Le problème d'Apollonius dans les espaces affines euclidiens

Philippe Biscondi *

École des Mines de Saint-Étienne – Laboratoire LISSE
158 Cours Fauriel, 42023 Saint-Étienne, France
e-mail : biscondi@emse.fr

Résumé

Dans un espace affine euclidien de dimension d supérieure ou égale à deux, quelles sont les sphères tangentes à $d+1$ sphères distinctes données ? Nous nous intéressons essentiellement au rayon de ces sphères, la position de leur centre s'en déduisant en général comme solution d'un système linéaire. Une approche purement métrique permet de s'affranchir de repère cartésien.

Pour chaque configuration – décrivant si le contact est intérieur ou extérieur à chaque sphère donnée –, nous examinons les cas dégénérés et montrons que le rayon d'une sphère d'Apollonius est généralement solution d'une équation quadratique dont les coefficients s'expriment sous forme de déterminants ; ces derniers peuvent s'écrire par blocs laissant apparaître la matrice des distances entre les centres des sphères initiales, bordée de vecteurs ne dépendant que des rayons des sphères. Nous donnons également une factorisation de son discriminant.

Enfin, deux applications sont proposées : les conglomérats et les simplexes.

Introduction

Ce problème fondamental a été posé par Apollonius de Perga [1] dans le plan, et une élégante construction au compas, due à Gergonne, permet de trouver les centres des cercles solutions. L'inversion polaire, ainsi que la transformation des cercles initiaux en une triade de cercles tangents deux à deux sont des interprétations géométriques intéressantes du problème. H.S.M. Coxeter a synthétisé ces approches dans [4]. A notre connaissance, les formules pour le problème en dimension quelconque datent du siècle dernier, car le traité de E. Rouché et C. de Comberousse [6] les mentionne. Curieusement, diverses publications faites depuis ont ignoré ces anciens travaux.

Les équations quadratiques donnant les rayons d'Apollonius étaient donc déjà connues, mais notre démarche pour les obtenir est originale. L'interprétation géométrique de ses coefficients, liée à un examen des cas dégénérés, l'arrangement des déterminants qui les constituent sous une autre forme, ainsi que la factorisation de son discriminant sont les nouveautés présentées ici.

Le présent rapport est organisé comme suit : dans l'introduction, nous rappelons les principaux résultats sur le problème de la sphère circonscrite à un simplexe. La première partie traite des cas dégénérés et donne deux formules quadratiques permettant de calculer les rayons d'Apollonius. La seconde partie présente diverses propriétés générales remarquables. Enfin, la dernière partie est dédiée à l'étude des deux classes de configurations spéciales.

Notations préliminaires

$\aleph_d$ est l'ensemble des nombres naturels inférieurs ou égaux à d. $\mathcal{E}_\lceil$ est un espace affine de dimension d, muni du *carré* de la distance euclidienne.

La notation adoptée pour les vecteurs est l'écriture en ligne, et $^\top$ est l'opérateur de transposition. Dans l'espace courant, $\vec{0}$ est le vecteur nul, $\vec{1}$ celui dont tous les termes valent 1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs de $\Re^{d+1}$ et x un réel, on note $\overrightarrow{u \star v}$ le vecteur $(u_i \star v_i)_{i \in \aleph_d}$, et $x \star \vec{u}$ le vecteur $(x \star u_i)_{i \in \aleph_d}$ pour toute opération $\star$.

*Doctorant allocataire MESR par l'intermédiaire de la bourse de recherche numéro 94-4-1737.

$\mathcal{S}_\lceil$ est l'ensemble des matrices carrées symétriques positives d'ordre $d+1$ dont les termes diagonaux sont tous nuls. Sauf exception indiquée, une matrice sera désignée par une lettre majuscule, et son terme général par la lettre minuscule correspondante. A tout $X \in \mathcal{S}_\lceil$, on associe sa matrice de Cayley-Menger :

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{1} \\ \vec{1}^{\top} & \boxed{X} \end{bmatrix}$$

$X_{i,j}$ désigne la matrice mineure de X relative aux indices (i, j). On appelle matrice *extraite en croix* de X toute matrice d'ordre au moins trois obtenue en rayant dans X des lignes et colonnes de *mêmes* indices, ainsi que X elle-même. On dira qu'on développe un déterminant *par rapport au bord* si on le développe successivement par rapport à sa première colonne puis sa première ligne.

Sphère circonscrite

Nous rappelons succintement les principaux résultats liés au problème de la sphère circonscrite à un ensemble de points. On peut trouver toutes les démonstrations dans l'ouvrage de géométrie de M. Berger [2].

Une matrice $D \in \mathcal{S}_\lceil$ est dite *réalisable ssi* il existe une famille de $d+1$ points $(x_i)_{i\in\aleph_d}$ de $\mathcal{E}_\lceil$ tels que l'élément courant de D vérifie : $d_{i,j} = |\overrightarrow{x_i x_j}|^2$. Le lieu des ces points est défini à une isométrie près, et D est leur *matrice des distances.* A. Cayley [3] est à l'origine des résultats fondamentaux qui suivent.

Théorème 1
Une matrice D de $\mathcal{S}_\lceil$ est réalisable ssi *, pour toute matrice X d'ordre k extraite en croix de D, le signe du déterminant de $\widehat{X}$ n'est pas $(-1)^k$. De plus, si le déterminant de $\widehat{D}$ est non nul, il s'agit d'un simplexe – D est dite* strictement *réalisable –, et le rayon R de la sphère qui lui est circonscrite vérifie alors :*

$$R^2 = -\frac{\det D}{2 \det \widehat{D}} \tag{1}$$

Pour $d+1$ points donnés (en dimension d), le déterminant de D n'est jamais de signe $(-1)^d$. Il s'annule ssi *les points appartiennent à un plan de dimension $d-2$* ou *à une sphère de dimension d (auquel cas ils appartiennent aussi à un plan de dimension $d-1$).*

La caractérisation de la réalisabilité par le théorème est de nature récursive. En d'autres termes, on ne peut construire un polytope satisfiant les contraintes de distances exprimées dans D que si, déjà, toutes ses faces peuvent elle-mêmes être construites.

Les signes des déterminants de $\widehat{X}$ et de X, où X parcourt l'ensemble des matrices extraites en croix de D, permettent de décider de la coplanarité et de la cosphéricité des points dans un espace affine euclidien. Nous définissons deux *indicateurs* $I_P(D)$ et $I_S(D)$, respectivement associés à ces configurations dégénérées grâce au corollaire ci-dessous :

- Si D est réalisable, $I_P(D)$ est l'ordre maximal des matrices $\widehat{X}$ qui sont régulières, où X est extraite en croix de D.
- Si D est réalisable, $I_S(D)$ est l'ordre maximal des matrices régulières extraites en croix de D.
- Si D n'est pas réalisable, on convient que $I_P(D) = I_S(D) = 0$.

Corollaire
La dimension du plus petit espace affine contenant un ensemble de points de $\mathcal{E}_\lceil$ de matrice des distances D est $I_P(D)-2$. Ils admettent une sphère circonscrite de plus petite dimension $I_S(D)-1$ ssi *$I_S(D) = I_P(D)$. Pour un simplexe, $I_P(D) = d$ et $I_S(D) = d+1$.*

---

1 Sphères d'Apollonius

La donnée du *problème général* d'Apollonius en dimension d peut être représentée par un couple $(C, \overrightarrow{s}) \in \mathcal{S}_\lceil \times (\Re_+)^{\lceil+\infty}$, où la matrice C des distances entre centres doit être réalisable, et $\overrightarrow{s}$ est le vecteur des rayons (dits *absolus*) des sphères.

Posons : $\mathcal{R}(\overrightarrow{s}) = \{\overrightarrow{r} \in \Re^{\lceil+\infty} \mid \forall\rangle \in \aleph_\lceil, |\nabla_\rangle| = \int_\rangle\}$ (si z sphères sont réduites à des points, cet ensemble est de taille 2^{d-z+1}). Ainsi, les rayons des sphères deviennent *signés*, et nous verrons que cela permet d'unifier agréablement les formules algébriques.

Résoudre $(C, \overrightarrow{s})$, c'est donc résoudre chacun des *problèmes particuliers* $(C, \overrightarrow{r})$, quand $\overrightarrow{r}$ décrit $\mathcal{R}(\overrightarrow{s})$, au sens où les sphères cherchées passent par le centre des sphères de rayon nul, sont tangentes extérieurement à toutes les sphères de rayon strictement positif, intérieurement aux autres.

1.1 Déduction des centres à partir des rayons

$\mathcal{E}_\lceil$ étant muni d'un repère cartésien, $p^{(j)}$ désigne la j-ième coordonnée ($j \in \aleph_d^*$) d'un point p. La sphère de centre c et de rayon R est une solution du problème particulier $(C, \overrightarrow{r})$ *ssi* le système suivant, à $d+1$ équations et $d+1$ inconnues, est vérifié, x_i étant le centre de la i-ième sphère :

$$\forall i \in \aleph_d, \quad \sum_{j=1}^{d} \left[c^{(j)} - x_i^{(j)}\right]^2 = (R + r_i)^2$$

En soustrayant la dernière relation à toutes les autres, on en déduit un système équivalent composé d'un système linéaire ($\mathcal{L}(\overrightarrow{r})$) et d'une seule équation quadratique :

$$\forall i \in \aleph_{d-1}, \quad 2\sum_{j=1}^{d} \left[x_i^{(j)} - x_d^{(j)}\right] c^{(j)} = \left[|\overrightarrow{x_i}|^2 + 2r_i R - r_i^2\right] - \left[|\overrightarrow{x_d}|^2 + 2r_d R - r_d^2\right]$$

$$\sum_{j=1}^{d} \left[c^{(j)} - x_d^{(j)}\right]^2 = (R + r_d)^2$$

Il est naturel de se demander si, le rayon R d'une sphère solution du problème particulier $(C, \overrightarrow{r})$ ayant été déterminé, on peut en déduire le(s) centres(s) associés. L'équivalence entre les systèmes précédents prouve que le centre se déduit de R en résolvant ($\mathcal{L}(\overrightarrow{r})$) *ssi* le déterminant du système est non nul.

Or, il s'agit du déterminant de Gram des centres des sphères données. C'est la raison pour laquelle l'essentiel du reste du rapport est consacré à la détermination des rayons d'Apollonius, non sans examiner les dégénérescences possibles. Rappelons au passage un résultat classique : le carré du déterminant de Gram γ des centres est proportionnel à celui de Cayley-Menger (de plus, il égale le volume du simplexe formé si C est strictement réalisable) :

$$\gamma^2 = \frac{(-1)^{d+1}}{2^d} \det \widehat{C}$$

Propriété 1
A chaque rayon d'Apollonius du problème particulier $(C, \overrightarrow{r})$*, il existe une* unique *sphère associée, dont le centre est solution d'un système linéaire,* ssi *les centres des sphères initiales sont affinement indépendants dans* $\mathcal{E}_\lceil$.

La figure 1 illustre divers cas, rentrant ou non dans le cadre de cette propriété : sur la première ligne sont tracées tous les cercles solutions de trois problèmes plans (on pourra remarquer que la topologie influe sur le nombre de solutions). Dans les cas représentés sur la seconde ligne, les centres des sphères sont coplanaires ; le lieu des centres solutions d'un problème particulier en dimension trois peut ainsi être constitué de deux points, d'une droite, d'un cercle, ou peut-être d'autres variétés affines encore ...

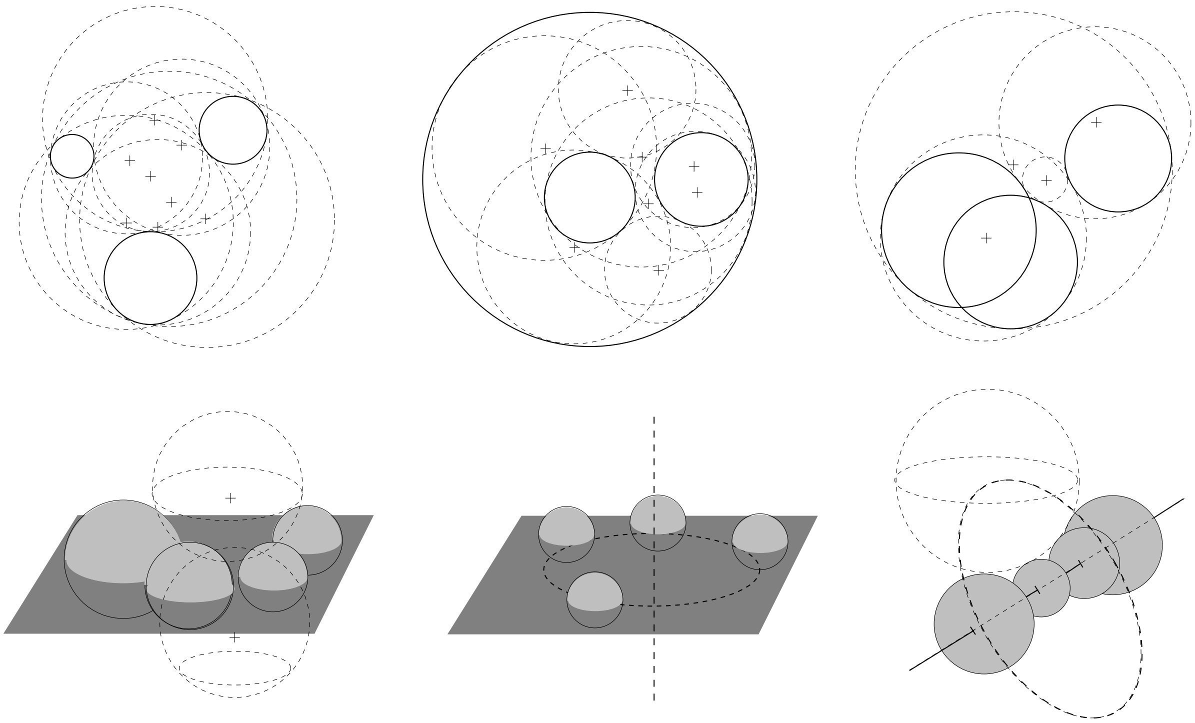

FIG. 1 – *Quelques lieux solutions.*

1.2 Relation métrique locale

Il est clair que, pour deux sphères tangentes, les trois points formés par leurs centres et le point de contact sont alignés. Le problème étant supposé résolu, mettons en jeu deux sphères initiales i et j tangentes à une même troisième (celle d'Apollonius, de rayon R). La figure 2 illustre les six cas possibles suivant les signes des rayons des deux sphères initiales – la sphère d'Apollonius est tracée en pointillés.

Les points sont supportés par deux droites qui s'intersectent au centre de la sphère d'Apollonius. Notons θ leur angle, $c_{i,j}$ la distance entre centres, et $d_{i,j}$ celle entre les points de contact. On a :

$$d_{i,j} = 2R^2(1 - \cos\theta) \qquad \text{et} \qquad c_{i,j} = (R + r_i)^2 + (R + r_j)^2 - 2(R + r_i)(R + r_j)\cos\theta$$

Il est facile de s'assurer que cette dernière relation est valable dans tous les cas, et en éliminant le terme en cosinus, il vient :

$$\forall (i,j) \in \aleph_d^2, \quad (R + r_i)(R + r_j)\ d_{i,j} = \left[c_{i,j} - (r_i - r_j)^2\right]\ R^2 \tag{2}$$

Afin de pouvoir isoler le terme $d_{i,j}$ dans (2), il faut supposer : $\forall i \in \aleph_d, R \neq -r_i$, c'est-à-dire qu'aucune des sphères initiales n'est tangente à chacune des autres. Dans le cas contraire, ce qui suit prouvera que R est solution d'une équation quadratique (5) dont les coefficients sont polynômiaux dans les rayons des sphères. Par continuité, on retrouvera alors ces rayons monentanément exclus parmi les solutions naturelles de l'équation.

1.3 Équation sous la première forme

La relation (2) établit directement un lien avec le problème de la sphère circonscrite. Nous souhaitons obtenir une équation algébrique entre R et les données $(C, \overrightarrow{r})$. Considérons alors la matrice des distances entre points de contact :

$$D = R^2 \left[\frac{\lambda_{i,j}}{(R + r_i)(R + r_j)}\right]_{(i,j)\in\aleph_d^2}$$

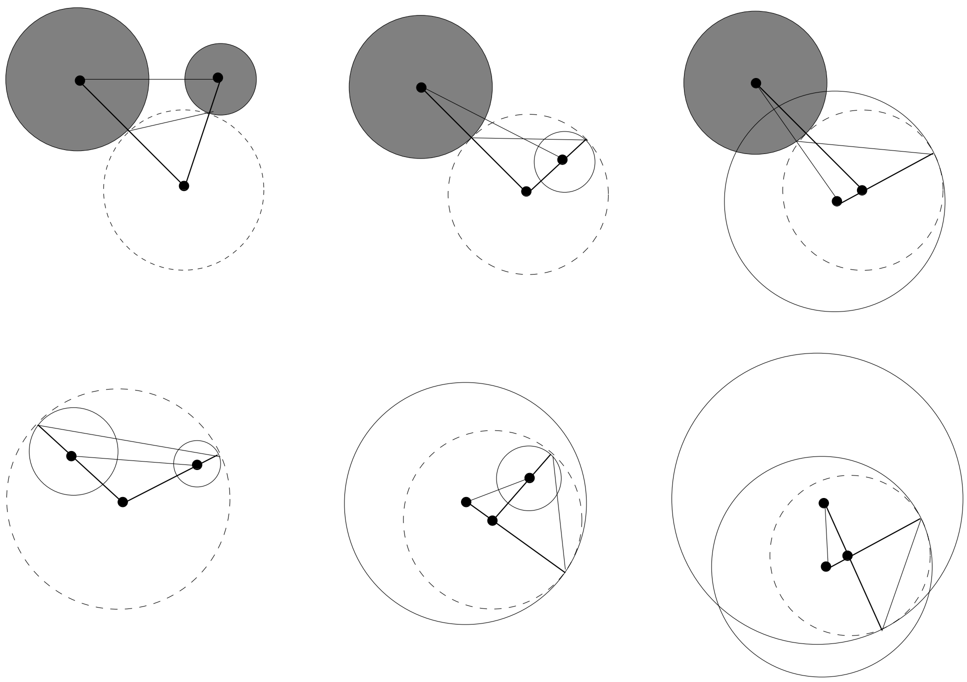

FIG. 2 – *Relation métrique locale.*

$\Lambda(\vec{r})$ désigne la matrice de $\mathcal{S}_\Gamma$ de terme général : $\lambda_{i,j} = c_{i,j} - (r_i - r_j)^2$. On peut noter que $\lambda_{i,j}$ égale, dans certains cas présentés sur la figure 2, la longueur d'un des segments bitangents aux deux sphères i et j.

A l'issue d'une factorisation croisée (suivant les lignes puis les colonnes) des déterminants de D et $\widehat{D}$, on obtient directement :

$$\prod_i (R + r_i)^2 \det D = R^2 \det \Lambda(\vec{r}) \tag{3}$$

$$\prod_i (R + r_i)^2 \det \widehat{D} = \det \begin{bmatrix} 0 & R + \vec{r} \\ R + \vec{r}^{\top} & \boxed{\Lambda(\vec{r})} \end{bmatrix} \tag{4}$$

D'après le théorème 1 et la relation (4), le déterminant de $\widehat{D}$ s'annule *ssi* les points de contact sont coplanaires, c'est-à-dire *ssi* il existe un hyperplan tangent qui *sépare les sphères suivant leurs signes* ; nous entendons par là que ce plan passe par les centres des sphères de rayon nul, est tangent à toutes, et que les centres contenus dans chacun des demi-espaces ouverts de frontière ce plan sont ceux des sphères de même signe.

Nous supposons d'abord que tel n'est pas le cas, la section 1.4 traitant cette dégénérescence. La formule (1) du théorème 1 s'applique alors : $2\ R^2 \det \widehat{D} + \det D = 0$, et en développant le déterminant de $\widehat{D}$ par rapport au bord, il vient :

$$2 \begin{vmatrix} 0 & \vec{1} \\ \vec{1}^{\top} & \boxed{\Lambda(\vec{r})} \end{vmatrix} R^2 + 4 \begin{vmatrix} 0 & \vec{r} \\ \vec{1}^{\top} & \boxed{\Lambda(\vec{r})} \end{vmatrix} R + 2 \begin{vmatrix} 0 & \vec{r} \\ \vec{r}^{\top} & \boxed{\Lambda(\vec{r})} \end{vmatrix} + \det \Lambda(\vec{r}) = 0 \tag{5}$$

On note l'équation: $2K_2\ R^2 + 4K_1\ R + K_0 = 0$

Les rayons d'Apollonius du problème particulier $(C, \vec{r})$ sont les racines R *positives* de (5).

1.4 Dégénérescences

Les coefficients de l'équation quadratique établie sont des formes continues (car polynômiales), dans les termes de C et de $\overrightarrow{r}$, ce qui permet d'analyser rigoureusement les cas dégénérés par des considérations aux limites.

On tend vers le cas critique d'un hyperplan tangent séparateur quand une des racines R tend vers $+\infty$, i.e. *ssi* le coefficient dominant K_2 s'annule. Ensuite, si K_1 est non nul, le seul rayon solution vaut : $R = -\frac{K_0}{4K_1}$. Sinon, il existe deux hyperplans tangents séparateurs ; le discriminant est alors nul, et sa factorisation ultérieure (10) impliquera que les centres des sphères sont coplanaires – c'est le cas où l'équation quadratique n'apporte rien.

Un autre cas dégénéré se produit quand R tend vers 0 : une des sphères solutions devient un simple point, ce qui correspond à $K_0 = 0$. Un sens géométrique peut donc être donné aux différents coefficients, ce qui conduit à établir le théorème suivant.

Théorème 2 *$d+1$ sphères étant données en dimension d,*

- *Les sphères admettent un hyperplan tangent qui les sépare suivant leurs signes* ssi $K_2 = 0$.
- *Les sphères admettent deux hyperplans tangents distincts qui les séparent suivant leurs signes* ssi $K_2 = K_1 = 0$. *Dans ce cas, les centres des sphères sont coplanaires.*
- *Les sphères admettent un point commun* ssi $K_0 = 0$.
- *Le déterminant de $\Lambda(\overrightarrow{r})$ s'annule* ssi *les sphères admettent un plan tangent de dimension $d-2$* ou *une hypersphère tangente qui les sépare suivant leurs signes.*

Si $K_2 \neq 0$ ou *$K_1 \neq 0$, les rayons d'Apollonius pour le problème particulier $(C, \overrightarrow{r})$ sont les racines positives de l'équation quadratique* (6).

La figure 3 illustre différents cas critiques en dimension trois : les lignes du dessin correspondent successivement aux cinq cas (quatre points) du théorème 2.

Remarque :
Tout comme dans le corollaire du théorème 1, il faut considérer les signes des déterminants extraits en croix des coefficients pour connaître les dimensions minimales des sphères et des plans séparateurs. Elles sont gouvernées par les indicateurs respectifs $I_P(\Lambda(\overrightarrow{r}))$ et $I_S(\Lambda(\overrightarrow{r}))$.

1.5 Découplage entre distances et rayons

Nous cherchons maintenant à écrire les déterminants de l'équation (5) en faisant apparaître, parmi les blocs, C et non plus $\Lambda(\overrightarrow{r})$. L'intérêt de ce découplage n'est pas seulement esthétique. Il permettra, par exemple, d'étudier plus facilement l'incidence des variations des rayons des sphères sur les solutions, pour une configuration figée des centres, ou encore de calculer des incertitudes sur les solutions, connaissant celle sur les rayons et celle sur les distances entre les centres ...

1.5.1 Transformations

La formule de transformation de base utilisée est :

$$\forall (X, \overrightarrow{u}) \in \mathcal{S}_{\lceil} \times \Re^{\lceil+\infty}, \quad \det[\S_{\rangle,|} - \sqcap_{\rangle}]_{(\rangle,|)\in\aleph_{\lceil}^{\in}} = \begin{vmatrix} 1 & \overrightarrow{1} \\ \overrightarrow{u}^{\top} & \boxed{X} \end{vmatrix}$$

Introduisons de nouvelles matrices E, F et G quelconques, pourvu que les dimensions soient compatibles (les déterminants ci-dessous sont découpés en blocs).

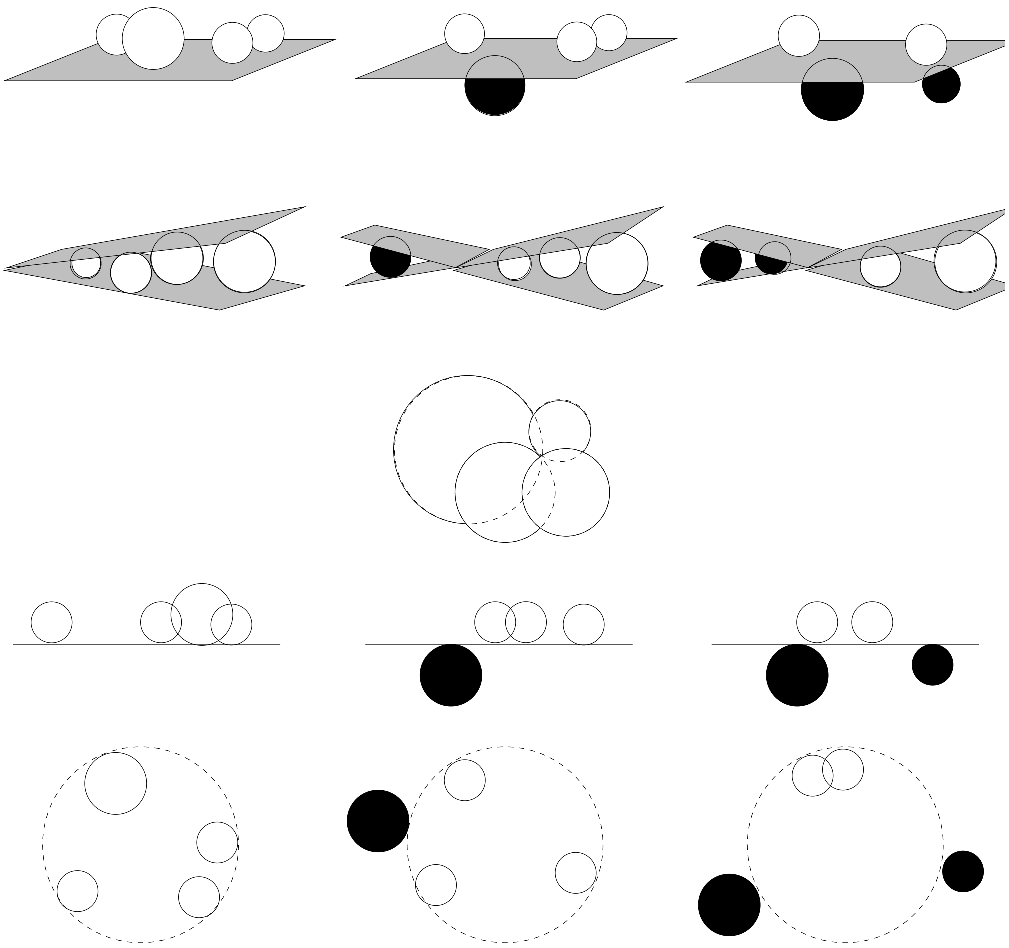

FIG. 3 – *Dégénérescences en dimension trois.*

En appliquant cette transformation, puis en soustrayant la première colonne à toutes les autres, on obtient une formule plus générale qui va s'avérer très utile :

$$\left|\begin{array}{cc} F & G \\ E & \boxed{x_{i,j} - u_i} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & \overrightarrow{0} & \overrightarrow{1} \\ \overrightarrow{0}^\top & F & G \\ \overrightarrow{u}^\top & E & \boxed{X} \end{array}\right| \tag{6}$$

On peut allier les différents coefficients intervenant dans l'équation (5) dans une écriture par blocs commune. En appliquant (6) au vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{r^2}$, transposant, puis en recommençant, on a :

$$\left|\begin{array}{cc} x & \overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{u}^\top & \boxed{\Lambda(\overrightarrow{r})} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \overrightarrow{1} \\ 0 & 1 & 0 & \overrightarrow{r^2} \\ 0 & 0 & x & \overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{r^2}^\top & \overrightarrow{1}^\top & \overrightarrow{u}^\top & \boxed{c_{i,j} + 2r_i r_j} \end{array}\right|$$

$$
= -2 \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \vec{r} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vec{1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vec{r^2} \\ 0 & 0 & 0 & x & \vec{v} \\ \vec{r}^{\top} & \vec{r^2}^{\top} & \vec{1}^{\top} & \vec{u}^{\top} & \boxed{C} \end{vmatrix} \tag{7}
$$

Dans la dernière opération ci-dessus, r_j a été mis en facteur dans les colonnes, puis la relation (6) a été appliquée au vecteur $-2\vec{r}$.

1.5.2 Équation sous la seconde forme

L'égalité (7) étant établie, il ne reste plus qu'à prendre successivement :

- $x = 0$ et $\vec{u} = \vec{v} = \vec{1}$ pour transformer K_2
- $x = 0$ et $\vec{u} = \vec{r}$, $\vec{v} = \vec{1}$ pour transformer K_1
- $x = 0$ et $\vec{u} = \vec{v} = \vec{r}$ pour le premier terme de K_0
- $x = 1$ et $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$ pour le second terme de K_0, soit $\det \Lambda(\vec{r})$

On parvient à réduire l'ordre des déterminants en soustrayant les lignes et colonnes aux vecteurs redondants, puis en développant par rapport aux lignes/colonnes où un seul élément est non nul. En particulier,

$$
\det \Lambda(\vec{r}) = 2 \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \vec{r} \\ 0 & 0 & 1 & \vec{r^2} \\ 0 & 1 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{\widehat{C}}} \\ \vec{r}^{\top} & \vec{r^2}^{\top} & & \end{vmatrix} \tag{8}
$$

Les deux déterminants consituant le terme constant se combinent aisément, et l'équation (5) se met sous une nouvelle forme :

$$
4 \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \vec{r} \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{\widehat{C}}} \\ \vec{r}^{\top} & & \end{vmatrix} R^2 + 4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & \vec{r^2} \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{\widehat{C}}} \\ \vec{r}^{\top} & & \end{vmatrix} R + \begin{vmatrix} 0 & 1 & \vec{r^2} \\ 1 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{\widehat{C}}} \\ \vec{r^2}^{\top} & & \end{vmatrix} = 0 \tag{9}
$$

2 Propriétés

2.1 Factorisation du discriminant

Un discriminant pour les équations quadratiques est : $\mu = 2K_1^2 - K_2 K_0$.

Théorème 3
On peut factoriser le discriminant sous la forme :

$$
\mu = -\det \Lambda(\vec{r}) \det \widehat{C} \tag{10}
$$

Si C est strictement réalisable, le signe de μ est donc celui de $(-1)^d \det \Lambda(\vec{r})$. Par contre, quand les centres sont coplanaires, l'équation admet une racine double.

Démonstration :
Nous choisissons la première expression de l'équation quadratique pour mener les calculs car l'ordre des déterminants y est plus petit. Pour abréger, notons : $\Lambda = \Lambda(\vec{r})$, et les quatre matrices intervenant successivement dans (5) : $M_2 = \widehat{\Lambda}$, M_1, M_0' et M_0''. On pose aussi :

$$M_0'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vec{0} \\ 0 & 1 & \vec{0} \\ \vec{0}^\top & \vec{0}^\top & \boxed{\Lambda} \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vec{r} \\ 0 & 0 & \vec{1} \\ \vec{r}^\top & \vec{1}^\top & \boxed{\Lambda} \end{bmatrix}$$

Pour commencer, effectuons quelques produits matriciels :

$$M_1^2 = \begin{bmatrix} \vec{r}\cdot\vec{1} & \vec{1}\Lambda \\ \Lambda\vec{r}^\top & \boxed{r_i + (\Lambda^2)_{i,j}} \end{bmatrix} \qquad M_2 M_0' = \begin{bmatrix} \vec{r}\cdot\vec{1} & \vec{1}\Lambda \\ \Lambda\vec{r}^\top & \boxed{r_j + (\Lambda^2)_{i,j}} \end{bmatrix}$$

$$M_0'' T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vec{r} \\ 0 & 0 & \vec{1} \\ \Lambda\vec{r}^\top & \Lambda\vec{1}^\top & \boxed{\Lambda^2} \end{bmatrix}$$

Mainenant, grâce à la transformation classique (6), on peut se ramener à des déterminants de même ordre dont un bloc est constitué par la matrice Λ^2 :

$$\det(M_1^2) = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & \vec{r} \\ 0 & \vec{r}\cdot\vec{1} & \vec{r}\Lambda \\ \vec{1}^\top & \Lambda\vec{1}^\top & \boxed{\Lambda^2} \end{vmatrix} \qquad \det(M_2 M_0') = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & \vec{1} \\ 0 & \vec{r}\cdot\vec{1} & \vec{r}\Lambda \\ \vec{r}^\top & \Lambda\vec{1}^\top & \boxed{\Lambda^2} \end{vmatrix}$$

En remarquant que les cofacteurs des éléments diagonaux -1 et $\vec{r}\cdot\vec{1}$ sont identiques pour les deux déterminants ci-dessus, on peut écrire leur différence ainsi :

$$\det(M_2 M_0') - \det(M_1^2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \vec{r} \\ 0 & 0 & \vec{r}\Lambda \\ \vec{1}^\top & \Lambda\vec{1}^\top & \boxed{\Lambda^2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & \vec{1} \\ 0 & 0 & \vec{r}\Lambda \\ \vec{r}^\top & \Lambda\vec{1}^\top & \boxed{\Lambda^2} \end{vmatrix}$$

En développant chacun des déterminants qui suivent deux fois par rapport au bord, on obtient facilement :

$$\det(M_1^2) - \det(M_0' M_2) = -\det(M_0'' T)$$

Il ne reste plus qu'à lier les déterminants de T, M_0'' et $\widehat{C}$ pour arriver au résultat. En procédant comme pour établir la relation (7), les rôles de C et de Λ étant échangés moyennant quelques changements de signes, on obtient:

$$\det\widehat{C} = 2\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \vec{r} \\ 0 & 0 & \vec{1} \\ \vec{r}^\top & \vec{1}^\top & \boxed{\Lambda} \end{vmatrix}$$

Ainsi, $2\det\widehat{C} = 2\det T + \det M_0''$, ce qui conduit à la factorisation annoncée. $\Diamond$

2.2 Symétries et invariants

Quand les coefficients de l'équation quadratique sont présentés sous leur forme dans (9), les propriétés générales de symétrie sont immédiates.

Propriété 2
Quand les problèmes particuliers changent tandis que les centres des spères sont fixes, les coefficients de l'équation quadratique vérifient :

- $K_2(-\overrightarrow{r}) = K_2(\overrightarrow{r})$
- $K_1(-\overrightarrow{r}) = -\,K_1(\overrightarrow{r})$
- K_0 *est invariant.*
- $\mu(-\overrightarrow{r}) = \mu(\overrightarrow{r})$

Une conséquence importante de cet ensemble de propriétés est que, par paires conjuguées $(\overrightarrow{r},\ -\overrightarrow{r})$, on a soit aucune, soit deux solutions admissibles (incluant la possibilité d'une racine double). Le nombre de solutions au problème général est donc pair et vaut au plus 2^{d+1}. Entre autres choses, la propriété ci-dessous prouve qu'il peut être atteint.

2.3 Loi des petites sphères

Propriété 3
Pour tout simplexe de $\mathcal{E}_\lceil$ *de matrice des distances associée* C*, il existe un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* $\vec{0}$ *dans* $\Re^{d+1}$ *sur lequel tout problème d'Apollonius particulier* $(C, \overrightarrow{r}), r \in \mathcal{V}$ *admet exactement un rayon solution non nul.*

Démonstration :
La démonstration de ce résultat est fondée sur des notions de continuité ; on peut dire en quelque sorte qu'au voisinage de $\vec{0}$, on tend vers le problème de la sphère circonscrite au simplexe formé par les centres des sphères. Les coefficients de l'équation (9) admettent les limites suivantes :

$$\lim_{|\overrightarrow{r}|\to 0} K_2 = -\det \widehat{C} \qquad \lim_{|\overrightarrow{r}|\to 0} K_1 = 0 \qquad \lim_{|\overrightarrow{r}|\to 0} K_0 = \det C$$

Ce sont en fait les signes du discriminant et du produit des racines qui nous intéressent :

$$\lim_{|\overrightarrow{r}|\to 0} K_0 K_2 = -\lim_{|\overrightarrow{r}|\to 0} \mu = \det C \det \widehat{C}$$

Or, d'après le théorème 1, les deux déterminants ci-dessus sont de signe contraire – ils ne sont pas nuls car on est en présence d'un simplexe. Comme ce sont des formes continues dans les composantes de $\overrightarrow{r}$, il existe bien un voisinage de $\vec{0}$ sur lequel leurs signes sont constants. On peut donc conclure à l'existence d'une unique racine strictement positive. $\diamondsuit$

2.4 Rayons augmentés

Une configuration particulière $(C, \overrightarrow{r})$ étant donnée, faisons croître ou décroître les sphères en ajoutant une même quantité algébrique ρ à leurs rayons signés. On a naturellement conservation de la matrice suivante : $\Lambda(\rho + \overrightarrow{r}) = \Lambda(\overrightarrow{r})$. Les relations (3) et (4) permettent alors de constater directement que les racines de la nouvelle équation quadratique sont simplement obtenues en diminuant de ρ celles de l'ancienne.

Cette propriété est en fait classique dans le cadre de la géométrie projective : considérons la bijection qui transforme une sphère de centre $p \in \mathcal{E}_\lceil$ et de rayon r en le cône isotrope de $\mathcal{E}_{\lceil+\infty}$ qui a pour sommet le point de coordonnées (p, r) et un axe de direction $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{\mathcal{E}}_d^{\perp}$.

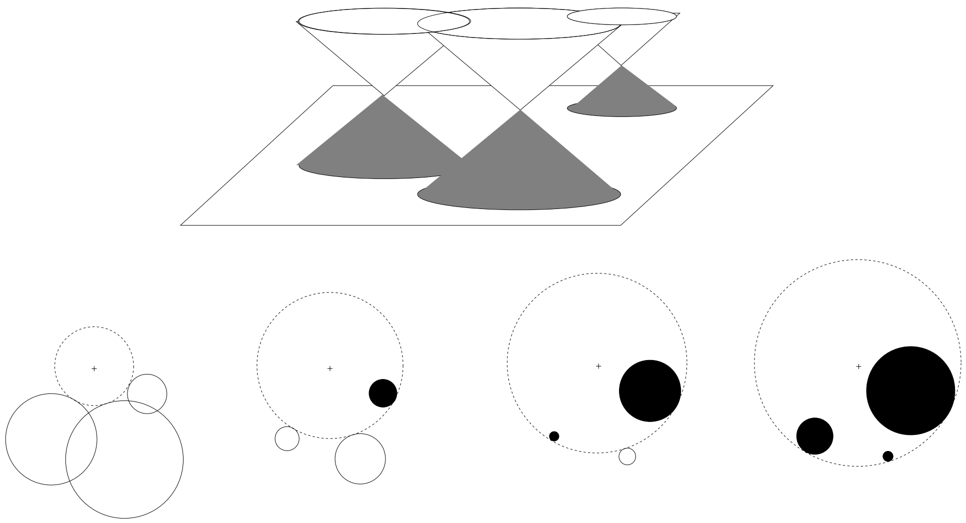

FIG. 4 – *Bijection entre cercles et cônes.*

Fixons une famille de tels cônes. Son intersection avec un hyperplan parallèle à $\overrightarrow{\mathcal{E}}_d$ engendre une famille de sphères. On attribue un signe au rayon de chacune de ces sphères suivant la nappe du cône associé qui est intersectée – disons positif s'il s'agit de la nappe infinie tournée dans le sens de $\overrightarrow{z}$. Lorsque l'hyperplan est translaté d'une distance algébrique ρ suivant $\overrightarrow{z}$, les centres des sphères sont stationnaires, tandis que leurs rayons signés diminuent de ρ (par isotropie des cônes).

La figure 4 montre quatre coupes orthogonales d'un tel arrangement de cônes – on remarquera en particulier comment les rayons des cercles changent de signe.

3 Études

Cette dernière partie est dédiée à l'étude de deux configurations particulières de sphères. Par *étude*, nous entendons discuter la réalisabilité, calculer les coefficients de l'équation quadratique à partir d'une forme ou de l'autre, ainsi que son discriminant afin d'évaluer, si possible, le nombre de solutions.

3.1 Déterminants élémentaires

Les calculs de déterminants qui suivent se révèleront utiles pour la suite, car ils reviennent dans les deux études. Les matrices carrées $\bar{I}^{(k)}$ et $J^{(k)}$ d'ordre k ont pour termes généraux respectifs : $1 - \delta_{i,j}$ et $2\delta_{i,j} - 1$, où δ est le symbole de Kronecker. Alors :

$$\forall (i,j) \in \aleph_{k-1}^2, \quad i \neq j \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} \det \bar{I}^{(k)} = (k-1)(-1)^{k-1} & \det J^{(k)} = (k-2)(-2)^{k-1} \\ \det \bar{I}_{i,i}^{(k)} = (k-2)(-1)^{k} & \det J_{i,i}^{(k)} = (k-3)(-2)^{k-2} \\ \det \bar{I}_{i,j}^{(k)} = (-1)^{i+j+k-1} & \det J_{i,j}^{(k)} = (-1)^{i+j+k}\ 2^{k-2} \end{array} \right.$$

A l'aide de ces déterminants élémentaires, on calcule aisément, en développant par rapport au bord :

$$\left| \begin{array}{ccc} x & z & \overrightarrow{v} \\ y & \multicolumn{2}{c}{\boxed{a\bar{I}^{(k+2)}}} \\ \overrightarrow{u}^\top & & \end{array} \right| = a^{k-1} \left| \begin{array}{ccc} ax & az & \overrightarrow{v} \\ ay & \multicolumn{2}{c}{\boxed{\bar{I}^{(k+2)}}} \\ \overrightarrow{u}^\top & & \end{array} \right|$$

$$= (-1)^k a^{k-1} \left[\sum_{i \neq j} u_i v_j + a \left(y \sum_i v_i + z \sum_i u_i \right) - k \sum_i u_i v_i - k a^2 y z - (k+1) a x \right] \tag{11}$$

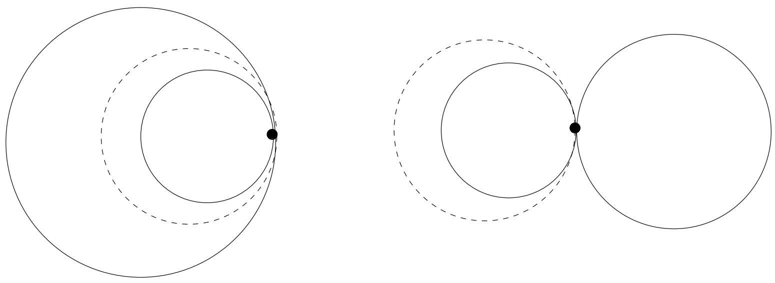

FIG. 5 – *Les deux cas de séparation topologique.*

De manière analogue, on obtient :

$$\left| \begin{array}{cc} x & \overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{u}^{\top} & \boxed{J^{(k+2)}} \end{array} \right| = (-2)^k \left[\sum_{i \neq j} u_i v_j - (k-1) \sum_i u_i v_i - 2kx \right] \qquad (12)$$

3.2 Conglomérats

On appelle *conglomérat* toute famille de sphères tangentes deux à deux dont les points de contacts sont deux à deux distincts. Historiquement, Descartes [5] a traité ce problème dans le plan. Le résultat qui suit (cf. figure 5), issu du lemme de Jordan pour le franchissement des courbes simples fermées, sera utile pour exclure des configurations :

Propriété 4
Trois sphères tangentes deux à deux, parmi lesquelles l'une sépare topologiquement les deux autres, admettent un point commun.

Soit $\overrightarrow{s} = (s_i)_{i \in \aleph_d}$ une famille donnée de réels *strictement positifs*. Dans la section 3.2.1, il est question de la *réalisabilité* de $\overrightarrow{s}$: existe-il un conglomérat dans lequel les sphères possèdent ces rayons absolus ? Une fois ce problème résolu, nous en étudierons les solutions d'Apollonius au cours de la section 3.2.2.

Pour une présentation plus compacte des formules, quelques notations peuvent être introduites (on pourra remarquer qu'elles consituent une extension de celles de H.S.M Coxeter [4] pour le problème plan). On notera que la différence entre les variables indicées par k d'une part, et celles qui ne portent pas d'indice d'autre part, est simplement que le signe de s_k se trouve inversé.

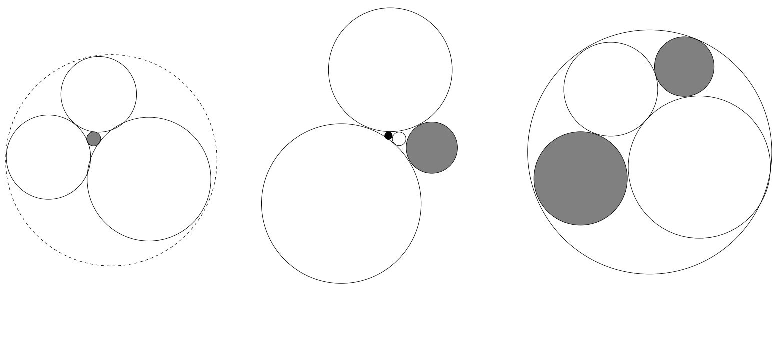

FIG. 6 – *Conglomérats limites en dimension 3.*

$$p = \prod_i s_i$$

$$\sigma = \sum_i \frac{1}{s_i} \qquad \sigma' = \sum_i \frac{1}{s_i^2} \qquad \sigma'' = \sum_{i<j} \frac{1}{s_i s_j}$$

$$\sigma_k = \sum_{i \neq k} \frac{1}{s_i} - \frac{1}{s_k} \qquad \sigma''_k = \sum_{i<j, i\neq k, j \neq k} \frac{1}{s_i s_j} - \frac{1}{s_k} \sum_{i \neq k} \frac{1}{s_i}$$

3.2.1 Réalisabilité

D'emblée, on peut affirmer, d'après la propriété 4, que deux configurations seulement sont possibles (sinon l'hypothèse des contacts distincts est violée) :

- **cas** α **-** les $d+1$ sphères sont tangentes extérieurement deux à deux.
- **cas** β **-** la sphère de plus grand rayon est tangente intérieurement aux d restantes (et les contient), ces dernières étant tangentes extérieurement deux à deux.

Suivant que la tangence entre deux sphères i et j est extérieure ou intérieure, la distance entre leurs centres vaut : $(s_i \pm s_j)^2$. En s'inspirant des transformations de la section 1.5.1 et de (12), on peut calculer le déterminant de la matrice de Cayley-Menger pour toute sous-famille de taille $k \geq 3$.
Pour la configuration α définie ci-dessus :

$$\det \widehat{C} = \begin{vmatrix} 0 & \overrightarrow{1} \\ \overrightarrow{1}^\top & \boxed{(1-\delta_{i,j})(s_i+s_j)^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \overrightarrow{1} \\ \overrightarrow{1}^\top & \boxed{2(2\delta_{i,j}-1)s_i s_j} \end{vmatrix}$$

$$= 2^{k-1}p^2 \begin{vmatrix} 0 & \overrightarrow{s^{-1}} \\ \overrightarrow{s^{-1}}^\top & \boxed{J^{(k)}} \end{vmatrix} = (-1)^k \; 2^{2k-3} \; p^2 \; [2\sigma'' - (k-3)\sigma']$$

Pour la configuration β, il suffit de changer le signe de la plus grande sphère – disons la m-ième :

$$\det \widehat{C} = (-1)^k \; 2^{2k-3} \; p^2 \; [2\sigma''_m - (k-3)\sigma']$$

Par conséquent, la famille est réalisable *ssi* , pour toute sous-famille à $k \geq 2$ éléments, une des expressions précédentes entre crochets (m étant l'indice du plus grand élément) est positive. Bien entendu, les sommes dans les expressions de σ, σ' et σ'' portent sur les indices correspondant à la sous-famille. Or, $\forall m \in \aleph_k^*$, $\sigma''_m \leq \sigma''$. Par conséquent :

Propriété 5
Si une famille est réalisable en tant que β-configuration, elle l'est aussi comme α-configuration.
$\overrightarrow{s}$ est réalisable comme conglomérat ssi *, pour toute sous-famille de taille $k \geq 3$,*

$$(k-3)\sigma' \leq 2\sigma'',$$

En particulier, dans le plan, tout triplet de réels strictements positifs est donc réalisable. Mais ce n'est plus vrai en dimension trois ; $\overrightarrow{s} = (1, 10, 10, 10)$ est un contre-exemple. En outre, comme aucun vecteur ne contenant ces éléments n'est réalisable par induction, on a des impossibilités dans toutes les dimensions supérieures.

La condition de réalisabilité a la particularité, pour les conglomérats, de pouvoir être formulée de manière *linéairement* récurrente. Toutefois, elle est donnée seulement à la fin de l'étude.

3.2.2 Résolution

On suppose le conglomérat construit. Chaque sphère étant par définition tangente à toutes les autres, elle est elle-même une solution *triviale* du problème d'Apollonius. Nous affirmons que toute sphère d'Apollonius non triviale vérifie, suivant la configuration (voir le début de la section 3.2.1) :

- **cas** α **-** elle est tangente soit extérieurement à toutes les autres, soit intérieurement à toutes les autres.
- **cas** β **-** elle est tangente intérieurement à celle qui contient les autres, extérieurement à chaque sphère contenue.

En effet, les autres possibilités sont exclues par la propriété 4 : une sphère d'Apollonius ne peut séparer deux sphères données sans contredire l'hypothèse des points de contacts deux à deux distincts. Une conséquence de l'analyse des cas possibles est que, hormis les $d+1$ solutions triviales, on a au plus deux solutions au problème général pour tout conglomérat. La suite prouvera qu'il y en a toujours exactement deux.

Nous utilisons la première forme (5) pour calculer les coefficients. Comme précédemment, nous nous plaçons d'abord dans le cas α, puis, en changeant le signe du plus grand rayon, on traitera le cas β.

Configuration α
Les tangences entre les sphères du conglomérat sont toutes extérieures, donc : $\lambda_{i,j} = 4(1-\delta_{i,j})r_i r_j$
Pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in (\Re^{d+1})^2$,

$$\begin{vmatrix} 0 & \overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{u}^\top & \boxed{\Lambda(\overrightarrow{r})} \end{vmatrix} = 4^d p^2 \begin{vmatrix} 0 & \overrightarrow{vr^{-1}} \\ \overrightarrow{ur^{-1}}^\top & \boxed{\bar{I}^{(d+1)}} \end{vmatrix}$$

En utilisant la formule (11) pour $a = 1$, les coefficients pour le problème particulier $(C, \overrightarrow{s})$ se calculent immédiatement :

$$K_2 = (-4)^d p^2 \left[(d-1)\sigma' - 2\sigma''\right] \qquad K_1 = (-1)^{d+1} 4^d p^2 \sigma \qquad K_0 = (-1)^d 2^{2d+1} p^2 (d-1)$$

Les rayons d'Apollonius pour les deux problèmes conjugués $(C, \overrightarrow{s})$ et $(C, -\overrightarrow{s})$ sont donc gouvernés par un couple d'équations de discriminant commun μ' :

$$\left[(d-1)\sigma' - 2\sigma''\right] R^2 \pm 2\sigma R + d - 1 = 0 \tag{13}$$
$$\mu' = d\ \left[2\sigma'' - (d-2)\sigma'\right] \tag{14}$$

Pour mettre μ' sous cette forme, il suffit de remarquer que : $\sigma^2 = \sigma' + 2\sigma''$

Configuration β
Nous savons déjà que, dans ce cas, les solutions non triviales sont apportées par le problème particulier $(C, (s_0, \ldots, s_{d-1}, -s_d))$ – on suppose que s_d est le plus grand élément de la famille. Du point de vue du calcul des coefficients, tout se déroule comme dans le premier cas, au changement de signe de s_d près. Une seule équation quadratique de discriminant μ'_d correspond alors à ce cas :

$$\left[(d-1)\sigma' - 2\sigma''_d\right] R^2 - 2\sigma_d R + d - 1 = 0 \tag{15}$$
$$\mu'_d = d\ \left[2\sigma''_d - (d-2)\sigma'\right] \tag{16}$$

Synthèse
On reconnaît dans le facteur entre crochets des discriminants (14,16) la condition de réalisabilité du conglomérat, dans les deux configurations. Ainsi :

Propriété 6
Tout conglomérat admet exactement deux solutions non triviales (distinctes des sphères initiales) au problème général d'Apollonius.

Nous terminons cette étude par une caractérisation récurrente *linéaire* des conglomérats :

Théorème 4
Une famille de rayons $\overrightarrow{s} \in (\Re_+^*)^{d+1}$ *de plus grand élément* s_d *est réalisable (au sens des conglomérats)* ssi *pour tout* $n \in \aleph_d \setminus \{0,1,2\}$, s_n *est supérieur ou égal à la plus petite racine positive (éventuellement, la seule) de l'équation :*

$$[(d-1)\sigma' - 2\sigma''] \, R^2 - 2\sigma R + d - 1 = 0$$

pour les rayons $\{s_i\}_{i\in\aleph_{n-1}}$

Démonstration :
Pour commencer, remarquons que, dans la configuration β, la grande sphère a pour rayon s_d ; par conséquent, seule la configuration α est viable jusqu'à l'introduction de la dernière sphère. De plus, grâce à la propriété 5, on peut même ne jamais considérer de configuration de type β.

Supposons la proposition vérifiée jusqu'au rang $n-1$ et introduisons le nouveau rayon candidat s_n. Les équations conjuguées (13) apportent bien deux racines réelles en vertu de la propriété 6. La discussion porte simplement sur le signe de μ'. Afin de travailler aux rangs n et $n-1$, on a rajouté un indice aux variables :

$$\begin{aligned} -s_n^2 \; \mu' \quad &= s_n^2 \left[(n-2)\sigma'_{(n)} - 2\sigma''_{(n)}\right] = (n-2)\left[1 + s_n^2\sigma'_{(n-1)}\right] - 2s_n\left[\sigma_{(n-1)} + s_n\sigma''_{(n-1)}\right] \\ &= \left[(n-2)\sigma'_{(n-1)} - 2\sigma''_{(n-1)}\right] s_n^2 - 2\sigma_{(n-1)}s_n + n - 2 \end{aligned}$$

On est donc ramené à étudier la position de s_n par rapport aux racines d'une des équations couplées (13) pour la famille $(s_0, \ldots, s_{n-1})$. Le cas limite se produit quand s_n égale la plus petite des racines admissibles (cf. figure 6). On a donc conservation de la propriété entre les rangs $n-1$ et n.

Finalement, comme tout triplet de réels strictement positifs est réalisable, la proposition du théorème est vraie pour $n = 3$, et le résultat annoncé est démontré par récurrence. $\diamondsuit$

3.3 Simplexes réguliers

Cette seconde étude concerne le cas où les centres des sphères forment un simplexe régulier, leurs rayons étant par ailleurs quelconques.

La matrice des distances associée à un simplexe régulier de côté a vaut : $C = a\bar{I}^{(d+1)}$. Il est alors naturel d'utiliser l'équation quadratique sous la seconde forme, et, une nouvelle fois, la relation (11) conduit immédiatement à l'expression des coefficients, avec :

- $x = -\frac{1}{2}$, $y = z = 0$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{r}$ pour calculer K_2
- $x = z = 0$, $y = 1$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{r^2}$, $\quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{r}$ pour calculer K_1
- $x = 0$, $y = z = 1$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{r^2}$ pour calculer K_0

De là, en divisant par $(-1)^d a^{d-1}$, on obtient l'équation quadratique développée donnant les rayons d'Apollonius dans le cas du simplexe régulier :

$$\begin{aligned} 2\left[4\sum_{i<j} r_i r_j + (d+1)a - 2d\sum_i r_i^2\right] \; R^2 + 4\left[\sum_{i\neq j} r_i r_j^2 + a\sum_i r_i - d\sum_i r_i^3\right] \; R \\ +2a\sum_i r_i^2 + 2\sum_{i<j} r_i^2 r_j^2 - d(a^2 + \sum_i r_i^4) = 0 \qquad (17) \end{aligned}$$

Le discriminant, quant à lui, ne se met pas sous une forme agréable.

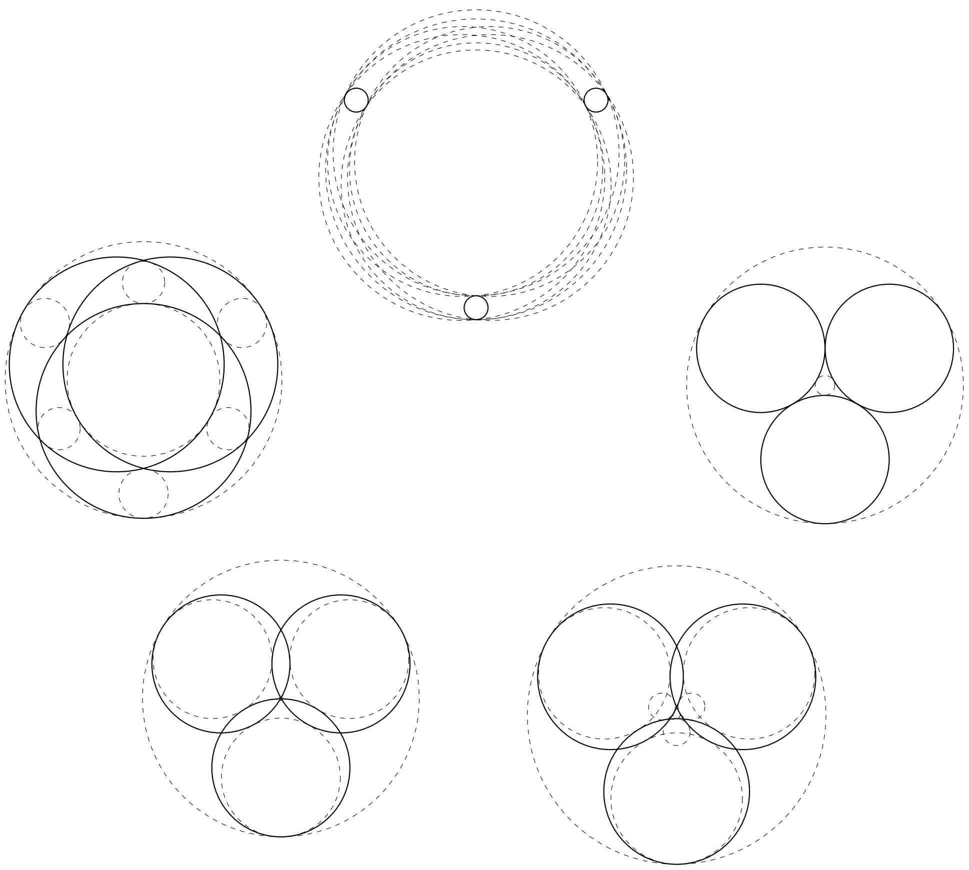

FIG. 7 – *Configurations spéciales.*

Rayon absolu commun

Considérons le cas spécial où toutes les sphères ont même rayon *absolu* ρ. Pour un problème particulier donné, soient P et N les nombres de sphères respectivement positives et négatives $(P+N=d+1)$. Clairement,

$$\sum_i r_i = (P-N)\rho \qquad \sum_i r_i^2 = (d+1)\rho^2 \qquad \sum_i r_i^3 = (P-N)\rho^3 \qquad \sum_i r_i^4 = (d+1)\rho^4$$

$$2\sum_{i<j} r_i r_j = (P-N)^2-(d+1) \qquad \sum_{i\neq j} r_i r_j^2 = d(P-N)\rho^3 \qquad 2\sum_{i<j} r_i^2 r_j^2 = d(d+1)\rho^4$$

L'équation précédente (17) devient ici :

$$2\left[(d+1)a-8PN\rho^2\right]R^2+4(P-N)a\rho R+a\left[2(d+1)\rho^2-da\right]=0 \tag{18}$$

Elle admet pour discriminant :

$$\mu'' = a(d+1)\left[8PN\rho^2(2\rho^2-a)+da^2\right] \tag{19}$$

Nous laissons au lecteur, en guise d'exercice, l'analyse des configurations des solutions à partir des signes du discriminant et du produit des racines. Par exemple, les sphères forment un conglomérat *ssi* $\rho=\frac{a}{2}$; par ailleurs, elles se coupent en un même point *ssi* le terme constant s'annule : $\rho^2=\frac{d}{2(d+1)}a$.

La figure 7 donne des représentations pour le problème plan, dans le sens des aiguilles d'une montre quand ρ croît, des trois configurations générales "interrompues" par les deux cas spéciaux cités ci-dessus en exemple.

Conclusion

La possibilité de ramener directement le problème d'Apollonius au problème de la sphère circonscrite à un ensemble de points était un premier point important du présent rapport. L'écriture des déterminants sous une forme qui sépare la matrice des distances entre les centres et les rayons facilite en général la recherche du nombre de solutions et des symétries éventuelles lors d'études de classes particulières de sphères. Nous avons également montré aussi que le discriminant de l'équation quadratique se factorise, ce qui permet d'en discuter le signe.

Tout a reposé sur l'existence d'une relation métrique locale *exploitable* : plus précisément, le problème étant supposé résolu, pour une sphère d'Apollonius de rayon R tangente à chaque paire d'objets, il s'agissait de relier R, la distance entre les points de contacts et des paramètres métriques propres aux objets – capables de décrire leur position à une isométrie près. La généralisation de la technique employée devrait pouvoir être étendue à d'autres types d'objets, de préférence convexes (sphères et plans mélangés, ellipsoïdes ...). Toute la difficulté première réside dans la recherche de ces paramètres propres aux objets.

Remerciements

Je tiens particulièrement à remercier Marcel Berger pour m'avoir éclairé sur des thèmes liés à la géométrie de la sphère. D'autres discussions fructeuses, menées avec Jean-Michel Moreau ont permis de rendre ce rapport plus clair. Merci aussi à Bernard Péroche de m'avoir laissé travailler librement sur un sujet qui se distingue du thème central de ma thèse. Enfin, les logiciels de calcul formel m'ont été précieux pour vérifier l'ensemble des formules obtenues dans les petites dimensions, et je remercie donc leurs créateurs.

Références

[1] Apollonius de Perga — Contacts — III^e siècle av. JC.

[2] M. Berger — Géométrie, *ed. Cedic/Fernand Nathan* — **1974**

[3] A. Cayley — Collected Mathematical Papers — *Cambridge University Press*, **1889**

[4] H.S.M. Coxeter — The Problem of Apollonius — *American Math. Monthly*, 75:5–15, **1968**

[5] R. Descartes — Œuvres — *ed. Adam et Tannery*, 4:37–50, **1901**

[6] E. Rouché et C. de Comberousse — Traité de Géométrie — *ed. Gauthier-Villars*, **1912**