007])

BP → choisir une variable aléatoirement → échantillonner une valeur en fonction des valeurs marginales → BP → ...

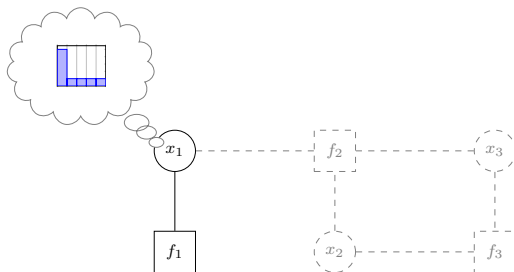


Qu'est-ce que la décimation ?

Principe simple = alterner propagation de croyances (BP) et affecter définitivement des valeurs à des variables en fonction de leur valeur marginale, jusqu'à ce que toutes les variables aient été affectées

Exemple (Mettre en œuvre [MONTANARI et al., 2007])

BP → choisir une variable aléatoirement → échantillonner une valeur en fonction des valeurs marginales → BP → ...

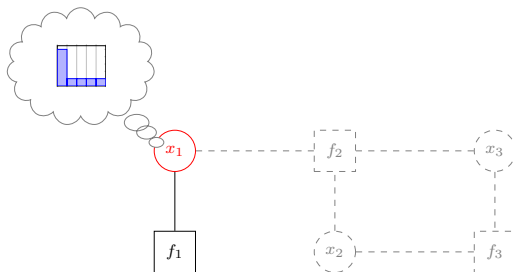


Qu'est-ce que la décimation ?

Principe simple = alterner propagation de croyances (BP) et affecter définitivement des valeurs à des variables en fonction de leur valeur marginale, jusqu'à ce que toutes les variables aient été affectées

Exemple (Mettre en œuvre [MONTANARI et al., 2007])

BP → choisir une variable aléatoirement → échantillonner une valeur en fonction des valeurs marginales → BP → ...

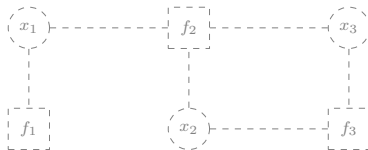


Qu'est-ce que la décimation ?

Principe simple = alterner propagation de croyances (BP) et affecter définitivement des valeurs à des variables en fonction de leur valeur marginale, jusqu'à ce que toutes les variables aient été affectées

Exemple (Mettre en œuvre [MONTANARI et al., 2007])

BP → choisir une variable aléatoirement → échantillonner une valeur en fonction des valeurs marginales → BP → ...



Généralisons et essayons d'utiliser la décimation dans Max-Sum

Pour installer la décimation dans une méthode par de BP, nous devons identifier

1. quand déclencher la décimation
 - ▶ à chaque pas de temps, tous les n pas de temps, à la détection d'une boucle, ...
2. le sous-ensemble de variables à décimer
 - ▶ une variable aléatoire, une variable ayant certaines propriétés, plusieurs variables, ...
3. les valeurs à affecter à ces variables
 - ▶ échantillonnage, valeur la plus déterminée, ...

Nous appelons une politique de décimation toute combinaison de (1), (2) et (3)

Notre idée ici est d'appliquer différentes politiques de décimation à Max-Sum

Généralisons et essayons d'utiliser la décimation dans Max-Sum

Pour installer la décimation dans une méthode par de BP, nous devons identifier

1. quand déclencher la décimation
 - ▶ à chaque pas de temps, tous les n pas de temps, à la détection d'une boucle, ...
2. le sous-ensemble de variables à décimer
 - ▶ une variable aléatoire, une variable ayant certaines propriétés, plusieurs variables, ...
3. les valeurs à affecter à ces variables
 - ▶ échantillonnage, valeur la plus déterminée, ...

Nous appelons une politique de décimation toute combinaison de (1), (2) et (3)

Notre idée ici est d'appliquer différentes politiques de décimation à Max-Sum

→ un cadre générique de décimation pour Max-Sum, a.k.a **DECIMAXSUM**

DECIMAXSUM en tant qu'algorithme

Algorithme 1 : DECIMAXSUM

Données : $FG = \langle \mathcal{X}, \mathcal{C}, E \rangle$, $\pi = \langle \Theta, \Phi, \Upsilon, \Lambda \rangle$

Résultat : \mathcal{X}^*

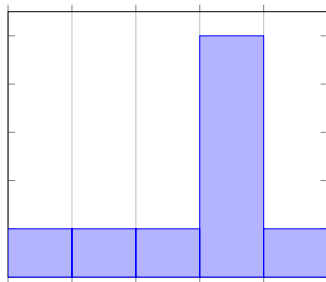
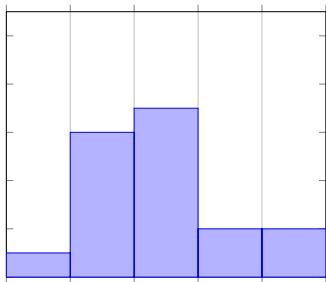
- 1 initialiser les messages BP
 - 2 $\mathcal{U} \leftarrow \emptyset$
 - 3 **tant que** $\mathcal{U} \neq \mathcal{X}$ **faire**
 - 4 exécuter BP jusqu'à déclenchement de la décimation, i.e. $\Theta(FG^t) = 1$ choisir les variables à
 décimer $\mathcal{X}' = \{x_i \in \Phi(FG^t) \mid \Upsilon(x_i, FG^t)\}$ **pour** $x_i \in \mathcal{X}'$ **faire**
 - 5 $x_i \leftarrow \Lambda(x_i, FG^t)$
 - 6 $\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{U} \cup \{x_i\}$
 - 7 simplifier FG^t *// supprimer les variables, couper les facteurs*
 - 8 retourner \mathcal{X}^* en décodant \mathcal{U}
-

Mettre en œuvre [MONTANARI et al., 2007] dans DECIMAXSUM

1. décimer jusqu'à ce que BP converge (ou s'arrête après une limite de temps)
2. choisir une variable aléatoirement parmi toutes les variables non décimées
3. échantillonner une valeur suivant la fonction marginale

Mettre en œuvre [MONTANARI et al., 2007] dans DECIMAXSUM

1. décimer jusqu'à ce que BP converge (ou s'arrête après une limite de temps)
2. choisir une variable aléatoirement parmi toutes les variables non décimées
3. échantillonner une valeur suivant la fonction marginale



Mettre en œuvre [Mooij, 2010] dans DECIMAXSUM

1. décimer jusqu'à ce que BP converge (ou s'arrête après une liite de temps)
2. choisir la variable la plus déterminée, i.e. avec l'entropie la plus faible H sur sa fonction marginale, parmi toutes les variables non décimées

$$H(z_k(x_k)) = - \sum_{d \in \mathcal{D}_k} z_k(x_k)(d) \log(z_k(x_k)(d))$$

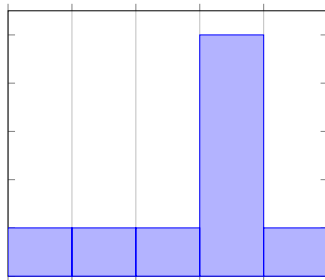
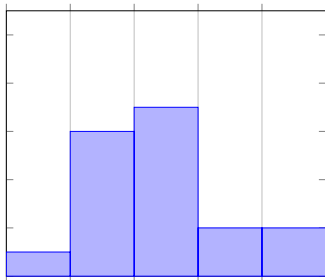
3. choisir la valeur ayant la plus haute fonction marginale ($\operatorname{argmax}_{d \in \mathcal{D}_i} z_i(x_i)(d)$)

Mettre en œuvre [Mooij, 2010] dans DECIMAXSUM

1. décimer jusqu'à ce que BP converge (ou s'arrête après une liite de temps)
2. choisir la variable la plus déterminée, i.e. avec l'entropie la plus faible H sur sa fonction marginale, parmi toutes les variables non décimées

$$H(z_k(x_k)) = - \sum_{d \in \mathcal{D}_k} z_k(x_k)(d) \log(z_k(x_k)(d))$$

3. choisir la valeur ayant la plus haute fonction marginale ($\operatorname{argmax}_{d \in \mathcal{D}_i} z_i(x_i)(d)$)



Et plein d'autres combinaisons...

- DECIMAXSUM (2-periodic, min-entropy, deterministic)
- DECIMAXSUM (3-periodic, min-entropy, deterministic)
- DECIMAXSUM (4-periodic, min-entropy, deterministic)
- DECIMAXSUM (5-periodic, min-entropy, deterministic)
- DECIMAXSUM (10-periodic, min-entropy, deterministic)
- DECIMAXSUM (20-periodic, min-entropy, deterministic)
- DECIMAXSUM (100-periodic, min-entropy, deterministic)

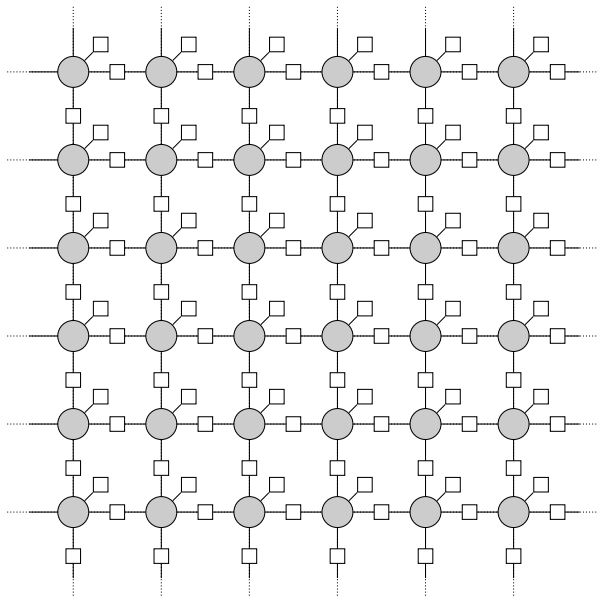
- DECIMAXSUM (10-periodic, random, sampling)
- DECIMAXSUM (100-periodic, random, sampling)

- DECIMAXSUM (periodic, min-entropy, deterministic)

- DECIMAXSUM (convergence, min-entropy, deterministic)

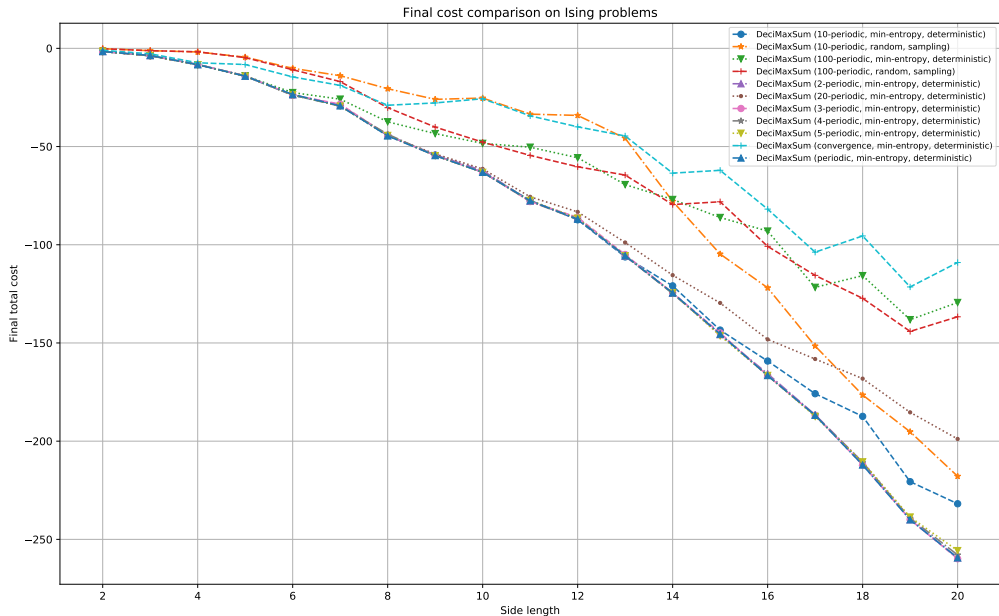
- MaxSum
- Montanari-Decimation
- Mooij-Decimation
- ...

Evaluation sur un problème très cyclique : le modèle Ising

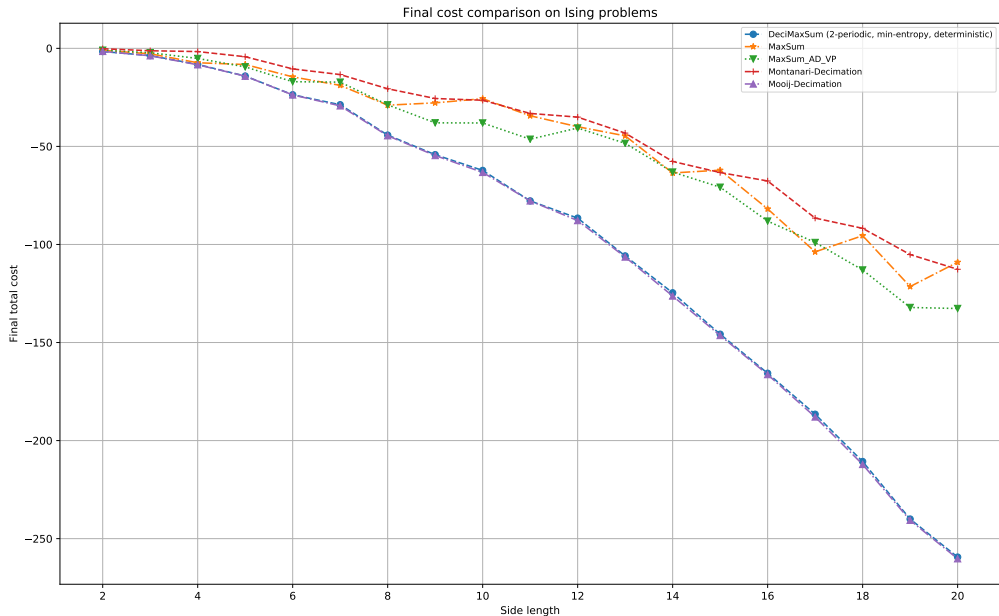


- une structure en grille torique
- des variables booléennes x_i 's
- des coûts unaires r_i 's
- des contraintes binaires r_{ij} 's

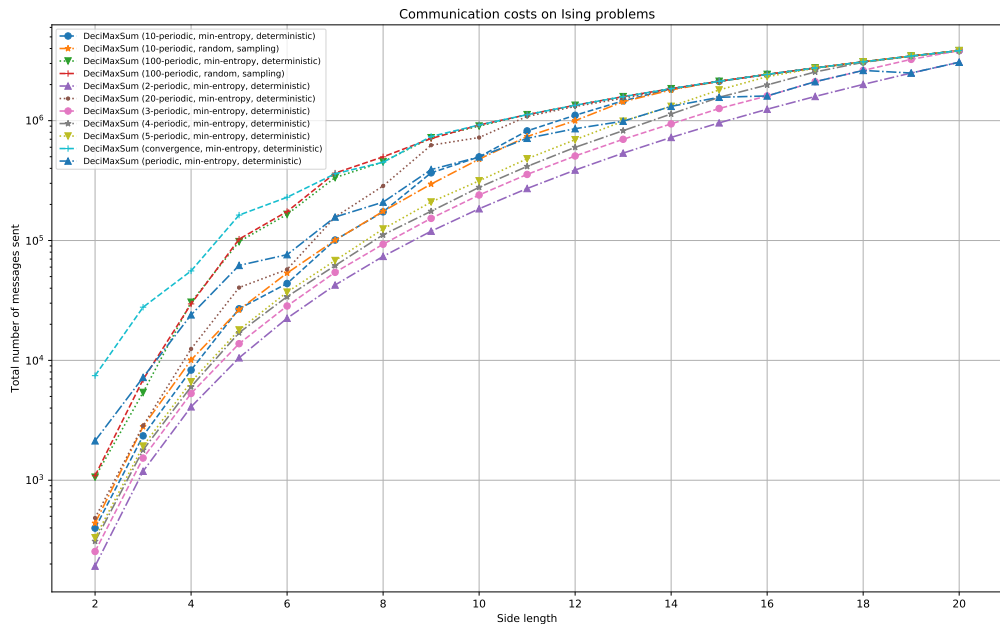
Qualité des solutions



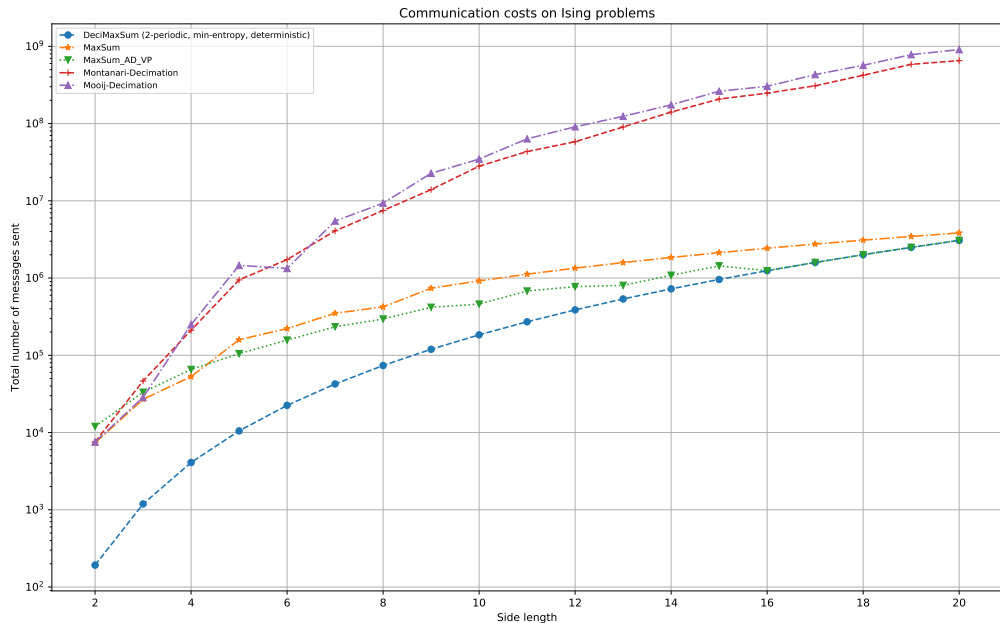
Qualité des solutions (cont.)



Charge en communication



Charge en communication (cont.)



Conclusions

Pour résumer

- Nous avons proposé un cadre générique pour intégrer le mécanisme de décimation dans Max-Sum
- Sur un problème très cyclique (Ising), une décimation très rapide basée sur l'entropie des fonctions marginales et une affectation déterministe a résulté sur de très bonnes solutions, avec très peu de messages
- Décimation \equiv décodage en cours de fonctionnement ?

Plusieurs pistes à explorer

- De très nombreuses autres politiques sont envisageables
 - ▶ ex : décimation à la détection de boucles
 - ▶ ex : alterner affectation de valeur déterministe et non-déterministe
- Comment la décimation se comporte-t-elle sur des problèmes moins cycliques et moins réguliers ?
- Comment la décimation se comporte-t-elle dans des configurations non booléennes ?

DECIMAXSUM : Décimer pour résoudre des DCOP cycliques plus efficacement

J. Cerquides* R. Emonet[†] **G. Picard**[‡] J.A. Rodriguez-Aguilar*

* IIIA-CSIC, Campus UAB, 08193 Cerdanyola, Catalonia, Spain
{cerquide, jar}@iiaa.csic.es

[†] Univ Lyon, UJM-Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School, Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France
remi.emonet@univ-st-etienne.fr

[‡] Mines Saint-Etienne, Univ Lyon, Univ Jean Monnet, IOGS, CNRS, UMR 5516 LHC, Institut Henri Fayol, Departement ISI, F - 42023 Saint-Etienne France
picard@emse.fr



Références



FARINELLI, A., A. ROGERS, A. PETCU et N. R. JENNINGS (2008). "Decentralised Coordination of Low-power Embedded Devices Using the Max-sum Algorithm". In : *International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS'08)*, p. 639-646. ISBN : 978-0-9817381-1-6. URL : <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1402298.1402313>.



MONTANARI, A., F. RICCI-TERSENGHI et G. SEMERJIAN (2007). "Solving Constraint Satisfaction Problems through Belief Propagation-guided decimation". In : *CoRR abs/0709.1667*. URL : <http://arxiv.org/abs/0709.1667>.



MOOIJ, Joris M. (août 2010). "libDAI : A Free and Open Source C++ Library for Discrete Approximate Inference in Graphical Models". In : *Journal of Machine Learning Research* 11, p. 2169-2173. URL : <http://www.jmlr.org/papers/volume11/mooij10a/mooij10a.pdf>.



ROGERS, A., A. FARINELLI, R. STRANDERS et N.R. JENNINGS (2011). "Bounded approximate decentralised coordination via the max-sum algorithm". In : *Artificial Intelligence* 175.2, p. 730 -759. ISSN : 0004-3702. DOI : <http://dx.doi.org/10.1016/j.artint.2010.11.001>. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0004370210001803>.



ZIVAN, Roie, Tomer PARASH, Liel COHEN, Hilla PELED et Steven OKAMOTO (2017). "Balancing exploration and exploitation in incomplete Min/Max-sum inference for distributed constraint optimization". In : *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems* 31.5, p. 1165-1207. ISSN : 1573-7454. DOI : [10.1007/s10458-017-9360-1](https://doi.org/10.1007/s10458-017-9360-1). URL : <https://doi.org/10.1007/s10458-017-9360-1>.