Une méthode de maillage de milieux isotropes: utilisation de grilles régulières

H. Balza-Gomez, JM. Moreau
LISSE-EMSE
158, Cours Fauriel
42023 Saint-Etienne cédex
hbalza, moreau@emse.fr

O. Quiquempoix
LNH-EDF
6, Quai Watier
BP 49 – 78401 Chatou cédex
olivier.quiquempoix@der.edfgdf.fr

Résumé : *Dans ce papier nous présentons une méthode de maillage de domaines bidimensionels. Elle est adaptée au maillage de milieux isotropes réguliers par morceaux dans lesquels une certaine densité d'éléments est attendue. Elle est fondée sur l'observation suivante: les éléments de référence d'un maillage isotrope étant des triangles équilatéraux, la formulation de critères reliant le domaine, la densité et la grille régulière d'Archimède* $G_{(6)3}$ *composée de tels éléments est naturellement pertinente au placement de points dans le domaine. Dans ce sens un critère portant sur la taille des éléments a été introduit. Le placement des points est effectué suivant une méthode de balayage sur chaque ensemble de facettes de densité homogène. Ces facettes sont générées par la triangulation contrainte de Delaunay initiale du domaine. La méthode ainsi obtenue améliore notablement la rapidité des calculs et la régularité finale du domaine.*
Mots-clés : maillage, milieux isotropes, grille régulière, triangulation.

1 Introduction

La génération de maillages conformes à des domaines bidimensionnels est une étape indispensable aussi bien à l'utilisation de la méthode des éléments finis (*MEF*) qu'à l'étude de terrains à partir de données cartographiques. La notion de conformité d'un maillage à un domaine ne se réfère pas seulement au respect de la définition topologique et géométrique du domaine mais aussi au respect d'un certain nombre d'indications données par l'utilisateur, en fonction de l'usage que l'on fera du maillage. Il existe à l'heure actuelle une multitude de méthodes de maillage dont les stratégies de construction des éléments s'inspirent aussi bien des phénomènes physiques, des théories d'optimisation dans les graphes, des théories sur les espaces riemanniens [BG95], que des propriétés géométriques du domaine. En général, ou classifie une méthode comme étant structurée ou non-structurée suivant que l'insertion de points de Steiner est gouvernée ou non par une structure de fond de type grille.

Les performances d'une méthode de maillage s'évaluent suivant des critères devenus standards:

1. Le degré d'automatisation de la génération.
2. L'adaptativité du maillage au problème à résoudre.
   (a) L'influence du maillage sur la matrice du système discret d'équations de la *MEF*.
   (b) Le respect des contraintes géométriques, topologiques et de densité.
   (c) L'optimisation du rapport nombre d'éléments/précision de la solution.
3. La possibilité de dénombrer (préalablement à la construction du maillage) le nombre final d'éléments.

Ainsi on dit qu'une méthode de maillage qui satisfait le critère 2 pour une classe de problèmes est **"adaptative"**. Une méthode structurée répond efficacement au critère 2(a) car la simplicité de la topologie résultante conduit à une matrice de type bande. En plus, la qualité géométrique (en termes de facteur de forme) des éléments bénéficie de la régularité de la grille. On peut grâce à la grille, avoir une estimation "*a priori*" du nombre final d'éléments de la décomposition. Cependant ces méthodes ne permettent pas de traiter des anisotropies multidirectionnelles et de contrôler la densité dans différentes régions du domaine pour l'étude de phénomènes physiques. Pour le problème du contrôle de la densité nous tentons d'apporter une solution dans cet article.

Toute méthode de maillage se fait en au moins deux étapes: l'étape d'insertion de points et l'étape de connection de l'ensemble final de points. Concernant la première étape pour les méthodes structurées, on trouve deux types de procédures: dans [SF72] [Cav74] on superpose au domaine une grille carrée de taille souhaitée t (taille calculée d'après la longueur des arêtes). Sur chaque élément de la grille, on effectue un tirage aléatoire d'un point p qui n'est effectivement retenu que si ses voisins déjà inserés sur les cases voisines sont eloignés de p d'au moins une distance proche de t. C'est une procédure fort coûteuse et non-deterministe. Dans [Lo85] [SP78] les points de la grille sont des candidats à l'insertion et ne sont plus seulement des répères, mais l'espacement entre sommets est toujours fonction des longueurs des arêtes. Quant à la strategie utilisée pour trianguler les points, c'est une méthode d'avance de front dans tous les cas. On cherche pas à pas à optimiser chaque triangle créé alors que la géométrie des éléments de la grille est fixe et qu'une optimisation sur les points au voisinage de la frontière serait suffisante.

Nous présentons ici une méthode adaptative, qui ne se contente pas de respecter la topologie et la géométrie du domaine, comme c'est le cas des méthodes précédentes, mais qui en plus nous permet d'adapter la densité par régions, là où l'on a besoin de plus de précision pour la résolution des systèmes à derivées partielles. Un découpage par régions est alors prédefini à partir d'une estimation "*a priori*" de l'erreur (traduite par une carte de tailles). Le nombre de points voulu est ensuite spécifié dans chacune des régions, ces points sont alors insérés après calcul de l'espacement nécessaire. Le calcul de l'espacement entre sommets se fait grâce aux proprietes arithmétiques des grilles d'Archimède. La qualité des éléments est assurée par l'utilisation de grilles de triangles équilatéraux et du mailleur de Delaunay contraint.

2 Préliminaires

2.1 Position du problème

Nous partons de la donnée suivante: un graphe planaire $G_M = (V, F)$, union d'un ensemble de polygones disjoints quelconques $G_M = \cup R_i$ plongé dans un milieux isotrope M. Dans chaque région R_i de G_M nous avons un nombre n_i de sommets de Steiner attendus. Nous cherchons alors à construire une triangulation de G qui satisfasse l'ensemble des contraintes, par le biais d'une méthode automatique et rapide. L'utilisation de grilles régulières d'Archimède comme structure de fond nous a paru bien adaptée à notre problème pour plusieurs raisons:

1. Toute décomposition du plan en polygones réguliers identiques traduit parfaitement la notion d'isotropie M de G_M.
2. La régularité de la triangulation résultante est implicite. Cette régularité est conservée d'après les propriétes de la grille partout sauf aux transitions entre les differentes régions. A ces endroits le mailleur de Delaunay et la méthode de régularisation optimisent la qualité des triangles pour la configuration donnée.
3. En particulier, chaque élément de la grille $G_{(6)3}$ utilisée étant un triangle équilatéral, son facteur de forme est parfait, en termes des mesures de qualité enoncées dans [SG95].
4. L'arithmétique de ces grilles nous donne le moyen de satisfaire les conditions de densité imposées.
5. L'étape d'insertion dans une région R_i est simple et facile à contrôler.

Toutefois, ce choix soulève quelques problémes. On remarque que dans la plupart des cas, les configurations optimales (celles dans lesquelles il y a un maximum de points de la grille dans le polygone) ne correspondent pas à celle qui consiste à fixer l'origine de $G_{(6)3}$ au point $(0, 0)$. La difficulté est de savoir si en déplacant le polygone par une série de déplacements rigides (rotations et translations) on est capable de calculer de manière déterministe la (ou les) position(s) "optimale(s)". Des recherches dans ce domaine [DS96] ont conduit à des algorithmes dont la meilleure complexité connue est en $O(m^4n^2log(m))$, m étant le nombre de points de la grille et n le nombre de sommets du domaine. De plus, étant donné que le nombre de déplacements possibles est infini, on se restreint à des positions dites "stables"(voir [Cha83]) pour l'analyse,

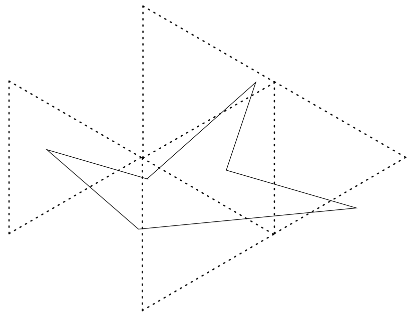

FIG. 1 – *Résultat possible en cas de mauvais conditionnement du problème.*

ce qui revient à dire que la solution trouvée est un maximum local. Nous avons choisi alors de fixer des contraintes moins sévères, en admettant que le résultat obtenu puisse être non-optimal.

Pour pallier ce problème, nous avons décidé d'obtenir par itération le résultat le plus satisfaisant possible, en modifiant le pas de la grille pour sur- ou sous-dimensionner le nombre de points. L'arrêt de la procédure se fait, si d'une modification sur l'autre, on ne se retrouve pas dans un cas plus favorable que le précédent.

D'un autre point de vue, une source d'imprécision se présente: lors de l'insertion, on approche les points de la grille (à coordonnées irrationnelles) par des rationnels (à précision souhaitée). Ce faisant, on introduit une nouvelle erreur dans le nombre de points effectivement insérés.
Il se peut que le polygone soit très défavorable par rapport à la forme des éléments que l'on veut y placer (des triangles équilatéraux) et que l'on n'arrive pas à insérer de points. Dans ce cas, il y a des fortes chances que le problème physique sous-jacent (ou l'estimation du nombre de sommets necéssaires) soit mal conditionné (voir Figure 1).

2.2 Définitions

Décomposition conforme à un domaine isotrope: Soit D un domaine plongé dans un milieu isotrope M. Soit h_i la taille des éléments souhaitée au point (x_i, y_i). Soit $T(D)$ une décomposition conforme de D (du point de vue géométrique). On dit que $T(D)$ est en accord avec M ou que $T(D)$ est conforme à M, si $\forall t_i \in T(D)$ et $\forall x \in t_i$, il n'existe pas d'autre sommet $y \in t_j$ à l'intérieur du disque $C_i(x, h_i)$ de rayon h_i.

Triangulation de Delaunay contrainte: Soit $D = (V, E)$ un graphe planaire réprésentant un domaine. Soit $T_{Del}(D) = (V_t, E_t)$, une triangulation du domaine D. On dit que $T_{Del}(D)$ est la triangulation de Delaunay contrainte de D ssi:

1. $V \subseteq V_t, E \subseteq E_t$.
2. Soit t_i un triangle de $T_{Del}(D)$ alors:
   . Soit le cercle C_{t_i} circonscrit à t_i est vide de tout autre sommet autre que ses extremités .
   . Soit C_{t_i} contient un autre sommet s' (ou plusieurs), mais pour aller d'un sommet de t_i à s' on doit "traverser" au moins une arête de D. On dit aussi que s' "n'est pas visible" à partir d'un des sommets de t_i.

La triangulation de Delaunay est la triangulation optimale par rapport au critère de la maximisation de l'angle minimal; il s'ensuit que pour un domaine D donné, $T_{Del}(D)$ est sa triangulation la plus régulière. Les arêtes de D sont appelées " arêtes contraintes" ou "dures" et les arêtes

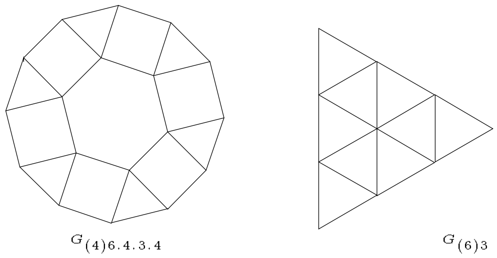

FIG. 2 – *Deux pavages d'Archimède*

de $E_t - E$ sont des arêtes "de Delaunay" ou arêtes "molles".

Pavage d'Archimède: Soit $Pav_{(d)r}$ un pavage de R^2 (où d correspond au degré des sommets de $Pav_{(d)r}$ et r est la suite circulaire de types de polygones présents au tour d'un sommet). Soit V_{Pav} l'ensemble de tous les sommets du pavage et E_{Pav} la famille de toutes les arêtes de Pav. $Pav_{(d)r} = (V_{Pav}, E_{Pav})$ est un pavage d'Archimède ssi:

1. C'est un graphe planaire d-régulier: tout sommet de V_{Pav} est de degré d.
2. Toute face du pavage est un polygone régulier convexe.
3. Autour de chaque sommet de $Pav_{(d)r}$ on a le même ordre d'adjacence entre polygones $r = \{p_1, p_2, ..., p_d\}$.

On dit que V_{Pav} est la **grille** de $Pav_{(d)r}$.

Par exemple, dans le pavage du plan composée de triangles équilatéraux, il y 6 triangles en chaque sommet: c'est le pavage d'Archimède $G_{(6)3}$. $G_{(4)3.4.6.4}$ est le pavage dont tous le sommets sont de degré 4 et dans lequel on trouve autour de chaque sommet un triangle, un carré, un hexagone puis un carré (voir figure 2).

Sommet de Steiner Dans une triangulation $T(D)$ d'un domaine D on dit qu'un sommet s est un sommet de Steiner si $s \in V_t - V$.

3 Contexte et domaine d'application

Cette méthode fait partie d'une application destinée à résoudre des problèmes de mécanique de fluides dans le cadre de recherches menées au Laboratoire National d'Hydraulique (LNH-EDF) conjointement aux travaux effectués au LISSE. De ce fait, il y a toute une série de pré- et post-traitements à notre procédure développés en interne au LNH, et qui ont été mis à disposition. Les étapes indispensables pour pouvoir appliquer notre algorithme sont les suivantes:

1. Organisation de données d'origines multiples: relevés de terrain, cartes géographiques, données de bathymétrie, taille de maille voulue en chaque point d'après des estimateurs d'équidistribution de l'erreur, *etc...*
2. Construction d'un graphe planaire à partir des données analysées. Première triangulation de Delaunay contrainte.
3. À partir d'une carte de tailles, on découpe les arêtes du graphe en respectant la valeur de l'espacement voulu en chaque point, en utilisant l'algorithme de Douglas-Peucker [DP73] [Bra96]. Deuxième triangulation de Delaunay contrainte.
4. Recherche de toutes les facettes d'une composante connexe de densité homogène R_i. À partir de la carte de tailles, on parcourt la triangulation, en créant des aggrégats de

facettes. Une facette est ajoutée à un aggrégat si la différence entre la densité attendue dans cette facette et la densité moyenne de l'aggrégat ne dépasse pas un certain seuil. Le résultat est une région polygonale connexe simple. Cette opération est repétée jusqu'à ce que toutes les facettes appartiennent à un aggrégat. La triangulation précédente du domaine nous permet aussi d'identifier les facettes qui sont à l'intérieur de R_i mais qui sont des trous (pour le domaine).

4 La méthode

4.1 Calcul de la constante d'espacement r_i d'une région R_i

Dans les méthodes citées, le calcul de l'espacement entre sommets de Steiner ne prend en compte que la longueur des arêtes. Bien que cela soit cohérent du point de vue géométrique, une telle mesure est peu compatible avec la notion de contrôle adaptatif de la densité. De ce fait, nous avons été amenés à chercher un paramètre qui relie les trois principales contraintes de notre donnée: la description de la région polygonale à densité homogène, le pas de la grille $G_{(6)3}$ et le nombre de points requis. Un des résultats les plus connus sur l'arithmétique des pavages réguliers, non exploité jusqu'à présent, répond naturellement à nos besoins: c'est le théorème de Pick [RR85] [Ree57], dont voici l'énoncé:

Théorème 4.1 (Théorème de Pick) *On dit qu'un polygone P est discret* ssi *tous ses sommets sont sur une grille régulière.*

Soit R_i un domaine polygonal discret quelconque, et soit $G_{(6)3}$ la grille d'Archimède dont le pavage est composé de triangles équilatéraux. Supposons que l'on connaisse le nombre de points de $G_{(6)3}$ qui se trouvent strictement à l'intérieur de R_i, $|R_i \bigcap G_{(6)3}| = i_{R_i}$ et sur sa frontière $|\partial R_i \bigcap G_{(6)3}| = f_{R_i}$. Soit finalement t_{R_i} le nombre de trous de R_i, alors l'aire de R_i, $A(R_i)$ est égale à

$$A(R_i) = \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{f_{R_i}}{2} + i_{R_i} - 1 + t_{R_i})r_{R_i}^2$$

Les trois contraintes sont ainsi reliées par une relation simple. Pour affiner le calcul, et étant donné les valeurs rationnelles des sommets du polygone (qui ne sont donc pas des multiples des éléments de la base de $G_{(6)3}$, nous avons fait l'hypothèse suivante: la probabilité d'avoir des points entiers sur les arêtes de P_i est négligeable, et f_i sera considéré comme égal à zéro. Cette considération faite, on obtient une formule de calcul approché du pas de la grille r_i:

$$r_{R_i}^2 = \frac{2A(R_i)}{\sqrt{3}(i_{R_i} + t_{R_i} - 1)}$$

Grâce à cette expression, il nous suffit de connaître l'aire de chaque région R_i pour déterminer son r_i correspondant, car le nombre de points souhaité est donné et le nombre de trous peut être calculé à partir de la triangulation de Delaunay contrainte.

4.2 Procédure d'insertion de points

Une fois que l'on a calculé l'espacement r_i entre les sommets de Steiner d'une région R_i on procède à l'insertion de points de la grille dans R_i. Nous avons conçu deux stratégies d'insertion de points, dont la première a été déjà implementée. Toutes deux sont fondées sur le principe du balayage; la première, qu'on appellera “balayage simplifié”, exploite la structure de l'“aggrégat de facettes” qui nous a permis de construire la zone à densité homogène R_i. La deuxième traite la région dans sa globalité, comme une polygone simple avec ses trous éventuels.

4.2.1 Balayage “simplifié”

1. Triangulation de Delaunay contrainte du domaine: $T_{Del}(D)$

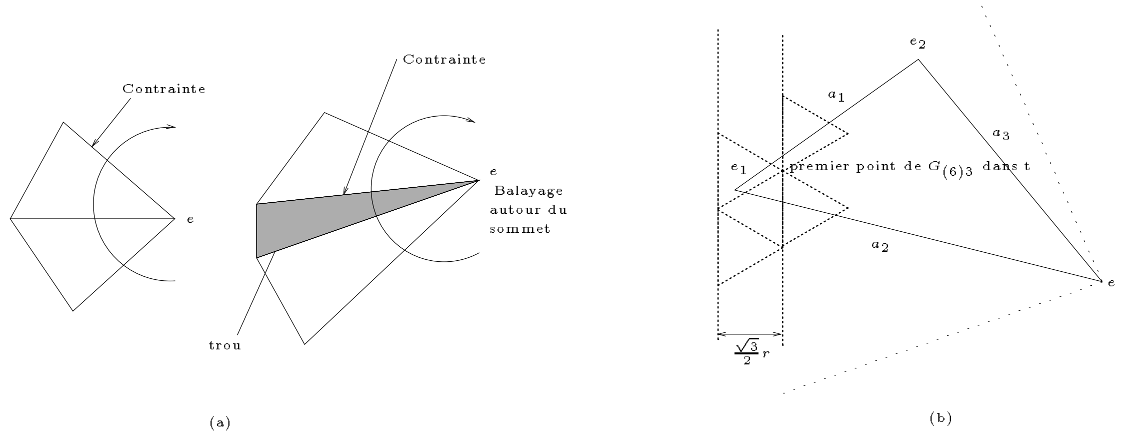

FIG. 3 – *(a) Différents cas rencontrés lors du parcours autour d'un événement e. (b) Traitement d'un triangle (balayage simplifié).*

2. Découpage des arêtes contraintes inspiré de l'algorithme de Douglas-Peucker [Bra96].
3. Recherche de toutes les facettes d'une composante connexe de densité homogène R_i.
4. Tri des arêtes de R_i. On construit une liste qui répresente l'ordre de "mort" des arêtes autour de chaque sommet de R_i. Chaque élément de la liste contient une arête et un pointeur sur l'arête duale.
5. Construction de la liste d'événements pour le balayage: les sommets de R_i.

Balayage : Pour chaque événement e:

1. Parcourir dans l'ordre horaire (de $\frac{-3\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$) toutes les arêtes mourantes et sélectionner toutes les paires d'arêtes dont la mort en e implique la "fermeture" d'un triangle de D (et non de son complémentaire, voir Figure 3(a)). La troisième arête est obtenue à partir des deux autres grâce à la carte planaire.
2. Pour chaque paire $Paire$ d'arêtes detectée: **Traiter-Triangle(**$Paire$**)**

Il faut répéter cette procédure pour toutes les régions du domaine. Dans notre implémentation, on peut choisir de découper ou non les arêtes "molles" de la triangulation, le découpage des arêtes contraintes n'étant pas en principe nécessaire, car ces dernières sont supposées avoir déjà la longueur souhaitée.

Traiter-Triangle($Paire$**) :**

1. Calcul de la troisième arête du triangle $t(e_1, e_2, e)$ défini par $Paire$.
2. Calculer la position "locale" pos_{init} de la première barre verticale du balayage de t dans le référentiel de la grille et par rapport au sommet extrême gauche de t.
3. Calculer l'orientation du triangle $Paire$.
4. Balayer en x le triangle suivant les barres verticales supports de la grille $G_{(6)3}$ à partir de pos_{init}:

   (a) Si t est orienté dans le sens indirect (e_2 est à droite de e_1, *cf.* Figure 3(b)):
   - Jusqu'à e_2: utiliser a_2 comme "frontière" basse et a_1 comme "frontière" haute de la zone verticale d'insertion.
   - Insérer les points de $G_{(6)3}$ qui sont entre ces deux frontières.
   - Après e_2 la frontière basse reste la même et a_3 devient frontière haute.

– Calculer la position de la prochaine ligne de balayage, continuer si son abscisse est inférieure à l'abscisse maximale du triangle.

(b) Si t est orienté dans le sens inverse:

– Jusqu'à e_1: utiliser a_1 comme "frontière" basse et a_3 comme "frontière" haute de la zone verticale d'insertion.
– Insérer les points de $G_{(6)3}$ qui sont entre ces deux frontières.
– Après e_1 la frontière haute reste la même et a_2 devient frontière basse.
– Calculer la position de la prochaine ligne de balayage, continuer si son abscisse est inférieure à l'abscisse maximale du triangle (forcément celle de e).

4.2.2 Balayage général

Dans le cas général, on balaye le polygone $R_i = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ (pouvant présenter des trous) suivant la liste de ses sommets, sans utiliser une décomposition préalable en facettes triangulaires. En entrée, nous avons besoin de deux structures qui représentent la suite des événements: la liste des arêtes mourantes et la liste des arêtes naissantes en chaque sommet du polygone. Le schéma de la procédure est le suivant:

1. Tri des arêtes de R_i. On construit deux listes: l'une répresente l'ordre de "naissance" des arêtes (contraintes ou non), l'autre l'ordre de "mort". Chaque élément de chacune des listes contient une arête et un pointeur sur sa duale.
2. L'ordonnancement du balayage est gouverné par deux types de barres verticales: les lignes verticales du pavage de $G_{(6)3}$ et les lignes correspondant aux sommets de R_i.
3. Balayage: Pour chaque ligne l du balayage:

   – Évaluer les changements topologiques observés en l suivant l'état courant des arêtes (naissantes et mourantes).
   – Si la ligne de balayage est de type "pavage":
   Grâce à une structure de y-AVL permettant de faire un chaînage de proche en proche, on insère les points de la grille qui sont entre deux régions "internes" de P.
   – Si la ligne de balayage est de type "sommet" de R_i
   Mettre à jour les listes d'arêtes mourantes et naissantes.
   Il se peut qu'une ligne du balayage de type "pavage" coincide avec une ligne de type "sommet": dans ce cas on effectue les deux opérations du test.

4.3 L'algorithme

L'algorithme complet, à base de balayage simplifié ou non, a une structure "classique": on construit d'abord une triangulation initiale du domaine, on insère des sommets de Steiner, on

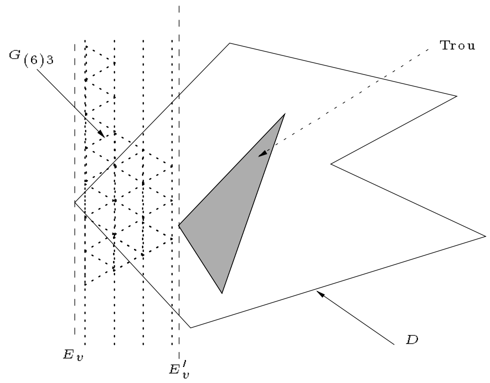

FIG. 4 – *Balayage général*

fait une triangulation intermédiaire qui prend en compte les nouveaux sommets, et on régularise en deplacant les points vers des positions optimales selon des principes d'équilibre physique.

1. Le domaine est initialement triangulé à l'aide du mailleur de Delaunay contraint, developpé au Laboratoire LISSE [Mor94].
2. Construction d'une liste de toutes les facettes t_i de la région à densité constante (ou homogène).
3. Pour chaque région R_i :
   (a) Sauvegarder la valeur de n_{R_i} dans une variable, ν_i.
   (b) Boucler indéfiniment :
      i. Calcul de l'espacement r_{R_i} entre sommets de chaque région R_i suivant n_{R_i}.
      ii. Procéder soit au balayage “simplifié”, soit au balayage général.
      iii. Calcul du nombre de points effectivement insérés, n'_{R_i}.
      iv. Si n'_{R_i} est suffisamment proche de ν_i : stop.
      v. Sinon, ajuster n_{R_i} suivant que la valeur absolue de la difference $|n_{R_i} - n'_{R_i}|$ est supérieure à un certain seuil dans le sens nécessaire (incrémenter si $n'_{R_i} << \nu_i$, décrémenter sinon). Si entre deux itérations, le résultat $|n_{R_i} - n'_{R_i}|$ croît, on arrête.
4. On crée ensuite un nouvelle triangulation de Delaunay sur laquelle une méthode de régularisation de type “système de ressorts” va être appliquée (voir [Bra96]).
5. Construction de la triangulation finale.

Soit $n = n_{init} + n_{Steiner}$ le nombre final de sommets de la triangulation. Soit k le nombre d'itérations de la boucle d'insertion-triangulation. La complexité de l'algorithme (sans l'étape de régularisation physique) est en $O(k(nlogn))$.

La méthode de régularisation, en modifiant la position des points pour obtenir un état d'équilibre global, permet d'éliminer certain points qui seraient trop près des frontières après leur insertion, et d'éloigner des points de grilles différentes que seraient trop proches de part et d'autre d'une frontière (“molle” ou contrainte) entre régions.

C'est tout de même un système d'équations qui se résout de manière itérative et qui met en jeu des calculs sur des grosses matrices, donc si la solution initiale n'est pas bien conditionnée, la convergence peut être très lente.

5 Analyse de résultats

Les résultats obtenus sont très satisfaisants, et cela de plusieurs points de vue:

1. On obtient des temps de calcul environ dix fois inférieurs en moyenne par rapport à ceux de la méthode qui était utilisée auparavant (méthode fondée sur le tirage aléatoire (distribution uniforme) de n points dans chaque triangle d'une région).
2. La phase de régularisation devient locale: la plupart des points se trouvent dès le départ à une position proche de l'optimale (du fait que ce sont des points de la grille), la majeure partie du travail à faire se situe à proximité des frontières entre régions de densités différentes.
3. La régularité de la maille finale se trouve ameliorée.
4. Il y a, par conséquent, une amélioration de la qualité des calculs et résultats ultérieurs (*MEF*) (meilleure convergence, diminution notoire des oscillations, diminution de l'erreur).
5. Meilleure correspondance entre le résultat intuitivement attendu et le résultat réel (constat des utilisateurs).

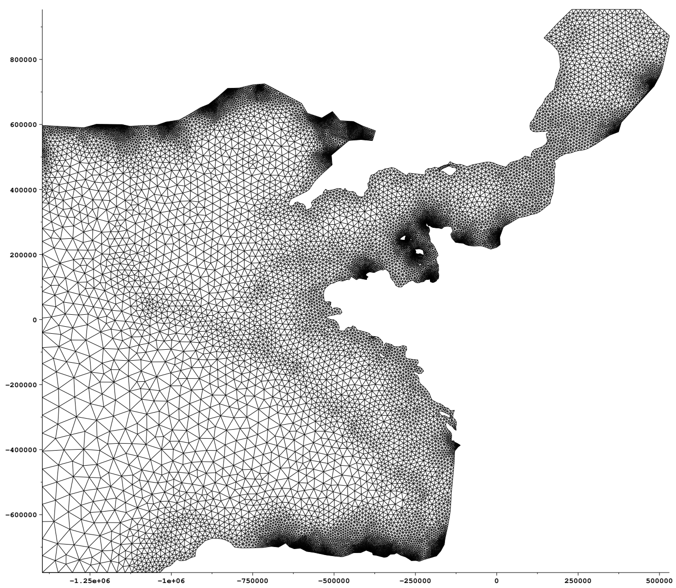

FIG. 5 – *Résultat de l'algorithme sur des données réelles (document LNH-EDF).*

Comme on le voit dans l'algorithme, on doit actuellement procéder de manière itérative pour ajuster la valeur de la taille des éléments. Ceci est dû, en partie, au fait que la formule de Pick se limite au cas d'un polygone discret, et dans notre cas les sommets des polygones sont des rationnels et les points de la grille sont des irrationnels, bien qu'arrondis à une précision décimale fixée à l'avance.. Il faudrait concevoir une méthode de dénombrement *a priori* pour pouvoir reévaluer r_i **avant** l'insertion des points correspondant au r_i courant. Ceci entraînerait, en pratique, un gain de temps supplémentaire et une amélioration de la connaissance théorique de la complexité globale du processus.

6 Conclusions et perspectives

Nous avons présenté une méthode de maillage de milieux isotropes. Cette méthode permet de contrôler la densité du domaine par régions, et d'obtenir des décompositions régulières de tels domaines.

Jusqu'à présent, la détermination de zones à densité homogène consiste à chercher triangle par triangle la région connexe dans laquelle l'écart de précision voulue ne dépasse pas une certaine valeur. Cette facon de procéder n'est pas assez "fine": nous envisageons d'essayer de générer ces zones "en amont" (avant la première triangulation) à partir de la seule connaissance de la carte de tailles.

Actuellement, nous sommes en train de mettre à point un algorithme de dénombrement de points de grilles d'Archimède à éléments identiques ($G_{(6)3}$ et $G_{(4)4}$). Nous utilisons des notions de la théorie des nombres: les fractions continues, leurs convergents, leur interprétation géométrique et l'approximation de nombres réels par des fractions continues. L'algorithme repond à la base à la question suivante: Étant donné un segment de droite dont les sommets sont à coordonées rationnelles, quel est le nombre de points de $G_{(6)3}$ (ou de $G_{(4)4}$) qui se trouvent au dessous de du segment? Dans le cas de $G_{(6)3}$: Quelle est l'erreur maximale dans le dénombrement de ces points, en sachant que l'on utilise des approximations d'irrationnels par de fractions continues périodiques? L'idéal serait de trouver une fonctionnelle qui nous donne une mesure de l'erreur totale commise pour un polygone, un pas de grille et une position fixés.

Références

[BG95] Bourouchaki and George. Mailleur bidimensionnel de delaunay gouverné par une carte de métriques, partie i. Technical Report 2760, INRIA, 1995.

[Bra96] Christophe Bragier. *Mailleur de Delaunay piloté par une carte de taille en vue d'une adaptation à la bathymétrie"*. PhD thesis, Université de Lille, 1996.

[Cav74] J. Cavendish. Automatic triangulation of arbitrary planar domains for the finite element method. *International Journal for numerical methods in engineering*, 8:679–3696, 1974.

[Cha83] B Chazelle. The polygon placement problem. In *Advances in Computing Research:vol 1, JAI Press*, pages 1–34, 1983.

[DP73] D.H. Douglas and T.K Peucker. Algorithms for the reduction of the number of points required to represent a line or its caricature. *The Canadian Cartographer*, 10:112–122, 1973.

[DS96] Dickerson and Scharstein. Optimal placement of convex polygons to maximise point containement. In *ACM-SIAM Symposium on discrete algorithms (SODA '96)*, pages 114–121, 1996.

[Lo85] S. Lo. A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains. *International Journal for numerical methods in engineering*, 21:1403–1426, 1985.

[Mor94] Jean-Michel Moreau. Hierarchical delaunay triangulation. In *Proceedings of the 6 CCCG*, Saskatoon, Canada, August 1994.

[Ree57] J. Reeve. On the volume of lattice polyhedra. In *Proceedings of London Math Society, 3*, London, 1957.

[RR85] Ding Ren and John Reay. The boundary characteristic and Pick's theorem in the archimedean planar tilings. *Western Washimgton University Journal, Departement of Mathematics*, pages 4–19, August 1985.

[SF72] Suhara and Fukuda. Automatic mesh generation for finite element analysis. *Advances in computational Methods in Structural Mechanics and Design*, pages 607–624, 1972.

[SG95] Kenji Shimada and David Gossard. Bubble mesh: Automated triangular meshing of non-manifold geometry by sphere packing. In *ACM Solid Modeling '95*, pages 409–19, 1995.

[SP78] Shaw and Pitchen. Modifications to the suhara-fukuda method of network generation. *International Journal for numerical methods in engineering*, 12:93—99, 1978.