Ecole Nationale Supérieure
des Mines de Saint-Etienne

Université Jean Monnet
de Saint-Etienne

N° d'ordre : 216 ID

THESE

Présentée par Nicolas NOE

pour obtenir le titre de

Docteur

DE L'UNIVERSITE JEAN MONNET DE SAINT-ETIENNE ET DE
L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE SAINT-ETIENNE

Spécialité Informatique, Synthèse d'images

Étude de fonctions de distribution de la réflectance bidirectionnelle

Soutenue à Saint-Etienne, le 29 septembre 1999

Composition du jury :

Pierre Poulin Christophe Schlick	Rapporteurs
Corinne Brusque Bernard Péroche Alain Trémeau	Examinateurs

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier mon directeur de thèse, Bernard Péroche. Je le remercie d'avoir été à la fois très disponible et de m'avoir aussi laissé une grande marge de manoeuvre. Je le remercie aussi pour toutes les corrections qu'il a pu apporter à ce manuscrit, tout cela dans des temps records.

J'aimerais remercier aussi Pierre Poulin et Christophe Schlick d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, ainsi que pour leur remarques et critiques constructives qui furent particulièrement utiles lors de la correction de ce mémoire. Je tiens à remercier aussi Corinne Brusque et Alain Trémeau d'avoir accepté de faire partie du jury.

J'aimerais remercier l'ensemble des membres du Laboratoire d'Images de Synthèse de Saint-Etienne, ainsi que tous ceux qui m'ont aidé au cours de mon travail. Merci aussi à tous mes compagnons de route, Laurent, Jean-Claude, Hubert, aux bombermen Johann et Thibault.

Merci à tous ceux qui sont venus me soutenir, mes parents, Eric et Jean-Pierre, Mr et Mme De Vito. Merci aussi à tous ceux qui n'ont pas pu venir, mais qui auraient aimé profiter du pot, Charlotte, Poncho-Karim, Thierry, Pierre-Yves, Nicolas, et les autres.

De manière plus personnelle, je remercie Sophie pour toute l'aide qu'elle m'a apportée lors de la rédaction de cette thèse, pour tout ce qu'elle a cuisiné pour le pot, mais surtout pour tout ce qu'elle m'apporte, jour après jour.

Et puis en vrac, je remercie une marque de bière très foncée, la lande, les pubs, le whisky et les moutons écossais, les champs de lave, les mares de boue bouillonnante et les moutons islandais, la fourme d'Ambert et les Côtes Roannaises, le mouvement d'un cheval et d'une étincelle, ainsi qu'un gandot très pratique.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Chapitre 1

Introduction

Un des objectifs de la synthèse d'images est de créer des images photoréalistes. Pour cela, on simule le comportement de la lumière à l'intérieur d'une scène qu'on a préalablement modélisée. L'essentiel de la recherche a, jusqu'à maintenant, porté sur la méthode de simulation elle-même, afin d'améliorer le calcul de l'éclairement global d'une scène.

Avec la puissance des machines actuelles et la qualité des algorithmes dont on dispose, il devient aujourd'hui possible de modéliser de façon de plus en plus réaliste le comportement en réflexion des matériaux, afin d'améliorer le réalisme des images obtenues, notamment en intégrant des informations expérimentales. Le travail que nous allons présenter dans ce mémoire de thèse, va tenter de faire le lien entre l'expérience et la simulation informatique.

Dans le premier chapitre, nous allons présenter les notions de base que nous allons devoir manipuler, c'est-à-dire introduire les BRDFs, les fonctions de distribution de la réflectance bidirectionnelle.

Dans le deuxième chapitre, nous exposerons quelques résultats expérimentaux de BRDF, afin de mieux appréhender la complexité de la réflexion dans le monde réel, par rapport à la simplification que l'on en fait lors des simulations. Nous essaierons de mettre en évidence quelques particularités de ces BRDFs expérimentales.

Dans le troisième chapitre, nous introduirons les moyens de comparer les BRDFs expérimentales par rapport à leurs représentations informatiques. Cette notion d'erreur entre BRDFs nous permettra, à l'avenir, de comparer mesures réelles et représentation informatique.

Dans le quatrième chapitre, nous affinerons encore plus le lien entre la théorie et la pratique, en mettant au point un goniophotomètre virtuel, appareil simulant un appareil existant, destiné à mesurer des BRDFs. À l'aide de ce simulateur, nous validerons certains modèles analytiques et tenterons de reproduire des expériences réelles, de manière à savoir dans quelle mesure on peut utiliser ce genre de simulateur.

Étant donné que nous disposons de mesures de BRDFs expérimentales, ainsi que de BRDFs résultats de simulations, nous allons naturellement être amenés à représenter de façon informatique ces mesures, afin de pouvoir les utiliser au cours de calculs. C'est ce travail qui va être présenté dans le cinquième chapitre. Nous présenterons quelques méthodes classiques de représentation, à l'aide de bases de fonctions, que sont les harmoniques sphériques et les polynômes radiaux. Nous présenterons de façon détaillée l'adaptation de ces représentations au cas des BRDFs, puis nous introduirons une nouvelle méthode de représentation, plus adaptée. Cette méthode est basée sur des fonctions à support local, afin d'obtenir un temps d'évaluation le plus rapide possible. De plus, on l'utilisera de manière hiérarchique, de façon à représenter les données de manière de plus en plus fine.

Le lecteur trouvera aussi en annexe, un travail sur la discrétisation de la sphère, problème qui revient dans tous les chapitres. Cette annexe propose différentes manières d'effectuer cette discrétisation, chacune d'entre elles étant amenée à être utilisée lors de l'implémentation des techniques présentées dans les différents chapitres. Une autre annexe, sur l'utilisation des BRDFs de façon probabiliste complètera ce mémoire.

Chapitre 2

Théorie

2.1 Notions de radiométrie et photométrie

2.1.1 Introduction

La radiométrie est la science de la mesure des flux d'énergie transportés par les ondes électromagnétiques et la photométrie la science de la mesure psychophysique de la sensation visuelle produite par un spectre électromagnétique.

2.1.2 Radiométrie

Le flux énergétique (*flux* en anglais) ϕ_e est l'énergie quittant ou arrivant sur une surface donnée par unité de temps. Ce flux est exprimé en Watts W. Un certain nombre de grandeurs physiques peuvent être déduites du flux énergétique. Toutes ces quantités dépendent de la longueur d'onde λ. Pour simplifier les notations, nous ne ferons pas figurer ce paramètre λ dans la suite.

Il est important de rappeler que tout système physique doit respecter le principe de conservation de l'énergie. Pour le problème qui nous concerne, ceci signifie que l'énergie pénétrant dans une région de l'espace ou arrivant sur une surface doit être égale à l'énergie quittant la région où la surface. Ainsi, la quantité de lumière absorbée, réfléchie et transmise ne peut jamais dépasser la quantité de lumière incidente.

Rappelons que si dA est une surface élémentaire, la valeur du cône de sommet S s'appuyant sur dA s'appelle l'angle solide $d\omega$ (unité le stéradian sr). Si on note D la droite joignant S et le centre de dA, θ l'angle formé par D avec le vecteur normal à dA et r la distance de S à dA, on a (*figure 2.1, p. 22*) :

$$d\omega = \frac{dA}{r^2} \cos\theta$$

On appelle angle solide projeté la projection sur la base de la sphère de l'aire élémentaire de cette sphère comprise dans l'angle solide (la sphère étant la sphère unité

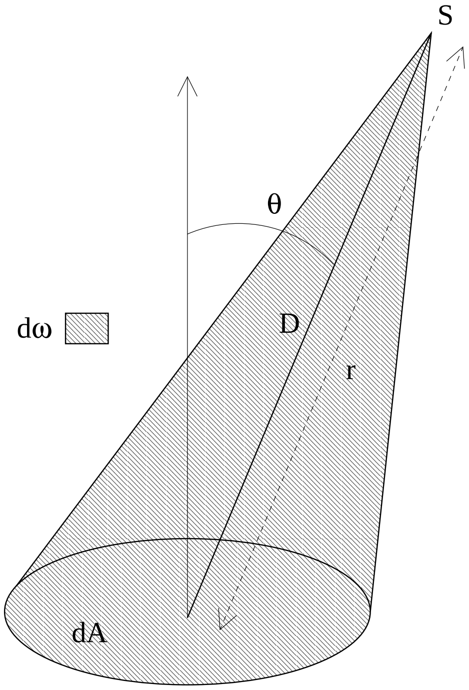

FIG. 2.1 – *définition d'un angle solide*

centrée sur la surface, et la base le plan orientée par la normale à la surface). Il peut être important de représenter un angle solide $d\omega$ par un vecteur $\vec{d\omega}$. La direction de $\vec{d\omega}$ est celle de l'axe du cône et sa longueur la valeur de l'angle solide.

À partir du flux énergétique, on peut définir les quantités radiométriques suivantes :

Définition 1 (luminance) *soit $\vec{\omega}$ une direction et x un point situé sur une surface élémentaire d'aire dA. La luminance (*radiance *en anglais) [NRH+ 77] est le flux énergétique émis par une surface, dans une direction donnée, par unité de surface et par unité d'angle solide projeté (unité: W m^{-2} sr^{-1}) (*figure 2.2, p. 23*) :*

$$L(x, \vec{\omega}) = \frac{d^2\phi_e(\vec{\omega})}{dA \cos\theta \, d\omega}$$

Il faut noter que la luminance s'applique uniquement à des sources primaires étendues ou à des objets considérés comme des sources secondaires.

On peut montrer que la luminance reste constante suivant la direction de propagation d'un rayon lumineux. Soit un pinceau lumineux défini par deux surfaces élémentaires dA_1 et dA_2. Notons $d\omega_1$ (respectivement $d\omega_2$) l'angle solide s'appuyant sur dA_2 (resp. dA_1) et de sommet le centre de dA_1 (resp. dA_2). D'après la loi de conservation de l'énergie, le flux quittant dA_1 est égal au flux arrivant sur dA_2 et noté $d\phi$. Donc :

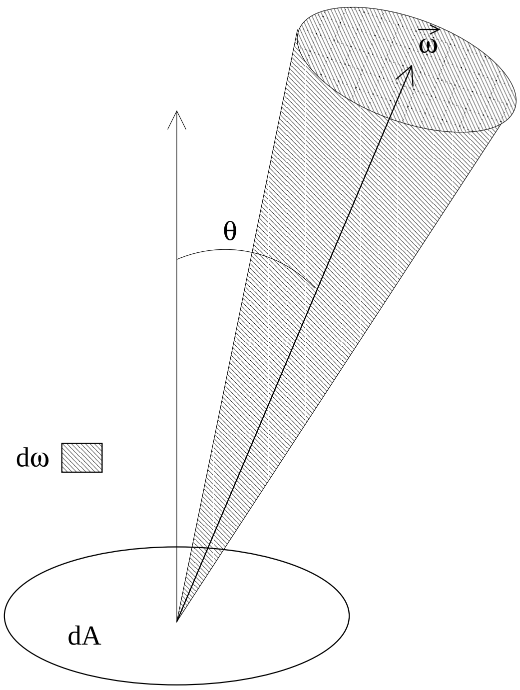

FIG. 2.2 – *définition de la luminance*

$$d^2\phi = L_1\, dA_1\, \cos\theta_1\, d\omega_1 = L_2\, dA_2\, \cos\theta_2$$
$$\text{avec: } d\omega_1 = \frac{dA_2}{r^2}\cos\theta_2 \text{ et } d\omega_2 = \frac{dA_1}{r^2}\cos\theta_1$$
$$\Rightarrow L_1 = L_2$$

Définition 2 (éclairement) *l'éclairement (*irradiance *en anglais) est le flux énergétique, par unité de surface, arrivant sur une surface. L'unité est le* $W\,m^{-2}$ *:*

$$E(\vec{\omega}) = \frac{d\phi_i(\vec{\omega})}{dA}$$

Définition 3 (l'exitance) *l'exitance (*exitance *en anglais) est le flux énergétique, par unité de surface, rayonné par une surface. L'unité est le* $W\,m^{-2}$ *:*

$$M(\vec{\omega}) = \frac{d\phi_e(\vec{\omega})}{dA}$$

En synthèse d'images, on utilise plutôt le terme de radiosité (*radiosity* en anglais) à la place de celui d'exitance.

La luminance est très utile pour décrire le transport de lumière entre des éléments de surface. Mais on ne peut décrire la distribution d'une source ponctuelle avec la luminance (à cause du terme en dA). C'est la raison pour laquelle on introduit l'intensité de rayonnement.

Définition 4 (intensité de rayonnement) *l'intensité de rayonnement (*intensity *en anglais) est le flux énergétique par unité d'angle solide. Si x est une source ponctuelle et $\vec{\omega}$ une direction :*

$$I(x, \vec{\omega}) = \frac{d\phi_e}{d\omega}$$

L'unité d'intensité de rayonnement est le $W\, sr^{-1}$. La distribution spatiale des intensités lumineuse d'une source ponctuelle est souvent décrite par un diagramme représentant les courbes iso-candela. Ces distributions sont mesurées à l'aide d'un goniophotomètre.

On peut facilement calculer l'éclairement sur une surface à partir de l'intensité de rayonnement (*figure 2.1, p. 22*). En effet :

$$E(\vec{\omega}) = \frac{d\phi}{dA} = \frac{I(x, \vec{\omega})\, d\omega}{dA} = \frac{I(x, \vec{\omega})\, \cos\theta}{r^2} \text{ car } d\omega = \frac{dA}{r^2} \cos\theta$$

Classiquement, on appelle la réflectance le ratio entre l'énergie réfléchie et l'énergie incidente sur un petit élément de surface ($\rho = \frac{d\phi_r}{d\phi_i}$) et la transmittance le ratio entre l'énergie transmise et l'énergie incidence sur un petit élément de surface.

Définition 5 (BRDF) *Considérons la lumière incidente à une surface dans un angle solide élémentaire de direction $\vec{\omega_i}$ et produisant un flux réfléchi dans la direction $\vec{\omega_r}$ (*figure 2.3, p. 25*). On appelle fonction de distribution de la réflectance bidirectionnelle (*bidirectional reflectance distribution function *en anglais, d'où l'acronyme BRDF), le rapport entre la luminance réfléchie dans la direction $\vec{\omega_r}$ et l'éclairement de la surface provenant de la direction $\vec{\omega_i}$:*

$$f(x, \vec{\omega_i} \to \vec{\omega_r}) = \frac{dL_r(x, \vec{\omega_r})}{dE_i(\vec{\omega_i})}$$

À partir de maintenant, pour ne pas surcharger les notations, on va s'affranchir de la notation vectorielle pour les angles solides. Or $d\phi_i(\omega_i) = L_i(x, \omega_i) \cos\theta_i \, dA \, d\omega_i$, où $d\omega_i$ est l'angle solide sous lequel on voit la source depuis dA (*figure 2.3, p. 25*). On a donc :

$$f(x, \omega_i \to \omega_r) = \frac{dL_r(x, \omega_r)}{L_i(x, \omega_i) \, \cos\theta_i \, d\omega_i}$$

Cette fonction, la BRDF, a pour unité le sr^{-1}. On remarquera que sur (*figure 2.3, p. 25*) on a introduit les coordonnées sphériques des directions ω_i et ω_r, exprimées

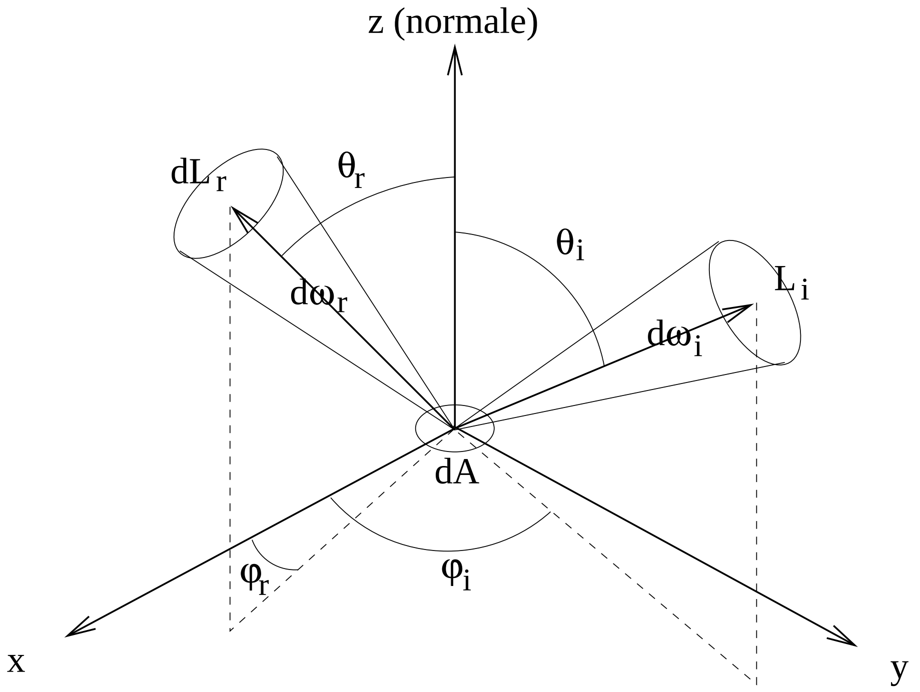

FIG. 2.3 – *géométrie de la réflexion pour la BRDF*

dans le repère local orienté par la normale à la surface. θ est l'angle zénithal, φ l'angle azimutal.

Comme la réflexion se comporte linéairement, la quantité totale de lumière réfléchie par une surface dans une direction donnée est fournie par une intégration sur la demi-sphère de toutes les directions incidentes. On obtient donc l'équation de réflectance :

Définition 6 (l'équation de réflectance)

$$L_r(x, \omega_r) = \int_{\Omega_i^+} f(x, \omega_i \to \omega_r)\, L_i(x, \omega_i)\, \cos\theta_i\, d\omega_i$$

Ω^+ représente l'hémisphère supérieur. Cette équation ne représente pas le cas le plus général possible. Elle suppose que la lumière incidence est réfléchie ponctuellement (dans certains cas, la lumière pénètre sous la surface, est réfléchie ou réfractée plusieurs fois avant de sortir en un autre point) et sans délai (pas de phosphorescence).

La réflectance bidirectionnelle vérifie une importante propriété physique, le principe de réciprocité de Helmotz :

Propriété 1 (réciprocité des BRDFs) *si f est une BRDF, on a :*

$$\forall(\omega_i, \omega_r)\; f(x, \omega_i \to \omega_r) = f(x, \omega_r \to \omega_i)$$

Ce qui nous permet de nous affranchir de la $\to$ si on le souhaite dans les notations futures. Rappelons que tout système physique doit vérifier le principe de conservation de l'énergie. Considérons alors une surface élémentaire d'aire dA contenant un point x et une direction d'incidence ω_i. D'après les définitions précédentes :

$$\begin{aligned} dE(\omega_i) &= \frac{d^2\phi_i(\omega_i)}{dA} = L_i(x, \omega_i)\, \cos\theta_i\, d\omega_i \\ \Rightarrow E(x) &= \int_{\Omega_i^+} dE(\omega_i) = \int_{\Omega_i^+} L_i(x, \omega_i)\, \cos\theta_i\, d\omega_i \end{aligned}$$

en appelant $E(x)$ l'éclairement total, pour toutes les directions incidentes, arrivant sur la surface dA au point x. De même, on peut calculer l'exitance totale, pour toutes les directions réfléchies :

$$\begin{aligned} dM(\omega_r) &= \frac{d^2\phi_r(\omega_r)}{dA} = L_r(x, \omega_r)\, \cos\theta_r\, d\omega_r \\ \text{or: } dL_r(x, \omega_r) &= f(x, \omega_i \to \omega_r)\, L_i(x, \omega_i)\, \cos\theta_i\, d\omega_i \\ \Rightarrow L_r(x, \omega_r) &= \int_{\Omega_i^+} f(x, \omega_i \to \omega_r)\, L_i(x, \omega_i)\, \cos\theta_i\, d\omega_i \\ \Rightarrow M(x) &= \int_{\Omega_r^+} \int_{\Omega_i^+} f(x, \omega_i \to \omega_r)\, L_i(x, \omega_i)\, \cos\theta_i\, \cos\theta_r\, d\omega_i\, d\omega_r \end{aligned}$$

Le principe de conservation de l'énergie signifie que le flux réfléchi par la surface dA, c'est-à-dire $d\phi_e(x) = M(x)\, dA$, doit être inférieure ou égale au flux incident $d\phi_i(x) = E(x)\, dA$. On obtient donc l'équation $M(x) \leq E(x)$ soit :

$$\frac{\int_{\Omega_r^+} \int_{\Omega_i^+} f(x, \omega_i \to \omega_r)\, L_i(x, \omega_i)\, \cos\theta_i\, \cos\theta_r\, d\omega_i\, d\omega_r}{\int_{\Omega_i^+} dE(\omega_i) = \int_{\Omega_i^+} L_i(x, \omega_i)\, \cos\theta_i\, d\omega_i} \leq 1$$

Cette équation doit être vérifiée par toute distribution de luminance L_i. En particulier, si on suppose que l'on n'envoie de l'énergie L_0 que pour une unique direction d'incidence $\omega_{i\,0}$, dont les coordonnées sphériques sont θ_0 et φ_0, on a : $L_i(x, \omega_i) = L_0\, \delta(\cos\theta_i - \cos\theta_0)\, \delta(\varphi_i - \varphi_0)$. On trouve alors l'inéquation suivante :

Propriété 2 (conservation de l'énergie pour une BRDF) *si f est une BRDF, on a :*

$$\forall\omega_i \int_{\Omega_i^+} f(x, \omega_i \to \omega_r)\, \cos\theta_r\, d\omega_r \leq 1$$

2.1.3 Photométrie

Du point de vue physique (et dans le domaine photopique), les notions de flux énergétique et de répartition spectrale suffisent pour définir une source de lumière. Du point de vue subjectif, ceci n'est pas suffisant, car notre système visuel n'a pas la même sensibilité pour toutes les longueurs d'onde du spectre visible.

Cette distinction conduit à la notion de flux lumineux et à la définition d'unités photométriques.

Définition 7 (flux lumineux) *le flux lumineux (*light power *en anglais) d'une source monochromatique de longueur d'onde λ_0 et de flux énergétique $\phi_e(\lambda_0)$ a pour expression :*

$$\phi(\lambda_0) = 680\, V(\lambda_0)\, \phi_e(\lambda_0)$$

où $V(\lambda)$ est la courbe de sensibilité relative de l'oeil humain normal moyen.

Pour une source à spectre continu, dont le flux énergétique monochromatique pour la longueur d'onde λ est $\phi_e(\lambda)$, le flux lumineux est :

$$\phi = 680 \int_0^\infty V(\lambda)\, \phi_e(\lambda)\, d\lambda$$

L'unité de flux lumineux est le lumen lm. A partir du flux lumineux, on peut définir :

- la luminance lumineuse: $L(x,\omega) = \frac{d^2\phi}{dA\, \cos\theta\, d\omega}$, dont l'unité est le $lm\, m^{-2}\, sr^-1$,
- l'éclairement lumineux: $E(x) = \frac{d\phi}{dA}$, dont l'unité est le Lux,
- l'intensité lumineuse: $I(x,\omega) = \frac{d\phi}{d\omega}$, dont l'unité est le Candela.

Pour avoir une idée des ordres de grandeur pour la luminance et l'éclairement, il faut savoir qu'un ciel d'été clair dans une zone tempérée produit un éclairement de l'ordre de 100 000 Lux, alors qu'un bureau a un éclairement de 300 à 500 Lux et qu'un clair de lune produit un éclairement de 0,5 Lux.

Une herbe sous un ciel clair a une luminance de 2900 $lm\, m^{-2}\, sr^{-1}$ et une feuille de papier blanc dans un bureau une luminance de 120 $lm\, m^{-2}\, sr^{-1}$. Enfin, l'oeil est sensible à un flux minimal de 10^{-13} lumen.

2.1.4 Perception visuelle

Une image produite par synthèse est vue par l'intermédiaire du système visuel humain. Pour ce système, la couleur perçue d'un objet est :

- indépendante de la taille de cet objet,

- indépendante de la distance entre l'objet et l'oeil, si on suppose que le milieu transmettant la lumière n'est ni absorbant, ni dispersant,
- dépendante de l'orientation de cet objet par rapport à l'oeil.

Or parmi les grandeurs physiques introduites dans le paragraphe 2.1.2 de ce chapitre, la luminance vérifie les conditions ci-dessus (la division dans la formule par dA (resp. $d\omega$) rend bien L indépendante de la surface (resp. de la distance)). On peut donc considérer que la luminance approche de très près la perception visuelle de la couleur par le système humain oeil-cerveau.

L'oeil convertit cette luminance en sensation lumineuse, mais pas de façon linéaire. La loi exprimant cette conversion est celle de Weber :

$$B = 25\, L^{\frac{1}{3}} - 17 \text{ , où } B \text{ est la réponse de l'oeil}$$

Notons que Bodman a proposé une autre formulation :

$$B = 23 \ln L - 5,5 \ln L_f - 1,6 \text{ , où } L_f \text{ est la luminance du fond}$$

La perception de la réalité est évidemment bien plus complexe que la simplification présentée ci-dessus. La couleur d'un objet peut en effet dépendre de la distance entre l'objet et l'oeil, par des effets d'échelle de la géométrie de cet objet, par son environnement lumineux, ... Toutefois, dans le cadre de la synthèse d'images, la luminance est aujourd'hui la grandeur la plus adaptée à la représentation de la couleur. Pour des explications plus avancées sur l'apparence couleur, on se reportera à [Fai98].

2.2 L'équation de rendu

L'équation de réflectance vue dans le chapitre précédent permet de calculer la distribution de lumière réfléchie en un point à partir de la distribution de la lumière incidente et de la fonction de distribution de la réflectance bidirectionnelle du matériau (BRDF). Il reste donc à calculer la distribution de la lumière incidente. Ce problème correspond à la recherche de ce qu'on appelle en synthèse d'images un modèle d'éclairement. Ces modèles sont habituellement classés en deux catégories :

- les modèles locaux, qui ne prennent en compte que les sources de lumière directe et les propriétés des surfaces,
- les modèles globaux, qui prennent en compte l'éclairement indirect.

Pour obtenir un rendu réaliste, seuls des modèles globaux sont efficaces. Il existe deux principales familles de résolution de l'équation de rendu, qui abordent le problème différemment.

- les méthodes à base d'éléments finis, qui sont basées sur une décomposition complète de la géométrie de la scène en éléments de petite taille, assez fins pour admettre que la répartition énergétique soit homogène sur leur surface. La méthode la plus célèbre est la radiosité. Elle est particulièrement adaptées aux inter-réflexions diffuses. Pour de plus amples détails, on se reportera à [SP94].

- l'équation de rendu étant une intégrale, elle peut se résoudre par une méthode de Monte-Carlo. La solution est calculée en quelques points, puis est étendue à son voisinage par des méthodes statistiques. Un cas particulier de ces méthodes est le lancer de rayons, particulièrement adapté aux réflexions spéculaires et aux réfractions . Pour de plus amples détails, on se reportera à [Gla95].

Aujourd'hui on a tendance à utiliser des méthodes mixtes, exploitant les avantages de chacune de ces deux techniques.

2.3 Propriétés des BRDFs

On a vu précédemment que les BRDFs sont des fonctions un peu particulières, puisqu'elles vérifient un certain nombre de propriétés physiques. On rappelle tout d'abord qu'une BRDF est définie de Ω^{+2} (Ω^+ étant l'hémisphère supérieur) dans $\mathbb{R}^+$, et on la notera f.

2.3.1 Réciprocité

On a déjà vu que les BRDFs vérifient le principe de réciprocité, c'est-à-dire que :

Propriété 3 (réciprocité des BRDFs)

$$\forall(\omega_i, \omega_r) \in \Omega^{+2}\ f(\omega_i, \omega_r) = f(\omega_r, \omega_i)$$

2.3.2 Conservation de l'énergie

On a aussi déjà vu que les BRDFs vérifient la conservation de l'énergie, c'est-à-dire que :

Propriété 4 (conservation de l'énergie pour une BRDF)

$$\forall\omega_i \in \Omega^+ \int_{\omega_r \in \Omega^+} f(\omega_i, \omega_r) \cos\theta_r \, d\omega_r \leq 1$$

2.3.3 Anisotropie et isotropie

Dans le cas général, une BRDF est anisotrope, c'est-à-dire que le comportement en réflexion dépend de l'orientation du matériau. C'est notamment le cas de tous les matériaux ayant subi un traitement de surface (polissage selon une direction particulière par exemple), ou des matériaux possédant naturellement une orientation (fibres du bois par exemple). Cependant, un bon nombre de matériaux sont isotropes, c'est-à-dire que leur comportement en réflexion est identique par rotation du matériau autour de sa normale.

On peut donc chercher une condition nécessaire et suffisante d'isotropie. Pour cela on va utiliser le lemme suivant :

Propriété 5 *soit $f : I\!R^2 \to I\!R$, C^1 sur son domaine de définition. Il existe $g : I\!R \to I\!R$ paire telle que $\forall (x,y) \in I\!R^2$, $f(x,y) = g(x-y)$, g étant une fonction paire, si et seulement si :*

$$\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial Y} = 0 \quad et \quad \forall (x,y) \in I\!R^2 \ \frac{\partial f}{\partial X}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial Y}(y,x)$$

En adoptant la convention suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial X} \text{ est la dérivée partielle de } f \text{ par rapport à sa première variable}$$
$$\text{et } \frac{\partial f}{\partial Y} \text{ est la dérivée partielle de } f \text{ par rapport à la seconde.}$$

Démonstration 1 *condition nécessaire :*

$$\begin{array}{c} \forall (x,y) \in I\!R^2, f(x,y) = g(x-y) = g(y-x) \\ \Rightarrow \forall (x,y) \in I\!R^2,\ \frac{\partial f}{\partial X}(x,y) = g'(x-y) = -g'(y-x) \ et\ \frac{\partial f}{\partial Y}(x,y) = -g'(x-y) = g'(y-x) \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial Y} = 0 \quad et \quad \forall (x,y) \in I\!R^2,\ \frac{\partial f}{\partial X}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial Y}(y,x) \end{array}$$

condition suffisante : soit $g : I\!R^2 \to I\!R$ telle que $\forall (x,y) \in I\!R^2$ $g(x,y) = f(x+y,y)$

$$\begin{array}{c} \frac{\partial g}{\partial Y} = \frac{\partial f}{\partial X}(x+y,y) + \frac{\partial f}{\partial Y}(x+y,y) = 0 \\ \Rightarrow g \text{ ne dépend que de sa première variable} \end{array}$$

On a donc :

$$\begin{array}{c} \forall (x,y,z) \in I\!R^3,\ g(x) = f(x+y,y) \ et\ h(x) = g(-x) = f(-x+z,z) \\ \Rightarrow \forall (x,y) \in I\!R^2 \ (avec\ z = x+y)\ g(x) = f(x+y,y) \ et\ h(x) = f(y,x+y) \\ \Rightarrow \forall (x,y) \in I\!R^2 \ g'(x) = \frac{\partial f}{\partial X}(x+y,y) = \frac{\partial f}{\partial Y}(y,x+y) = h'(x) \\ \Rightarrow \forall x, \in I\!R\ g(x) - g(0) = h(x) - h(0) \Rightarrow g = h \Rightarrow \forall (x,y) \in I\!R^2\ f(x,y) = g(x-y) = g(y-x) \end{array}$$

On peut donc en déduire la propriété suivante :

Propriété 6 (condition nécessaire et suffisante d'isotropie) *une BRDF f est isotrope, si et seulement si :*

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} = 0 \quad et \quad \forall (\omega_1, \omega_2) \in \Omega^{+2},\ \frac{\partial f}{\partial \varphi_1}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2) = \frac{\partial f}{\partial \varphi_2}(\theta_1, \varphi_2, \theta_2, \varphi_1)$$
$$\text{On peut alors écrire : } f(\omega_1, \omega_2) = f(\theta_1, \theta_2, |\varphi_1 - \varphi_2|)$$

2.4 BRDFs empiriques

Il existe un grand nombre de BRDFs empiriques. Il s'agit de modèles vérifiant bien les propriétés particulières des BRDFs, mais qui ne sont pas basés sur une réalité physique. Ces modèles sont généralement très simples à mettre en oeuvre.

2.4.1 Modèles historiques

Les premiers modèles à avoir été utilisés sont :

- le modèle de Lambert, qui considère que le matériau est parfaitement diffus (ce qui est un cas limite, qu'on ne peut atteindre physiquement). Ceci signifie que la luminance réfléchie est indépendante de la direction de réflexion :

$$f_{lambert}(x, \omega_i, \omega_r) = \frac{k_d}{\pi}$$
$$L_r(x, \omega_r) = \frac{k_d}{\pi} \int_{\omega_i \in \Omega+} L_i(x, \omega_i) \cos\theta_i \, d\omega_i = \frac{k_d}{\pi} E(\omega_i)$$

- le modèle du miroir, associé aux surfaces parfaitement spéculaires, et qui est également un cas limite. La luminance est transmise dans la direction symétrique (miroir) de la direction incidente, pondérée par le facteur de Fresnel,
- le modèle de Phong, qui a été dans le domaine de la synthèse d'images, le premier modèle d'éclairement un peu réaliste. Il a été proposé par Phong [Pho75] et légèrement modifié par Blinn [Bli77]. Ce modèle totalement empirique est celui du lobe de cosinus, présenté plus loin. Ce modèle présente l'inconvénient de ne pas être physiquement plausible (il crée de l'énergie).

2.4.2 Modèle de Ward

Ce modèle [War92b] permet de représenter des BRDFs anisotropes. Il est totalement empirique mais relativement simple. Les notations d'angles sont sur (*figure 2.4, p. 32*).

Définition 8 (modèle de Ward)

$$f_{ward}(\theta_i, \theta_r, \gamma, \phi) = \frac{\alpha_d}{\pi} + \alpha_s \frac{1}{\sqrt{\cos\theta_i \, \cos\theta_r}} \frac{1}{2\pi \, \sigma_x \, \sigma_y} e^{-\tan^2\gamma \left(\frac{\cos^2\phi}{\sigma_x^2} + \frac{\sin^2\phi}{\sigma_y^2}\right)}$$

α_d est la réflectance diffuse (un lambertien donc), α_s est la réflectance spéculaire ($\alpha_d + \alpha_s \leq 1$). σ_x est l'écart-type de la pente moyenne selon x et σ_y est l'écart-type de la pente moyenne selon y.

Les valeurs σ_x et σ_y n'ont en fait pas de véritable réalité physique, puisqu'il n'y a pas de modèle géométrique de la surface sous-jacente à cette BRDF. Dans le cas où σ_x et σ_y sont égaux, la BRDF est isotrope.

2.4.3 Modèle de Schlick

Un des principes sur lequel s'appuie ce modèle [Sch94a, Sch94b, Sch93] est le suivant : on approxime les fonctions relativement complexes apparaissant dans les modèles d'éclairement par des fractions rationnelles. L'approximation des fonctions est obtenue à partir de conditions pouvant être n'importe quelle caractéristique intrinsèque de la fonction : valeur en un point donné de la fonction ou d'une de ses dérivées, équation intégrale ou différentielle à laquelle la fonction doit satisfaire, ...

Pour définir son modèle, Schlick définit deux types de matériaux :

- les matériaux simples, ayant des propriétés optiques homogènes (métal, verre, papier, ...),
- les matériaux doubles, ayant des propriétés optiques hétérogènes (plastique, peau, surface peinte ou vernie, ...) et qui sont constitués d'une couche plus ou moins translucide reposant sur une couche opaque, chaque couche correspondant à un matériau simple.

Les notations sont sur (*figure 2.4, p. 32*). N est la normale à la surface, ω_m est la direction miroir de la direction incidente, et ω_b est la direction bissectrice entre les directions incidente et réfléchie. Schlick propose les équation suivantes :

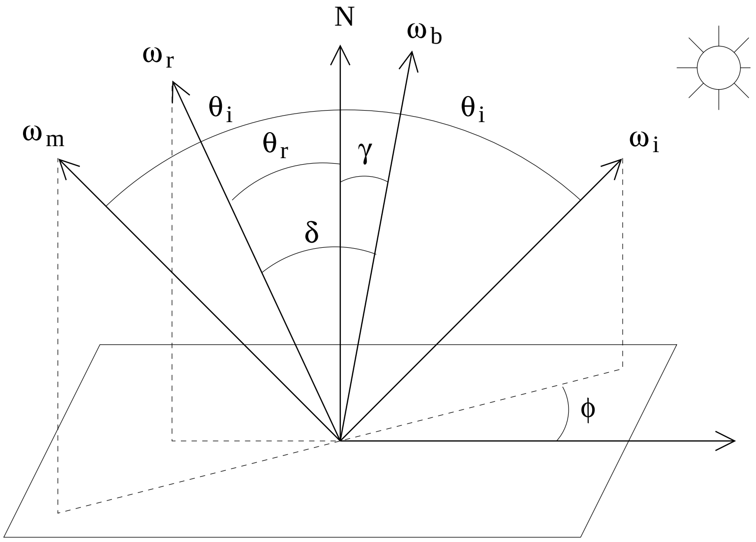

FIG. 2.4 – *géométrie pour les modèles de Ward de Schlick*

Définition 9 (modèle de Schlick) –

– *pour un matériau simple :*

$$f_{schlick}(\theta_i, \theta_r, \gamma, \delta, \phi) = S_\lambda(\delta)\, D(\theta_i, \theta_r, \gamma, \phi)$$

– *pour un matériau double :*

$$f_{schlick}(\theta_i, \theta_r, \gamma, \delta, \phi) = S_\lambda(\delta)\, D(\theta_i, \theta_r, \gamma, \phi) + (1 - S_\lambda(\delta))\, S'_\lambda(\delta)\, D'(\theta_i, \theta_r, \gamma, \phi)$$

Où S_λ est un terme spectral et D un terme directionnel.

Pour S_λ, Schlick propose :

– soit de prendre une valeur constante C_λ,

– soit d'utiliser une approximation rationnelle du terme de Fresnel :

$$S_\lambda(\delta) = C_\lambda + (1 - C_\lambda)\,(1 - \omega_b \cdot \omega_i)^5$$

Pour le terme directionnel, Schlick propose la formule :

$$D(\theta_i, \theta_r, \gamma, \phi) = \frac{a}{\pi} + \frac{b}{4\pi\,(\omega_i \cdot N)\,(\omega_r \cdot N)}\, B(\theta_i, \theta_r, \gamma, \phi) + \frac{c}{(\omega_r \cdot N)\, d\omega_r}\, \Delta$$

Avec $a + b + c = 1$ et Δ une fonction de Dirac valant 1 dans $d\omega_r$ et 0 ailleurs. Avec :

$$B(\theta_i, \theta_r, \gamma, \phi) = \frac{G(\theta_i)\, G(\theta_r)}{4\pi\,(\omega_i \cdot N)\,(\omega_r \cdot N)}\, Z(\gamma)\, A(\phi) + \frac{1 - G(\theta_i)\, G(\theta_r)}{4\pi\,(\omega_i \cdot N)\,(\omega_r \cdot N)}$$

$G(\theta) = \frac{\cos\theta}{r - r\,\cos\theta + \cos\theta}$ est une approximation du facteur d'atténuation géométrique de Smith [Smi67] (r est la rugosité de la surface, entre 0, qui signifie purement spéculaire et 1, qui signifie parfaitement diffus). On a aussi :

$$Z(\gamma) = \frac{r}{(1 + r\,\cos^2\gamma - \cos^2\gamma)^2} \text{ et } A(\phi) = \sqrt{\frac{p}{p^2 - p^2\,\cos^2\phi + \cos^2\phi}}$$

Avec p le facteur d'anisotropie, entre 0, qui signifie une complète anisotropie, et 1 qui signifie une parfaite isotropie. Ce modèle est assez intéressant, par le fait qu'il a peu de paramètres et qu'il permet de représenter pas mal de comportements différents.

2.4.4 Modèle de Lafortune

2.4.4.1 Introduction

Le modèle de Lafortune [LFTG97] est dérivé du modèle de lobe de cosinus, lui même dérivé du modèle de Phong. C'est un modèle totalement empirique, très simple mathématiquement mais qui permet de représenter la plupart des phénomènes physiques.

2.4.4.2 Le lobe de cosinus classique

Le lobe de cosinus classique, dérivé du modèle de Phong original s'écrit de la manière suivante :

$$f_{lobe}(\omega_i, \omega_r) = \rho_s \max(\cos\alpha, 0)^n$$

où α est l'angle entre la direction réfléchie ω_r et la direction miroir ω_m correspondant à la direction d'incidence ω_i. Les valeurs sont tronquées à zéro lorsque le cosinus prend des valeurs négatives, d'où la présence du max. La puissance n sert à régler la largeur du lobe. Plus n est grand, plus le lobe est étroit. Cette expression est bien positive et vérifie le principe de réciprocité. On peut voir un exemple de lobe sur (*figure 2.5, p. 34*)

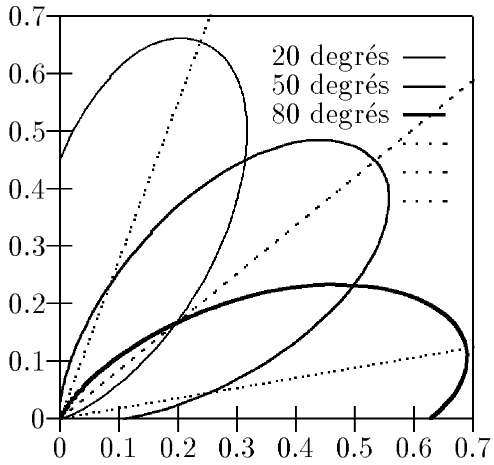

FIG. 2.5 – *lobe classique* $k_s = 1$, $f(\omega_i, \omega_r)$

On peut donc alors s'intéresser à la fraction d'énergie réfléchie par une telle BRDF. On va donc chercher à calculer l'intégrale pour un lobe :

$$r_{lobe}(\omega_i) = \rho_s \int_{\omega_r \in \Omega} \max(\omega_m \cdot \omega_r, 0)^n \max(\omega_r \cdot N, 0)\, d\omega_r$$

où N est la normale. Cette intégrale est assez difficile à calculer, à cause de la présence du max qui nous oblige à réduire le domaine d'intégration. On peut cependant la réécrire de deux manières différentes en supprimant les max :

En prenant N comme vecteur z de notre repère d'intégration :

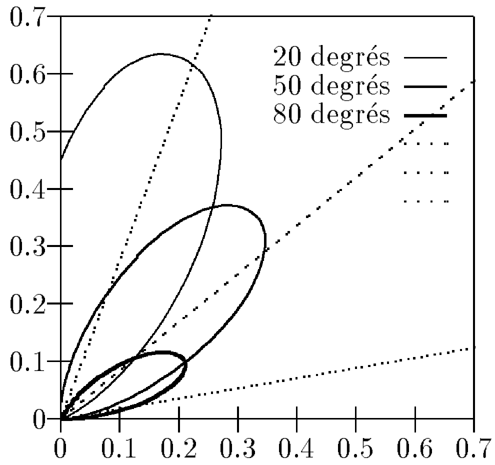

FIG. 2.6 – *lobe classique* $k_s = 1,\ f(\omega_i, \omega_r)\ \cos\theta_r$

$$
\begin{aligned}
r_{lobe}(\theta_i) &= 2\rho_s \int_{\theta_r=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=0}^{\pi} \max\left(\sin\theta_i\ \sin\theta_r\ \cos\phi + \cos\theta_i\ \cos\theta_r, 0\right)^n \cos\theta_r\ \sin\theta_r\ d\theta_r\ d\phi_r \\
&= 2\rho_s \int_{\theta_r=0}^{\frac{\pi}{2}-\theta_i} \int_{\phi=0}^{\pi} \left(\sin\theta_i\ \sin\theta_r\ \cos\phi + \cos\theta_i\ \cos\theta_r\right)^n \cos\theta_r\ \sin\theta_r\ d\theta_r\ d\phi_r + \\
2\rho_s & \int_{\theta_r=\frac{\pi}{2}-\theta_i}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=0}^{\pi-\cos^{-1}(\cot\theta_i\ \cot\theta_r)} \left(\sin\theta_i\ \sin\theta_r\ \cos\phi + \cos\theta_i\ \cos\theta_r\right)^n \cos\theta_r\ \sin\theta_r\ d\theta_r\ d\phi_r
\end{aligned}
$$

En prenant ω_i comme vecteur z de notre repère d'intégration :

$$
\begin{aligned}
r_{lobe}(\theta_i) &= 2\rho_s \int_{\theta_r=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=0}^{\pi} \cos^n\theta_r\ \max\left(\sin\theta_i\ \sin\theta_r\ \cos\phi + \cos\theta_i\ \cos\theta_r, 0\right) \sin\theta_r\ d\theta_r\ d\phi_r \\
&= 2\rho_s \int_{\theta_r=0}^{\frac{\pi}{2}-\theta_i} \int_{\phi=0}^{\pi} \cos^n\theta_r\ \left(\sin\theta_i\ \sin\theta_r\ \cos\phi + \cos\theta_i\ \cos\theta_r\right) \sin\theta_r\ d\theta_r\ d\phi_r + \\
2\rho_s & \int_{\theta_r=\frac{\pi}{2}-\theta_i}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=0}^{\pi-\cos^{-1}(\cot\theta_i\ \cot\theta_r)} \cos^n\theta_r\ \left(\sin\theta_i\ \sin\theta_r\ \cos\phi + \cos\theta_i\ \cos\theta_r\right) \sin\theta_r\ d\theta_r\ d\phi_r
\end{aligned}
$$

Ces deux expressions ne peuvent être calculées totalement de façon analytique (notamment à cause des $\cos^{-1}$ et surtout à cause du fait que n n'est pas forcément un entier) dans le cas général, bien qu'il existe des techniques pour le faire [Arv95]. Toutefois on peut calculer les valeurs extrêmes (pour $\theta_i = 0$ et $\theta_i = \frac{\pi}{2}$). De plus, entre ces deux valeurs, la fraction réfléchie décroît.

$$
\begin{aligned}
r_{lobe}(0) &= 2\rho_s \int_{\theta_r=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=0}^{\pi} \cos^n\theta_r\ \cos\theta_r\ \sin\theta_r\ d\theta_r\ d\phi_r = \rho_s \frac{2\pi}{n+2} \\
r_{lobe}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2\rho_s \int_{\theta_r=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\theta_r\ \cos\phi\right)^n \cos\theta_r\ \sin\theta_r\ d\theta_r\ d\phi_r = \rho_s \frac{2}{n+2} \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\phi\, d\phi
\end{aligned}
$$

De plus, on peut écrire une très bonne approximation de ce facteur par :

$$r_{lobe}(\theta_i) \approx r_{lobe}(0)\, \cos\theta_i + r\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{2\,\theta_i}{\pi}\right)^n$$

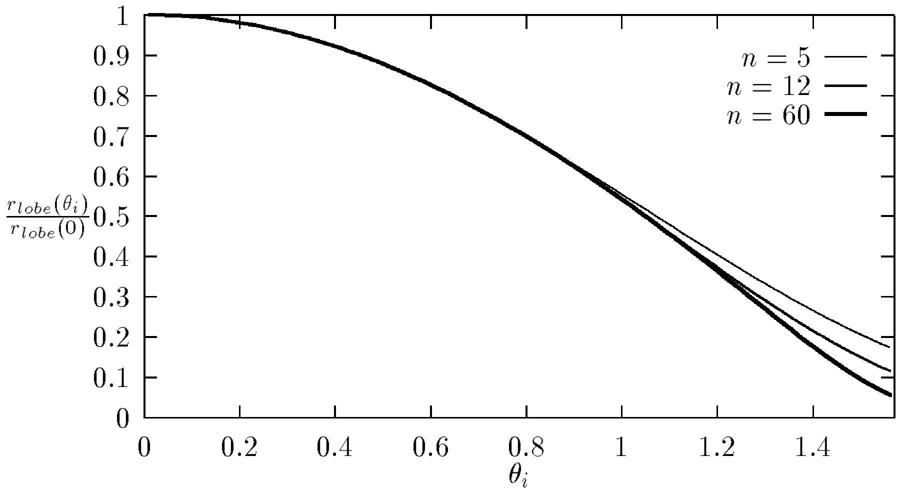

FIG. 2.7 – *facteur de réflexion d'un lobe classique pour différentes incidences*

On se reportera à (*figure 2.7, p. 36*) pour voir la comparaison entre les deux. On peut donc en déduire la condition de normalisation pour que la BRDF vérifie la conservation de l'énergie (la facteur de réflexion doit être inférieur ou égal à 1) qui est :

$$\rho_s \frac{2\pi}{n+2} \leq 1 \Rightarrow \rho_s \leq \frac{n+2}{2\pi}$$

On peut alors réécrire la BRDF de la manière suivante :

$$f_{lobe}(\omega_i, \omega_r) = k_s \frac{n+2}{2\pi} \max\left(\cos\alpha, 0\right)^n \text{ avec } k_s \in [0;1]$$

Ce type de lobe possède un inconvénient majeur. En effet, dans la réalité, l'intensité du pic spéculaire (c'est-à-dire le maximum de $f_{lobe}(\omega_i, \omega_r)\cos\theta_r$, voir (*chapitre 3, p. 47*)), va en croissant (les matériaux ont tendance à se comporter comme des miroirs pour les incidences rasantes), or ce type de lobe a une intensité en $\rho_s \cos\theta_r$ qui va donc en diminuant pour les incidences rasantes (*figure 2.6, p. 35*), à l'inverse de la réalité. C'est pourquoi on va introduire des lobes généralisés.

2.4.4.3 Modèle à lobes généralisés

On va réécrire l'expression de notre lobe f_{lobe} en utilisant des notations matricielles (que l'on différencie des notations vectorielles, notées ici avec $\rightarrow$). La notation

${}^tM$ correspond à la transposée matricielle. On va donc considérer que ω_i, ω_r, ω_m et n sont des vecteurs colonnes à trois dimensions. On peut écrire (en s'affranchissant temporairement, pour une lisibilité accrue, du max) :

$$\omega_m = 2\,(\vec{\omega_i}\cdot\vec{n})\,\vec{n} - \vec{\omega_i} = 2\,({}^tn\,\omega_i)\,n - \omega_i = 2\,n\,{}^tn\,\omega_i - \omega_i = (2\,n\,{}^tn - I)\,\omega_i$$

$$\begin{aligned} f_{lobe}(\omega_i,\omega_r) &= \rho_s\,(\omega_m\cdot\omega_r)^n \\ &= \rho_s\left({}^t\omega_m\,\omega_r\right)^n \\ &= \rho_s\left({}^t\omega_i\,(2\,n\,{}^tn - I)\,\omega_r\right)^n \\ &= \rho_s\left({}^t\omega_i\,M\,\omega_r\right)^n \end{aligned}$$

L'idée est donc de remplacer M par une matrice quelconque. Cette matrice devra tout de même satisfaire le critère de réciprocité (donc $M = {}^tM$) et devra permettre la conservation de l'énergie. On va remplacer M par une matrice diagonale, par un changement de repère. Le repère associé à cette transformation va avoir ses axes alignés avec la normale de la surface (z) et dans la plupart des cas d'anisotropie, alignés avec les directions principales (x et y). On peut alors réécrire notre lobe :

$$f'_{lobe}(\omega_i,\omega_r) = \rho_s \max\left(C_x\,x_i\,x_r + C_y\,y_i\,y_r + C_z\,z_i\,z_r, 0\right)^n$$
$$\omega_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad \omega_r = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix}$$

ω_i et ω_r ont leurs coordonnées exprimées dans le repère propre de la matrice M. C_x, C_y, C_z sont les coefficients diagonaux de la matrice. A noter que l'on retrouve le lobe classique avec les valeurs $-1,-1,1$. Il rous reste à nous assurer que notre BRDF vérifie bien le principe de conservation de l'énergie. On écrit :

$$\begin{aligned} f'_{lobe}(\omega_i,\omega_r) &= \rho_s\left({}^t\omega_i\,M\,\omega_r\right)^n \\ &= \rho_s||{}^t\omega_i M||^n\left(\frac{{}^t\omega_i\,M}{||{}^t\omega_i\,M||}\,\omega_r\right)^n \\ &= \rho_s||{}^t\omega_i M||^n\left(\frac{M\,\omega_i}{||M\,\omega_i||}\cdot\omega_r\right)^n \\ &= \rho'_s(\omega_i)\,\cos^n\alpha' \end{aligned}$$

On se retrouve donc avec le produit d'une constante de normalisation dépendant de l'incidence et d'un lobe classique unitaire. Ce que l'on constate d'interessant, c'est que l'on a à la fois en orientation (la direction privilégiée n'est plus ω_m) et en échelle (le facteur de normalisation dépend de l'incidence), tout en respectant le principe de réciprocité, ce que l'on n'aurait pas pu avoir en choisissant une direction ω_m imposée en fonction de ω_i. Les deux phénomènes peuvent être observés sur (*figure 2.8, p. 38*) et (*figure 2.9, p. 39*). Par contre les deux phénomènes (off-spécularité et changement d'échelle de la BRDF) sont liés et ne peuvent être réglés indépendamment. Étant donné que l'on a la liberté de fixer ρ_s et C_x, C_y, C_z, on peut très bien changer l'échelle de ces derniers de façon à faire disparaître ρ_s. On se retrouve alors avec une BRDF et un facteur de réflexion valant :

$$\begin{aligned} f'_{lobe}(\omega_i,\omega_r) &= \max\left(C_x\, x_i\, x_r + C_y\, y_i\, y_r + C_z\, z_i\, z_r, 0\right)^n \\ r'_{lobe}(\omega_i) &= \sqrt{C_x^2 x_i^2 + C_y^2 y_i^2 + C_z^2 z_i^2}^{\,n}\; r_{lobe}\left(\cos^{-1}\left(\frac{C_z z_i}{\sqrt{C_x^2 x_i^2 + C_y^2 y_i^2 + C_z^2 z_i^2}}\right)\right) \end{aligned}$$

Ce qui fait qu'il est impossible de déterminer, a priori, une condition de normalisation. En effet, il faudrait être capable de calculer analytiquement le maximum de cette fonction, et s'assurer qu'il est bien inférieur à 1.

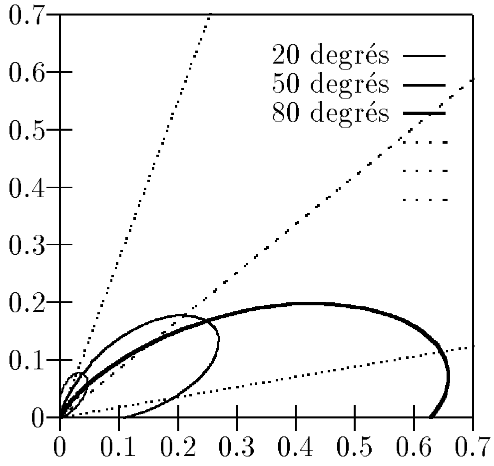

FIG. 2.8 – *lobe généralisé* $C_x = C_y = -1$, $C_z = 0.7$, $f(\omega_i, \omega_r)$

2.4.4.4 Utilisation

2.4.4.4.1 Définition On peut donc maintenant utiliser une somme de ces lobes généralisés afin de simuler des comportements plus complexes. Nous allons aussi étudier l'influence des différents paramètres sur la forme de la BRDF. On va donc exprimer la forme générale de notre BRDF :

Définition 10 (BRDF à lobes généralisés) *on définit une BRDF à l lobes généralisés de la manière suivante :*

$$f(\omega_i,\omega_r) = \rho_d + \sum_{m=1}^{l} \max(C_{x_m}\, x_i\, x_r + C_{y_m}\, y_i\, y_r + C_{z_m}\, z_i\, z_r, 0)^{n_m}$$

ρ_d étant la composante diffuse. f vérifie les principes de réciprocité et de positivité. Pour ce qui est de la conservation de l'énergie, elle peut être vérifiée a posteriori.

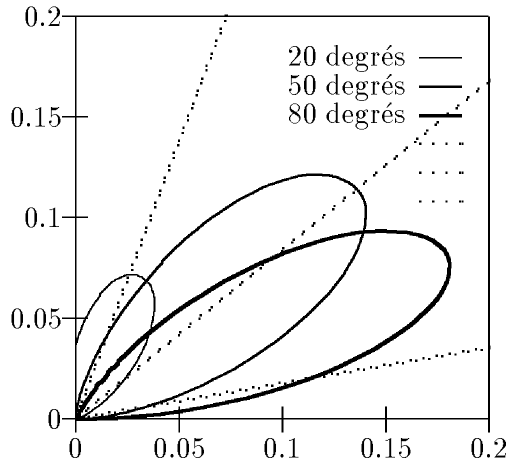

FIG. 2.9 – *lobe généralisé* $C_x = C_y = -1,\ C_z = 0.7,\ f(\omega_i, \omega_r)\cos\theta_r$

2.4.4.4.2 Valeurs des paramètres Les paramètres C_x et C_y règlent l'anisotropie, lorsqu'ils sont différents. De plus, lorsqu'ils sont négatifs, le lobe est plutôt un lobe dans la direction miroir, alors que, quand ils sont positifs, le lobe est du côté de la rétro-réflexion. Le rapport C_z sur C_x et C_y indique lui l'off-spécularité (plus il est petit, plus le lobe est off-spéculaire, et plus son intensité croît rapidement pour les incidences rasantes).

2.4.4.4.3 Obtention à partir de données mesurées L'obtention des différents paramètres à partir de données réelles ne peut se faire que par un calage de données. Il faut donc déterminer à l'avance le nombre de lobes (à observer sur des représentations graphiques des données), et mettre en oeuvre un algorithme de calage de données (comme celui de Levenberg-Marquardt).

2.4.4.4.4 Exemple Un exemple de BRDF, calée sur une BRDF réelle par Lafortune prend les valeurs suivantes :

lobe	$C_x = C_y$	C_z	n
I	0.86	0.77	18.6
II	-0.41	0.018	2.58
III	-1.03	0.70	63.8
diffus	0.13		

On retrouve la BRDF sur (*figure 2.10, p. 40*) et son coefficient de réflexion sur (*figure 2.11, p. 40*). Cette BRDF a trois lobes. Le premier est un lobe de rétro-reflexion (C_x et C_y positifs) alors que les deux autres lobes sont des lobes spéculaires.

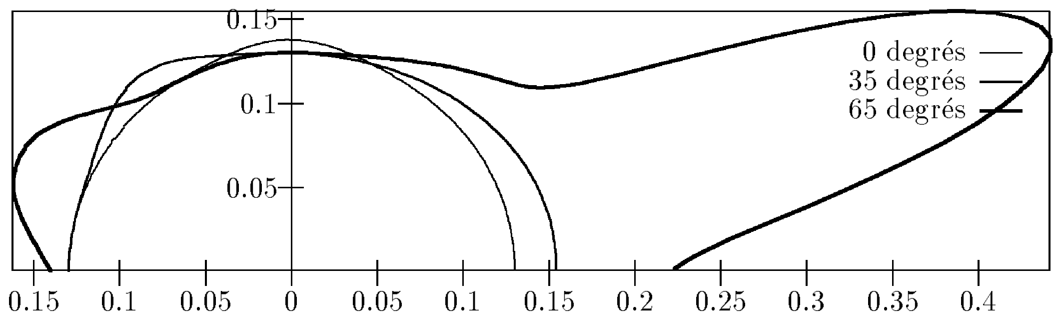

FIG. 2.10 – *exemple de BRDF à base de lobes généralisés*

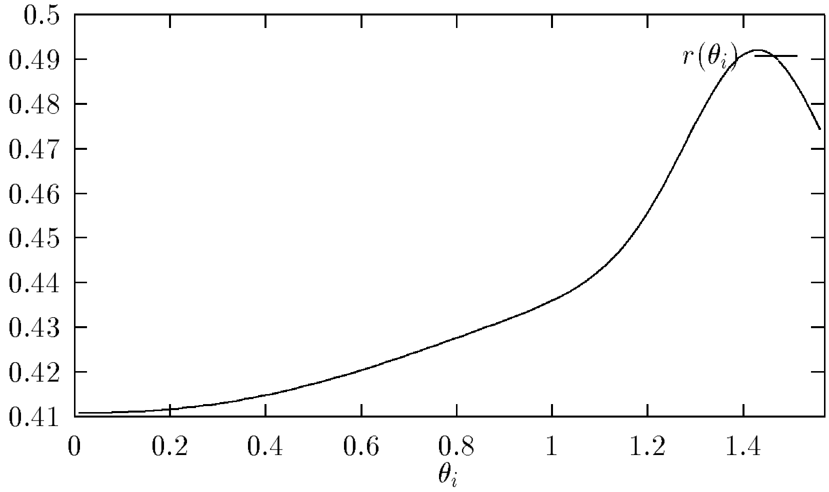

FIG. 2.11 – *facteur de réflexion pour une BRDF à base de lobes généralisés*

2.4.4.4.5 Simulation de Monte-Carlo On cherche à effectuer un tirage de Monte-Carlo par rapport à une BRDF à base de lobes généralisés. On veut donc, pour ω_i la direction incidence fixée, calculer (voir (*chapitre B, p. 165*)) :

$$p(\omega_i \to \omega_r) = \frac{f(\omega_i, \omega_r)\, d\omega_r}{\int_{\omega'_r \in \Omega^+} f(\omega_i, \omega_r)\, d\omega'_r}$$
$$\text{et } e(\omega_i \to \omega_r) = \cos\theta_r \int_{\omega'_r \in \Omega^+} f(\omega_i, \omega_r)\, d\omega'_r$$

Pour le calcul de p on va s'affranchir du fait que la BRDF est définie uniquement sur Ω^{+2}. On réitèrera le tirage jusqu'à ce que la direction réfléchie ω_r soit dans Ω^+. Les probabilités de se situer dans la partie diffuse et les lobes généralisés sont proportionnelles à :

$$
\begin{aligned}
P_{diffus}(\omega_i) &= \int_{\omega'_r \in \Omega^+} \rho_d \, d\omega'_r = 2\pi \, \rho_d \\
P_{lobe_m}(\omega_i) &= \int_{\omega'_r \in \Omega^+} f_{lobe_m}(\omega_i, \omega'_r) \, d\omega'_r \\
&= \sqrt{C_{x_m}^2 x_i^2 + C_{y_m}^2 y_i^2 + C_{z_m}^2 z_i^2}^{\,n_m} \int_{\theta'_r=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \cos^{n_m} \theta'_r \sin \theta'_r \, d\theta'_r \, d\varphi'_r \\
&= \sqrt{C_{x_m}^2 x_i^2 + C_{y_m}^2 y_i^2 + C_{z_m}^2 z_i^2}^{\,n_m} \frac{2\pi}{n_m + 1}
\end{aligned}
$$

Il ne reste plus qu'à normaliser ces probabilités discrètes en les divisant par les sommes de P_{diffus} et de tous les P_{lobe_m}. Ensuite, si on est dans le diffus, le tirage est uniforme dans toutes les directions de Ω. Dans un lobe particulier m, on tire une direction ω_r telle que :

$$
\omega_r \cdot \frac{1}{\sqrt{C_{x_m}^2 x_i^2 + C_{y_m}^2 y_i^2 + C_{z_m}^2 z_i^2}} \begin{pmatrix} C_{x_m} \, x_i \\ C_{y_m} \, y_i \\ C_{z_m} \, z_i \end{pmatrix} = \lambda^{n_m}
$$

λ étant une variable uniforme sur $[0;1]$. Si la direction tirée ω_r n'est pas dans Ω^+, on réitère le tirage. Pour le calcul de $e(\omega_i \to \omega_r)$ on se retrouve avec :

$$
e(\omega_i \to \omega_r) = 2\pi \left(\rho_d + \sum_{m=1}^{l} \frac{\sqrt{C_{x_m}^2 x_i^2 + C_{y_m}^2 y_i^2 + C_{z_m}^2 z_i^2}^{\,n_m}}{n_m + 1} \right)
$$

2.4.5 Conclusion

Les modèles empiriques présentés précédemment ont l'inconvénient d'avoir des paramètres qui n'ont pas d'existence physique. C'est-à-dire que si l'on observe un matériau réel, on ne sera pas en mesure de déterminer quels paramètres on devra utiliser dans ces modèles pour avoir une BRDF analytique ressemblant le plus possible à celle du matériau. Pourtant, on est souvent capable de faire des mesures physiques sur le matériau (indice de réfraction, relevé de sa micro-géométrie, ...), et on aimerait utiliser directement ces informations pour les utiliser dans un modèle ayant une base physique.

Il existe beaucoup d'autres modèles, puisqu'à chaque utilisation particulière on doit adapter un modèle. Au niveau des modèles anisotropes, on peut citer [Kaj85] qui propose un modèle basé sur l'électromagnétisme et [PF90] qui propose un modèle à partir d'un modélisation de la micro-géométrie de la surface par de petits cylindres.

2.5 BRDF basées sur l'optique géométrique

2.5.1 Introduction

Nous n'allons pas exposer dans le détail le modèle de Torrance-Sparrow. Ce modèle est le premier modèle théorique de réflectivité à avoir été introduit dans le domaine de la synthèse d'images par Cook et Torrance [CT81]. Il est basé sur des travaux réalisés par Torrance et Sparrow [TS67] sur la réflexion lumineuse sur des surfaces rugueuses dans le cadre de l'optique géométrique.

2.5.2 Hypothèses

Ce modèle suppose que la rugosité de la surface est isotrope. Il suppose aussi que la surface est décrite à l'aide de micro-facettes se comportant comme des miroirs parfaits. De plus, ces micro-facettes vérifient les hypothèses suivantes :

- chaque micro-facette consiste en un côté d'une rainure symétrique en V,
- l'axe longitudinal de la rainure est parallèle au plan de la surface moyenne,
- toutes les orientations azimutales de l'axe longitudinal des rainures sont supposées également probables,
- toutes les micro-facettes ont la même aire,
- les effets de masquage et d'ombrage n'ont lieu qu'à l'intérieur des rainures (cette hypothèse équivaut à dire que les arêtes supérieures des rainures sont dans un même plan,
- seule la première réflexion d'un rayon incident est ajoutée au flux réfléchi spéculairement,
- toutes les réflexions multiples sont supposées parfaitement diffuses.

La géométrie de la surface correspondant à ces hypothèses est représentée sur (*figure 2.12, p. 43*).

2.5.3 Expression

L'expression obtenue est :

Définition 11 (modèle de Torrance-Sparrow)

$$f_{tor-spa}(\omega_i, \omega_r) = \frac{k_d}{\pi} + \frac{k_s}{4\pi\,(\omega_i \cdot N)\,(\omega_r \cdot N)}\,P(\gamma)\,F(\delta, n)\,G(\omega_i, \omega_r)$$

k_d est la proportion de réflexion diffuse, k_s la proportion de réflexion spéculaire ($k_d + k_s \leq 1$). $P(\gamma)$ est la distribution de probabilité des pentes des micro-facettes. $F(\delta, n)$ est

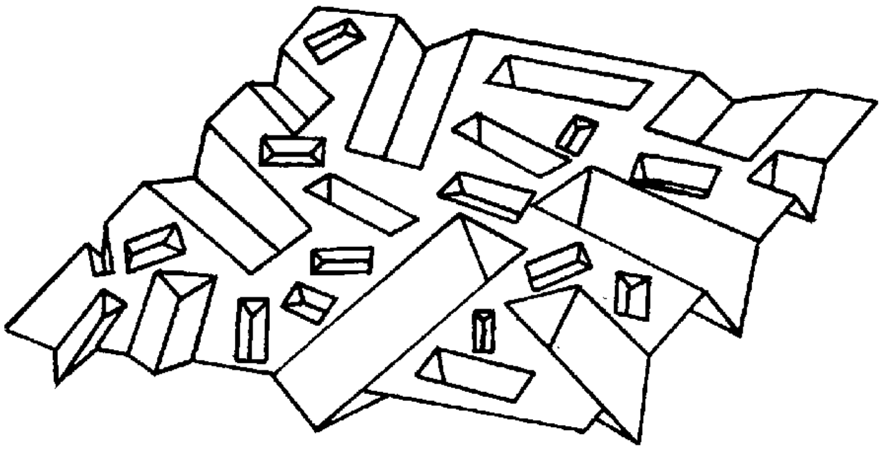

FIG. 2.12 – *géométrie de la surface dans le modèle de Torrance-Sparrow*

le facteur de Fresnel (n est l'indice de réfraction des micro-facettes). $G(\omega_i, \omega_r)$ *est un facteur d'atténuation géométrique.*

Il existe plusieurs types de distributions de probabilités des pentes des micro-facettes. La plus connue est celle de Beckman [Bec65] qui vaut :

$$P(\gamma) = \frac{1}{m^2 \cos^4 \gamma}\, e^{-\left(\frac{\tan \gamma}{m}\right)^2}$$

m caractérise la rugosité de la surface. Pour ce qui est du facteur d'atténuation (résultat du masquage et de l'ombrage de la surface), on adopte l'expression suivante (qui est démontée par Torrance et Sparrow grâce aux hypothèses rappelées dans (*paragraphe 2.5.2, p. 42*)) :

$$G(\omega_i, \omega_r) = \min\left(1, 2\,\frac{(\omega_b \cdot N)\,(N \cot \omega_r)}{\omega_b \cdot \omega_r}, 2\,\frac{(\omega_b \cdot N)\,(N \cot \omega_i)}{\omega_b \cdot \omega_i}\right)$$

Où N est la normale à la surface.

2.6 BRDF basées sur l'optique physique

Nous allons maintenant nous intéresser à un modèle basé sur l'optique physique, c'est-à-dire sur la réflexion des ondes électromagnétiques sur une surface rugueuse. Ce modèle a pour ambition de fournir l'énergie réfléchie par un matériau pour toutes les directions, tant d'incidence que d'observation et pour tous les types de matériaux. Ce modèle utilise l'approximation de Kirchhoff et repose sur les travaux de Beckmann [BS63], Embrechts [Emb94] et He, Sillion, Torrance et Greenberg [HTSG91].

Nous n'allons pas détailler le calcul, fort complexe, de ce modèle. Nous allons juste exposer les hypothèses faites et le résultat obtenu. On suppose que :

- l'onde électromagnétique incidente est plane et monochromatique,
- la distance entre le point récepteur de l'onde réfléchie et la surface rugueuse est grande par rapport aux dimensions de la surface, elles-mêmes grandes par rapport à la longueur d'onde,
- le milieu sous la surface de réflexion est homogène, linéaire et isotrope,
- l'amplitude des irrégularités de surface est une variable aléatoire de distribution normale, de moyenne 0 et de variance σ^2, avec une auto-corrélation de distance T,
- le rayon de courbure local de la surface et la distance de corrélation T sont grands par rapport à la longueur d'onde,
- les effets d'ombrage d'un élément de surface sur ses voisins sont négligés.

Le modèle complet obtenu est la somme de trois termes : une composante spéculaire, une composante directionnelle diffuse et une composante diffuse uniforme. L'expression complète fait apparaître beaucoup de termes, et notamment une somme infinie. Les paramètres que l'on obtient finalement sont :

- l'indice de réfraction (qui peut être complexe),
- la fraction de réflexion spéculaire (ρ_s),
- la fraction de réflexion directionnelle diffuse (ρ_{dd}),
- la fraction de réflexion diffuse uniforme (ρ_{ud}),,
- la rugosité de la surface, qui est $\frac{T}{\sigma}$.

Ce modèle est le modèle analytique le plus proche de la réalité physique. Il est a priori capable de gérer tous les types de surfaces respectant ces hypothèses de base. Mais on verra malheureusement, que toutes les surfaces n'ont pas une distribution Gaussienne des hauteurs, et donc qu'il n'est pas un modèle universel.

Dans le cas général, ce modèle est valable pour une lumière incidente polarisée. Cependant, son expression reste quand même très complexe même dans le cas de la lumière non polarisée. Sans entrer dans le détail des équations on peut écrire (en s'affranchissant du terme purement spéculaire, qui est un dirach) :

$$f_{htsg}(\omega_i, \omega_r) = \rho_{ud} + \rho_{dd} \frac{|F|^2}{\pi} \cdot \frac{G \cdot S \cdot D}{\cos\theta_i \, \cos\theta_r}$$

où $|F|^2$ est le facteur de réflexion de Fresnel pour le vecteur bissecteur de ω_i et ω_r (dépendant aussi de l'indice de réfraction), G un facteur géométrique (dépendant uniquement de ω_i et ω_r), S la fonction de masquage / ombrage, et D une somme infinie permettant de calculer le terme directionnel diffus. Pour une expression complète du modèle et un détail de toutes les équations, on consultera [HTSG91].

Chapitre 3

Quelques données expérimentales

3.1 Représentation

Toutes les représentations de BRDF pour une incidence fixée montrent en fait le produit de la BRDF avec le cosinus de l'angle entre la direction réfléchie et la normale (valeur utilisée dans le rendu, et permettant de s'affranchir des problèmes d'imprécisions de mesure dans les directions rasantes).

Nous allons essayer d'associer chaque BRDF à une série d'images tests mettant en valeur leurs comportements particuliers.

3.2 Bases de données

3.2.1 Goniophotomètre du LCPC

Le principe de fonctionnement du goniophotomètre du LCPC est détaillé dans le chapitre consacré au goniophotomètre virtuel (*chapitre 5, p. 69*).

Les mesures faites sont destinées à la simulation d'éclairage de routes. Les BRDFs mesurées sont donc essentiellement celles de revêtements routiers.

Les données sont des BRDFs isotropes, sans dimension spectrale.

3.2.2 Columbia-Utrecht (CUReT)

3.2.2.1 Introduction

L'expérience a été menée afin d'analyser le comportement diffus d'un certain nombre de matériaux, dans le but de valider un modèle analytique de BRDF diffuse [ON94]. Étant donné cet objectif, on se retrouve avec une base de données bien particulière, c'est-à-dire avec des matériaux non classiques (et aussi différents que de la peau humaine ou des végétaux) et avec un nombre de mesures par échantillon assez faible (puisque l'on s'intéresse essentiellement à des comportements diffus). De plus, la plupart des matériaux (à l' exception de trois d'entre eux) sont isotropes, les mesures sont ainsi faites avec une seule orientation de l'échantillon analysé (deux directions, une dans chaque direction privilégiée dans le cas des matériaux anisotropes). Les mesures sont disponibles à `http://www.cs.columbia.edu/CAVE/curet`.

3.2.2.2 Présentation du dispositif

Très rapidement, on peut dire que le dispositif est constitué d'une source de lumière fixe, d'une caméra pouvant être amenée dans 7 positions différentes, et d'un échantillon pouvant être orienté librement par inclinaison de son plateau porteur. De manière simplifiée on peut décrire le dispositif de la manière suivante (*figure 3.1, p. 48*).

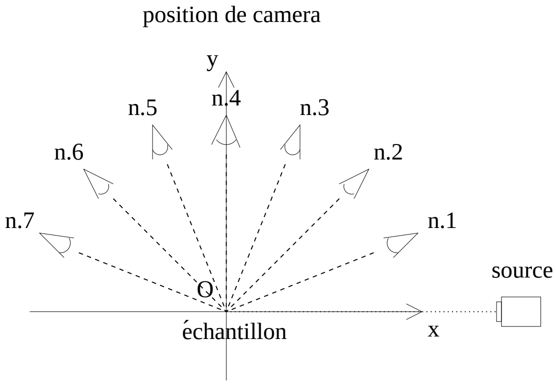

FIG. 3.1 – *CUReT, position de la source et de la caméra*

La caméra se situe dans le plan Oxy avec 7 positions différentes, espacées de $22,5^o$. La source de lumière est fixe, sur l'axe x, dirigée vers le point O où se trouve l'échantillon.

L'échantillon (*figure 3.2, p. 49*) est défini par sa normale n se situant dans l'hémisphère supérieur (l'isotropie est donc supposée, puisque l'on ne s'intéresse pas à l'angle de rotation autour de cette normale). Les paramètres de mesure sont donc $c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, la position de la caméra, et n la normale de l'échantillon. Pour chaque position de caméra, la normale ne peut prendre que des valeurs telles que l'échantillon soit à la fois visible depuis la source et la caméra. En considérant des directions sortantes et normalisées par rapport à l'échantillon, on peut écrire :

$$\underset{\text{normale}}{n = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{source}}{\omega_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{caméra } c \in \{1,2,3,4,5,6,7\}}{\omega_r = \begin{pmatrix} \cos\frac{c\pi}{8} \\ \sin\frac{c\pi}{8} \\ 0 \end{pmatrix}}$$

On doit donc avoir :

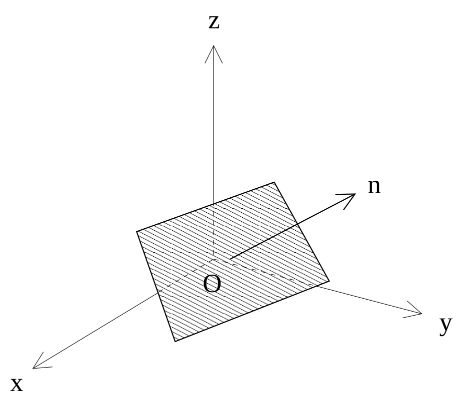

FIG. 3.2 – *CUReT, orientation de l'échantillon*

$$\begin{array}{lcl} \omega_i \cdot n \geq 0 & \Rightarrow & n_x \geq 0 \\ \omega_r \cdot n \geq 0 & \Rightarrow & \cos \dfrac{c\pi}{8}\, n_x + \sin \dfrac{c\pi}{8}\, n_y \geq 0 \end{array}$$

Ce qui nous donne les orientations possibles de la normale pour chaque position de la caméra (*figure 3.3, p. 49*).

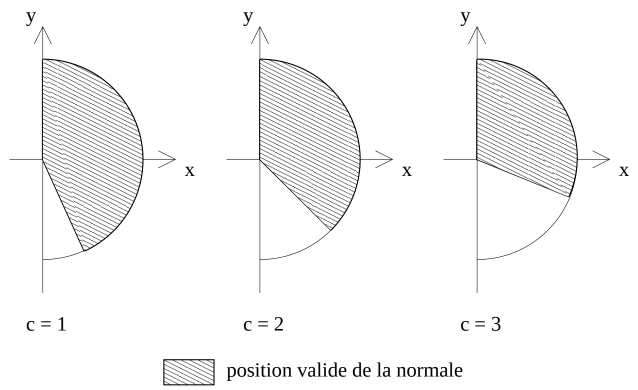

FIG. 3.3 – *CUReT, orientations possibles des normales suivant la caméra*

De manière pratique, les mesures sont effectuées pour une normale située dans une zone éclairée et se situant sur un octaèdre de niveau 3 (*chapitre A, p. 153*), limité à la partie située dans $x \geq 0$ et $z \geq 0$, qui a donc 81 sommets (*figure 3.4, p. 50*). L'expérience est aussi conditionnée par des limites matérielles, donc certains sommets rasants ne peuvent être atteints : on a donc au final 205 mesures (couples de directions) réparties de la manière suivante :

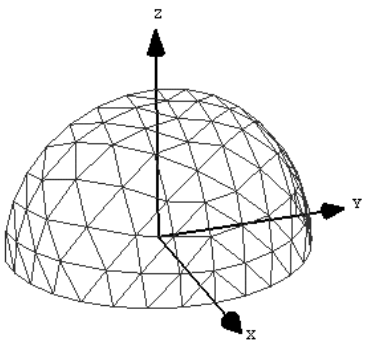

FIG. 3.4 – *CUReT, position des normales de l'échantillon*

caméra	1	2	3	4	5	6	7
sommets visibles	55	50	41	30	21	12	4

De manière pratique, pour retrouver une valeur particulière de la BRDF pour un couple de directions donnés (c'est-à-dire trouver le numéro de caméra et la normale dans l'octaèdre), il suffit d'utiliser la conservation des produits scalaires (on se contente de faire un changement de repère). Pour des vecteurs quelconques normés $\bar{n}, \bar{\omega_i}, \bar{\omega_r}$ données, représentant les paramètres d'évaluation de la BRDF on a :

$$\begin{array}{ll} \bar{\omega_i} \cdot \bar{n} = \omega_i \cdot n = n_x & \text{d'où } n_x \\ \bar{\omega_i} \cdot \bar{\omega_r} = \omega_i \cdot \omega_r = \cos \frac{c\pi}{8} & \text{d'où } c \\ \bar{\omega_r} \cdot \bar{n} = \omega_r \cdot n = \cos \frac{c\pi}{8} n_x + \sin \frac{c\pi}{8} n_y & \text{d'où } n_y \end{array}$$

3.2.2.3 Présentation des échantillons

Voici la liste des échantillons disponibles dans cette base de données. Ils nous seront très utiles, d'une part pour valider notre méthode de recomposition de BRDF, mais aussi pour utiliser directement dans le goniophotomètre virtuel.

feutre	polyester	tissu éponge	plastique rugueux
cuir	papier de verre	velours	galets
verre dépoli	plâtre a	plâtre b	papier rugueux
herbe artificielle	bardeaux	papier aluminium	liège
dalle rugueuse	carpette a	carpette b	polystyrène expansé
éponge	laine d'agneau	feuille de laitue	fourrure de lapin
dalle de marbre	luffa	isolant	papier froissé
polyester zoomé	plâtre b zoomé	papier rugueux zoomé	bardeaux zoomé
ardoise a	ardoise b	sphères peintes	calcaire
brique a	papier côtelé	peau humaine	paille
brique b	velours côtelé	cristaux de sel	toile de lin
béton a	coton	pierres	pain noir
béton b	béton c	balle de maïs	pain blanc
soleirolia	bois a	peau d'orange	bois b
plume de paon	écorce d'arbre	biscuit a	biscuit b
mousse			

3.2.3 Base de données de Cornell

Cette base de données fournit des mesures de BRDFs, toujours isotropes. Les données disponibles sont spectrales et concernent beaucoup de peintures métallisées. Les mesures sont disponibles sur `http://www.graphics.cornell.edu/online/measurements/`.

3.2.4 Autres bases de données

De plus en plus de mesures de BRDFs sont effectuées aujourd'hui, le plus souvent guidées par un objectif bien particulier. On peut citer par exemple :

- NIST (National Institute of Standards and Technology) qui travaille sur une étude visant à améliorer la science des mesures de propriétés optiques en réflexion des matériaux `http://ciks.cbt.nist.gov/appearance/`,

- différentes études sur les BRDFs à grande distance (par exemple la BRDF d'une forêt), destinées à l'analyse d'images satellites, ...

3.3 Quelques exemples

3.3.1 Paramètres

Nous allons étudier quelques BRDFs expérimentales, afin de voir à quoi elles peuvent ressembler. En plus d'une représentation visuelle de la fonction, on va chercher à extraire un certain nombre de paramètres des données dont on dispose. On va se limiter ici à des BRDFs isotropes notées F, de manière à pouvoir réduire la direction incidente (ω_i) à un angle unique (θ_i). Les paramètres que l'on va isoler sont :

- le facteur de réflexion r,
- l'intensité de la réflexion ρ_c,
- la composante diffuse ρ_d.

3.3.1.1 Facteur de réflexion

Le facteur de réflexion correspond, pour une incidence donnée et fixée, à la fraction d'énergie réfléchie dans toutes les directions. On a :

$$r(\omega_i) = \int_{\Omega+} F(\omega_i, \omega_r) \cos\theta_r \, d\omega_r$$

Ce facteur est évidemment inférieur à 1 (conservation de l'énergie).

3.3.1.2 Intensité de la réflexion

Lors d'une réflexion, la luminance associée vaut :

$$dL_r = F(\omega_i, \omega_r) \cos\theta_r \, L_i$$

On va donc s'intéresser au facteur $F(\omega_i, \omega_r) \cos\theta_r$ qui représente l'intensité de la réflexion pour une incidence donnée et fixée. On pose donc :

$$\rho_s(\omega_i) = \sup_{\Omega+} F(\omega_i, \omega_r) \cos\theta_r$$

3.3.1.3 La composante diffuse

Dans bien des cas, on le verra sur les exemples qui suivent, on isole visuellement une composante diffuse (notée ρ_d) dans les mesures de BRDF. Cette composante, présente dans la plupart des modèles analytiques, peut être extraite de la manière suivante : on va chercher dans les valeurs de la BRDF triées par ordre croissant, une plage de valeurs la plus large possible, où l'écart-type des valeurs est le plus faible possible. De façon pratique cela donne :

trier les `n` valeurs de BRDF dont on dispose par valeur croissante dans un tableau `BRDF[1]`, `BRDF[2]` ...`BRDF[n]`. Ensuite, appliquer l'algorithme suivant :

```
a ← 1
b ← n
tant-que a < b faire
```

```
        si écart-type(BRDF[a+1..b]) < écart-type(BRDF[a..b-1]) alors
                a ← a + 1
        sinon
                b ← b - 1
        fin-si
fin-tant-que
renvoyer BRDF[a]
```

Le résultat peut être observé sur (*figure 3.5, p. 53*).

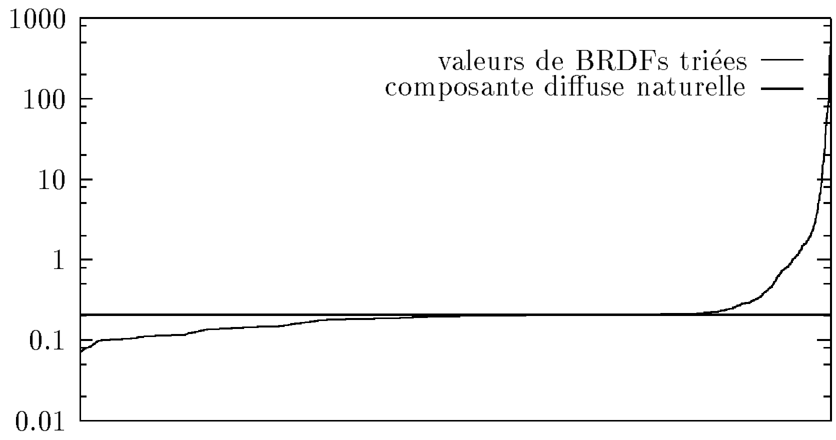

FIG. 3.5 – *composante diffuse naturelle*

3.3.2 Céramique

Cette BRDF a un comportement a priori très classique : une composante diffuse et un pic de spécularité dans la direction miroir. On constate cependant que ce pic croit fortement en intensité pour les directions rasantes, ainsi que le fait le facteur de réflexion. La composante diffuse, elle, devient de plus en plus négligeable pour les incidences les plus rasantes.

On peut voir sur le rendu de test (*figure 3.9, p. 56*) que pour des incidences moyennes, la céramique garde sa couleur originale et reflète juste le halo de la source de lumière. Pour des incidences rasantes, elle se comporte plus comme un miroir et réfléchit les couleurs des murs.

3.3.3 Revêtement routier

Cette BRDF est vraiment très particulière (*figure 3.10, p. 56*), (*figure 3.11, p. 57*) et (*figure 3.12, p. 57*). En effet elle fait apparaître de nombreux phénomènes. Tout d'abord, elle a un pic de rétro-réflexion très marqué, qui domine par rapport au pic

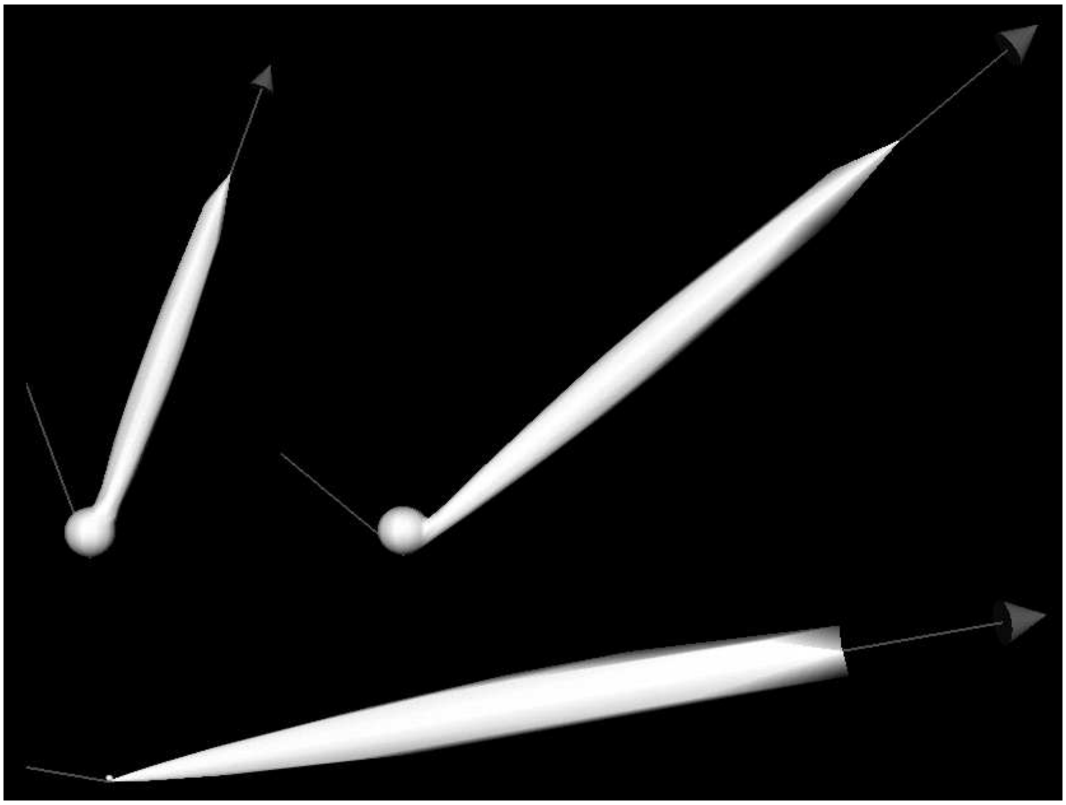

FIG. 3.6 – *BRDF d'une tuile en céramique, pour des incidences de 20 degrés (en haut à gauche), 50 degrés (en haut à droite), 80 degrés (en bas, échelle réduite 5 fois)*

spéculaire pour les incidences entre la normale et 45^o. De plus, le pic spéculaire prend ensuite le relais et croît très rapidement en off-spécularité. La rétro-réflexion a été étudiée de manière théorique dans [Tro78].

3.3.4 Feuille d'aluminium

Cette BRDF (*figure 3.13, p. 58*), (*figure 3.14, p. 59*) et (*figure 3.15, p. 59*) ne fait pas apparaître de composante diffuse particulière, juste un lobe assez large. De plus la quantité d'énergie réfléchie reste assez constante.

3.4 Conclusion

L'étude de trois exemples particuliers, mais mettant en oeuvre des matériaux relativement communs, nous montre bien qu'il est difficile d'unifier des comportements aussi différents que ceux exposés ci-dessus. Il devient donc indispensable, non plus de chercher un modèle analytique définitif, mais d'utiliser directement les mesures de BRDFs

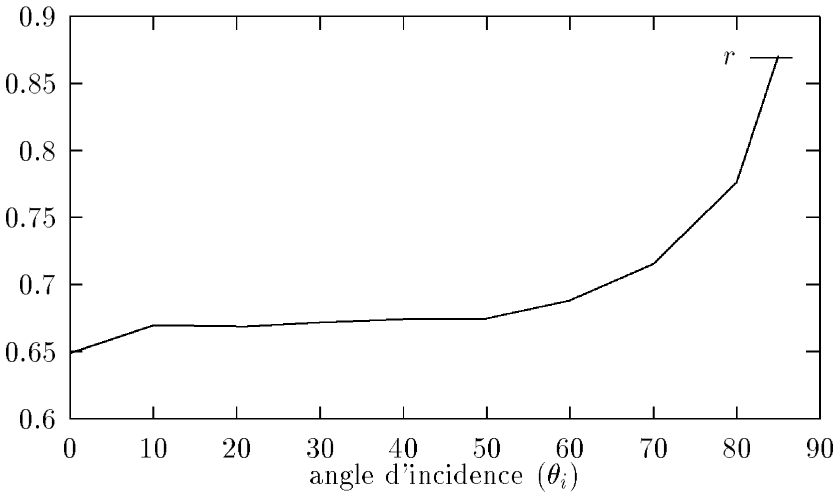

FIG. 3.7 – *coefficient de réflexion d'une tuile en céramique*

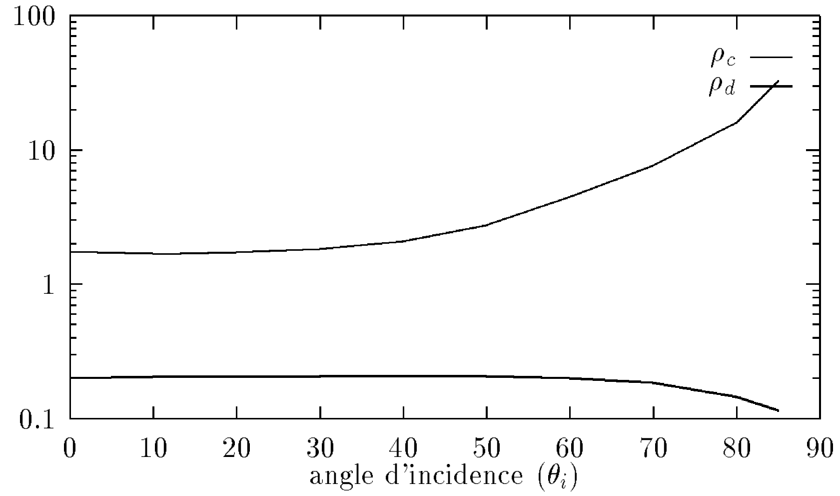

FIG. 3.8 – *intensité et composante diffuse d'une tuile en céramique*

dont on dispose, et donc d'obtenir une méthode de reconstruction d'une BRDF à partir d'échantillons discrets.

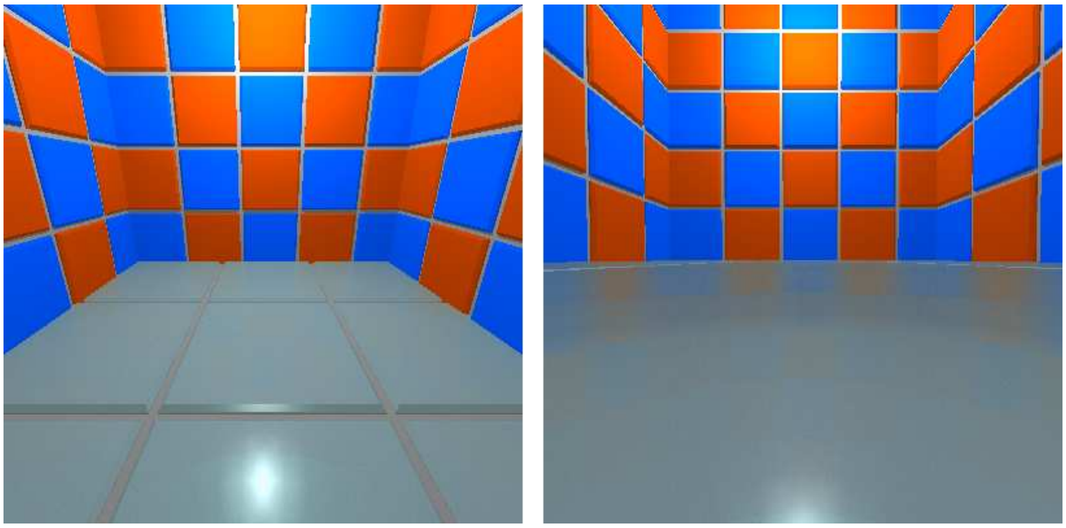

FIG. 3.9 – *rendu de test d'une BRDF de céramique, à gauche pour un point de vue moyen, à droite pour une point de vue rasant*

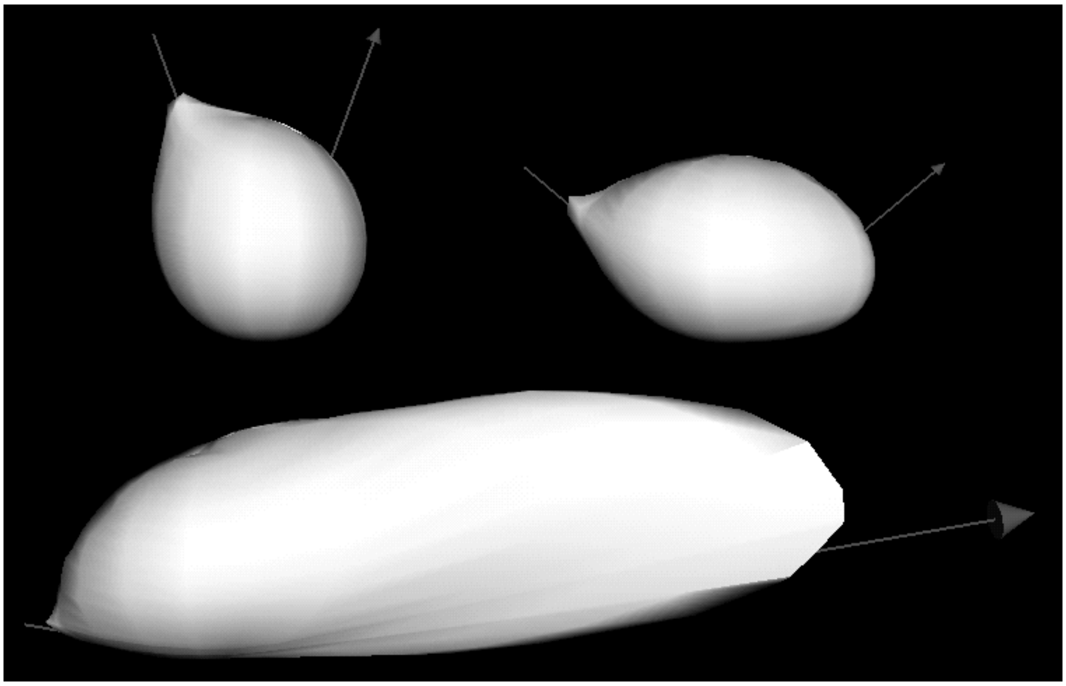

FIG. 3.10 – *BRDF d'un revêtement routier, pour des incidences de 20 degrés (en haut à gauche), 50 degrés (en haut à droite), 80 degrés (en bas)*

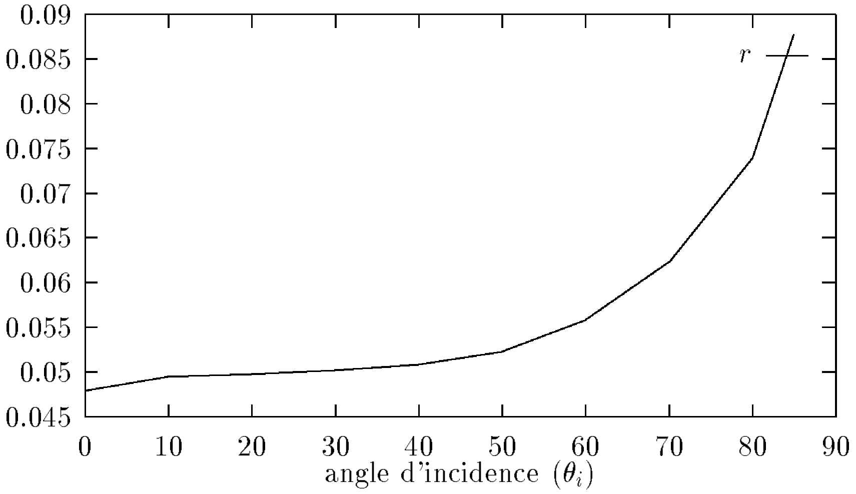

FIG. 3.11 – *coefficient de réflexion d'un revêtement routier*

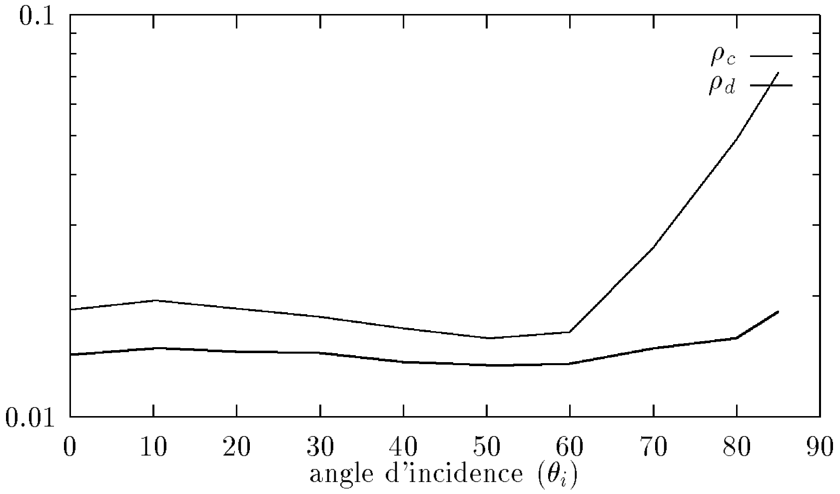

FIG. 3.12 – *intensité et composante diffuse d'un revêtement routier*

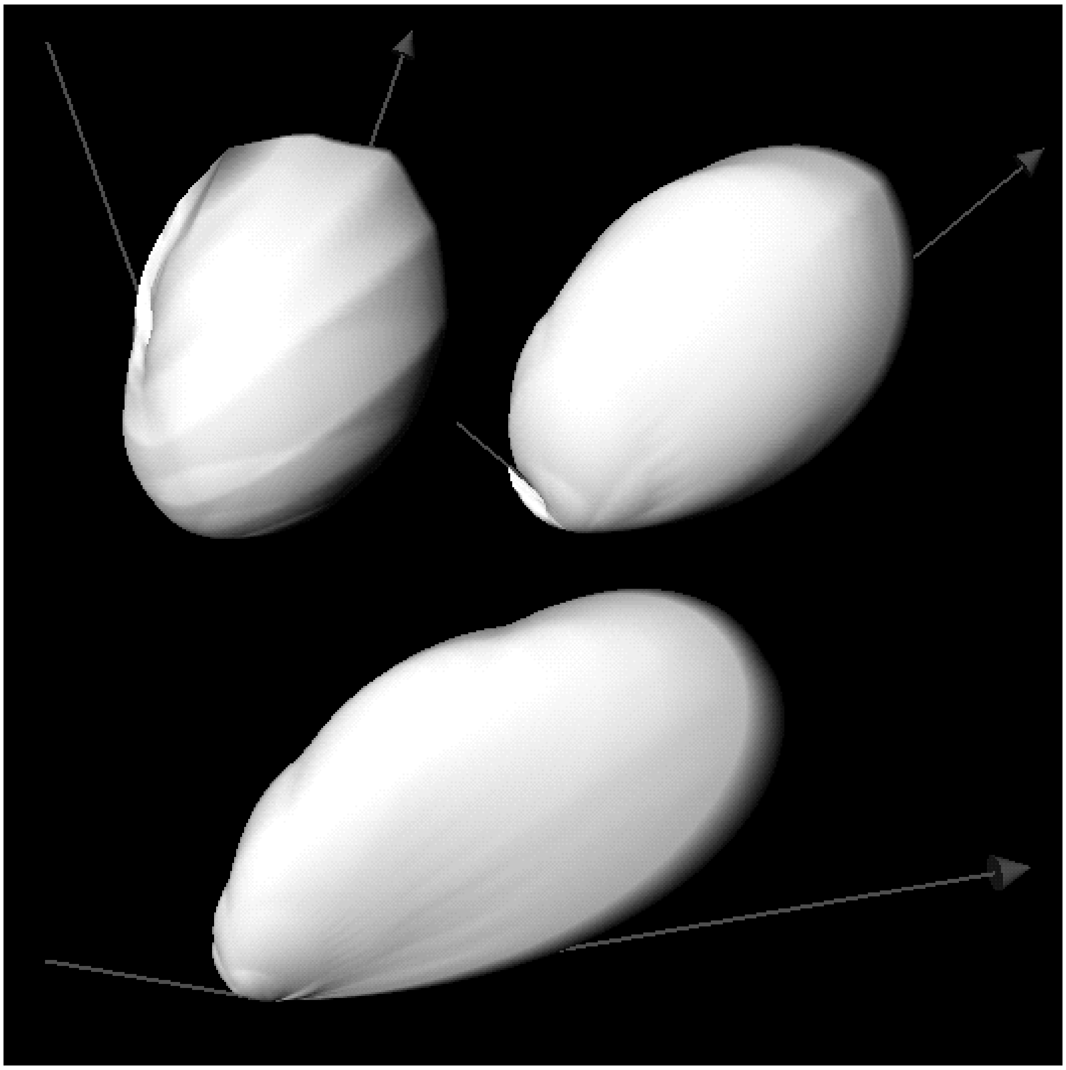

FIG. 3.13 – *BRDF d'une feuille d'aluminium, pour des incidences de 20 degrés (en haut à gauche), 50 degrés (en haut à droite), 80 degrés (en bas)*

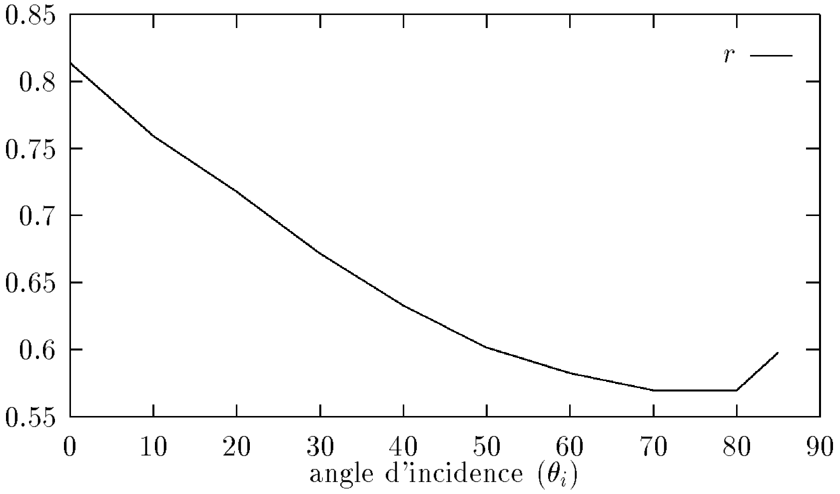

FIG. 3.14 – *coefficient de réflexion d'une feuille d'aluminium*

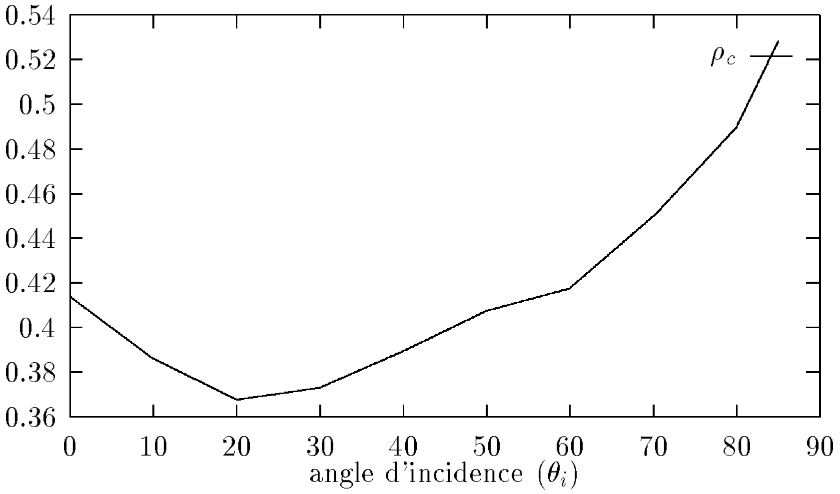

FIG. 3.15 – *intensité d'une feuille d'aluminium*

Chapitre 4

Notion d'erreur entre BRDFs

4.1 Objectif

Si l'on s'intéresse à la représentation de mesures de BRDFs, on doit être en mesure de juger de la qualité de cette représentation. Le seul critère valable est évidemment la fidélité de l'image calculée avec la BRDF recomposée recréant une scène réelle avec la photo de cette scène réelle. Comme cela est bien souvent impossible (difficulté de reproduire la géométrie ou l'éclairage), on pourra simplement comparer une image calculée avec la BRDF recomposée avec une image calculée en utilisant la BRDF originale directement. C'est un problème qui n'est pas simple, puisqu'il faut disposer d'une métrique sur images.

Toutefois, on aimerait disposer d'un critère de validité *a priori*. Pour cela, on va utiliser des erreurs au niveau mathématique, et non visuel, entre les BRDFs, qui sont des fonctions.

4.2 Erreurs classiques

De façon classique, pour comparer deux fonctions, ici deux BRDFs, on utilise un certain nombre d'erreurs. On appelle $\{f_{0\,i}\}$ notre ensemble de données de référence, et $\{f_i\}$ les valeurs prises par la fonction recomposée pour les mêmes paramètres. On suppose que l'on dispose de n valeurs. On peut utiliser les erreurs suivantes :

Définition 12 (quelques erreurs classiques) *On va donner quelques erreurs utilisées classiquement pour comparer deux fonctions.*

- *une erreur de type moindres carrés,*

$$\epsilon_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(f_i - f_{0\,i})^2}{n}}$$

le problème est que l'on n'a pas d'échelle ici, on ne sait pas ce que représente ce nombre, bien qu'on puisse le comparer pour une même référence. De plus, il est lié à l'échelle de la BRDF. On peut s'affranchir de ce problème en divisant par la moyenne de la fonction de référence,

– *une erreur de type pourcentage moyen,*

$$\epsilon_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{f_i - f_{0\,i}}{f_{0\,i}}\right|$$

ici on a donc un pourcentage, ce qui nous permet de quantifier l'erreur. Cependant, si les valeurs de référence sont faibles par rapport à un pic très important, une petite différence va faire apparaître une erreur de milliers de pourcents par exemple, ce qui va fausser le résultat final,

– *une erreur de type pourcentage moyen, borné,*

$$\epsilon_q = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|f_i - f_{0\,i}|}{\max(|f_i|, |f_{0\,i}|)}$$

ici, on est sûr d'avoir un pourcentage ramené entre 0 et 1 (les valeurs que l'on compare sont positives). Mais une erreur de 100% *peut être minime ou très importante, puisque elle traduit que soit f_i soit $f_{0\,i}$ est nul.*

4.3 Une nouvelle classe d'erreurs

4.3.1 Mesures

On va introduire de nouvelles mesures sur les fonctions de type BRDF.

Définition 13 (mesures sur les BRDFs) *on rappelle que Ω^+ est l'hémisphère supérieur. Pour $f : \Omega^+ \to I\!R^+$ on définit les mesures suivantes :*

$$\mu_b(f) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{(\omega_i,\omega_r)\in\Omega^{+2}} f(\omega_i,\omega_r)\, d\omega_i\, d\omega_r$$
$$\mu_c(f) = \frac{1}{2\pi^2}\iint_{(\omega_i,\omega_r)\in\Omega^{+2}} f(\omega_i,\omega_r)\, \cos\theta_r\, d\omega_i\, d\omega_r$$

μ_b est appelée mesure fonctionnelle et μ_c mesure énergétique.

Ces deux mesures sont introduites de façon à mesurer ce qui nous intéresse. La plupart du temps, on ne considère que l'erreur au niveau des fonctions BRDFs elles-mêmes, mais c'est oublier que ce ne sont pas des fonctions classiques et qu'on les utilise de manière particulière en rendu (en les multipliant par un cosinus), d'où l'introduction de la deuxième mesure.

4.3.2 Erreurs

À partir de ces mesures, on va introduire des erreurs. Le problème avec les erreurs habituelles, c'est qu'elles n'ont pas d'échelle ou bien qu'elles ne tiennent pas compte des particularités de la fonction que l'on cherche à reproduire. C'est pour cela que l'on va introduire des erreurs relatives à l'écart-type de la fonction originale.

Définition 14 (erreurs sur les BRDFs) *on considère que f_0 est la BRDF que l'on cherche à reproduire, et f une représentation de celle-ci. À partir des mesures introduites précédemment, on définit :*

$$\epsilon_b(f) = \sqrt{\frac{\mu_b((f-f_0)^2)}{\mu_b(f_0^2) - \mu_b(f_0)^2}}$$
$$\epsilon_c(f) = \sqrt{\frac{\mu_c((f-f_0)^2)}{\mu_c(f_0^2) - \mu_c(f_0)^2}}$$

Ces erreurs sont le rapport de l'écart-type entre la fonction et sa représentation sur l'écart-type de la fonction. Cette erreur a l'avantage d'être indépendante de l'échelle (si on multiplie les deux fonctions par une constante, l'erreur est la même). Et surtout, elle vaut 1 (100%) lorsque la représentation est égale à la moyenne de la fonction. Dans le cas de ϵ_b, l'erreur vaut donc 100% lorsque l'on choisit comme représentation la BRDF lambertienne la plus proche (qui est bien la moyenne). On a aussi la différence entre une erreur fonctionnelle et une erreur énergétique (dont on verra qu'elles peuvent être différentes).

4.3.3 Séparation par incidence

On pourra objecter que ces erreurs sont globales et ne font pas intervenir l'incidence. En effet, une représentation peut être très bonne pour une incidence donnée, et très mauvaise pour une autre. On va donc, en reprenant les mesures et les erreurs précédentes, introduire :

Définition 15 (mesures sur les BRDFs pour une incidence donnée)

$$\mu_b(f, \omega_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_r \in \Omega^+} f(\omega_i, \omega_r)\, d\omega_r$$
$$\mu_c(f, \omega_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_r \in \Omega^+} f(\omega_i, \omega_r)\, \cos\theta_r\, d\omega_r$$

On peut évidemment relier les différentes mesures entre elles en faisant la moyenne pour toutes les incidentes :

$$\mu_b(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_i \in \Omega^+} \mu_b(f, \omega_i)\, d\omega_i$$
$$\mu_c(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_i \in \Omega^+} \mu_c(f, \omega_i)\, d\omega_i$$

Pour les erreurs associées, la formule reste la même, mais en substituant les mesures pour une incidence donnée aux mesures générales.

4.3.4 Représentation graphique

Il est intéressant de pouvoir juger de la qualité de la représentation en un coup d'oeil, sans avoir à parcourir des colonnes de chiffres. C'est pourquoi on va adopter la méthode suivante pour des BRDFs isotropes, dont l'incidence peut être représentée uniquement par un angle. La représentation adoptée est radiale, c'est-à-dire que l'angle d'incidence est représenté par l'angle entre l'axe des ordonnées, et que la valeur de l'erreur est la distance entre la courbe et le centre du repère. Dans le cas des BRDFs anisotropes, on pourra utiliser le même graphe dans plusieurs orientations différentes (*figure 4.1, p. 64*).

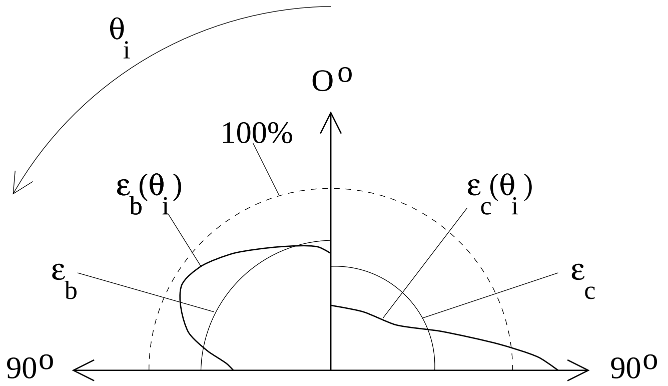

FIG. 4.1 – *représentation des erreurs entre BRDFs*

Un exemple de cette représentation est donné sur (*figure 4.2, p. 65*). Il s'agit de la recomposition avec le modèle de Lafortune [LFTG97] (*chapitre 2, p. 21*) d'une BRDF de peinture. La BRDF recomposée est formée de trois lobes (rétro-réflexion, diffus directionnel et spéculaire).

On peut essayer d'analyser les erreurs en fonction de l'aspect de la BRDF pour trois incidences différentes :

- pour une incidence normale (0^o) (*figure 4.3, p. 65*), on constate une très importante erreur fonctionnelle (pratiquement équivalente à 100%, donc à remplacer la BRDF originale par une BRDF parfaitement diffuse). On observe que c'est bien le cas, puisqu'on ne reproduit pas le comportement d'atténuation de la BRDF pour les directions réfléchies rasantes. Par contre, l'erreur énergétique est beaucoup plus faible, puisqu'en fait, ces différences ne sont pas vraiment importantes lors de l'utilisation en rendu de la BRDF,

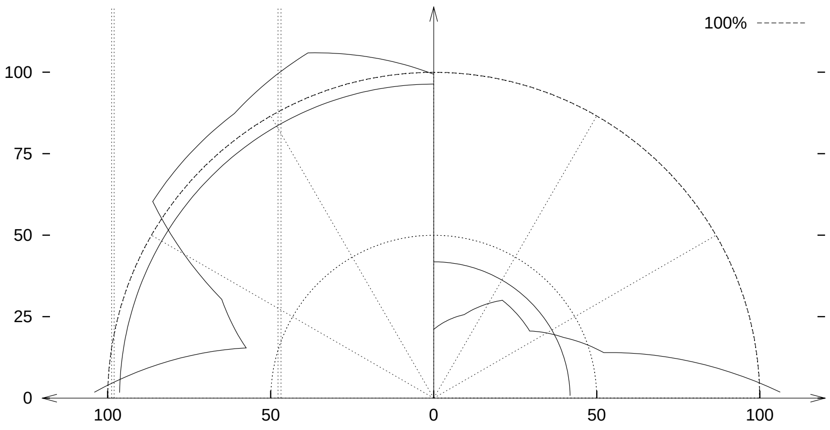

FIG. 4.2 – *erreur entre une BRDF réelle et sa recomposition*

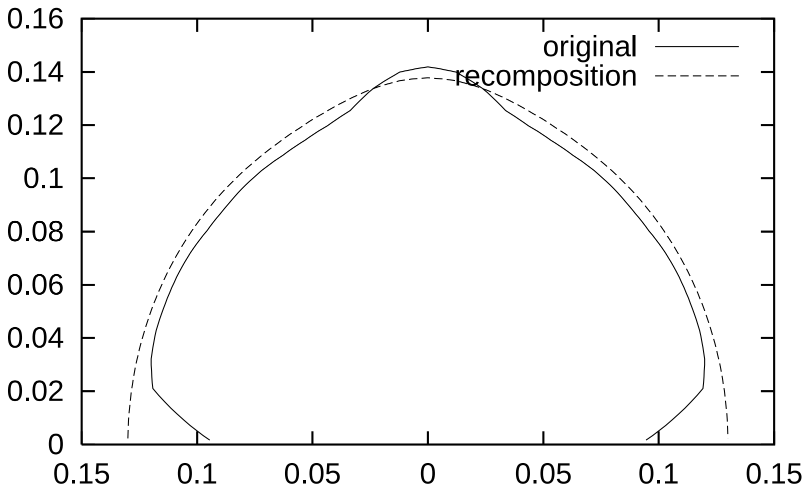

FIG. 4.3 – *BRDF originale et recomposée d'une peinture, incidence de* 0^o

On représente ici une coupe radiale de la BRDF (dans le plan contenant la direction d'incidence et la direction miroir). L'angle polaire utilisé est l'angle entre la direction réfléchie et la normale (la rétro-réflexion est à gauche, la direction miroir à droite de l'axe des ordonnées).

– pour une incidence de 65^o (*figure 4.4, p. 66*), l'erreur est importante, pour l'une et l'autre mesure. Bien que le pic de rétro-réflexion soit présent, le pic spéculaire est mal représenté (afin de garder un repère orthonormé, cette courbe se trouve très aplatie).

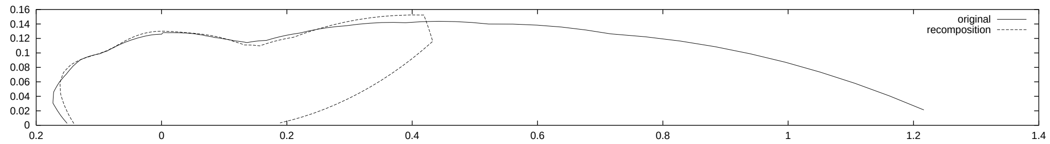

FIG. 4.4 – *BRDF originale et recomposée d'une peinture, incidence de 65°*

4.3.5 Discrétisations

La discrétisation des erreurs précédentes se fait naturellement, en ne tenant pas compte des angles solides. On appelle $\{f_{0\,i}\}$ l'ensemble des n données de la BRDF, $f_{0\,i}$ étant évaluée pour le couple de directions (x_i, y_i). On appelle f la fonction recomposée :

$$\epsilon_b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i, y_i) - f_{0\,i}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} f_{0\,i}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f_{0\,i}\right)^2}} \quad \epsilon_c = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\left(f(x_i, y_i) - f_{0\,i}\right)\, c_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(f_{0\,i}\, c_i\right)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} (f_{0\,i}\, c_i)\right)^2}}$$

Avec : $c_i = \cos\theta_{x_i} + \cos\theta_{y_i}$. De cette manière, on s'assure de la réciprocité de la fonction à recomposer.

4.4 Comparaison

On va comparer le comportement des différentes erreurs sur le même exemple que précédemment et l'analyser (*figure 4.5, p. 67*).

Le comportement de ϵ_c et ϵ_q est à peu près le même, mais la valeur de ϵ_c semble plus judicieuse, lorsque l'on regarde (*figure 4.4, p. 66*). Les comportements de ϵ_p et ϵ_b sont pratiquement inversés. L'erreur qui semble ici la plus représentative est ϵ_c. Lors de futures comparaisons, on utilisera les deux paramètres ϵ_b et ϵ_c.

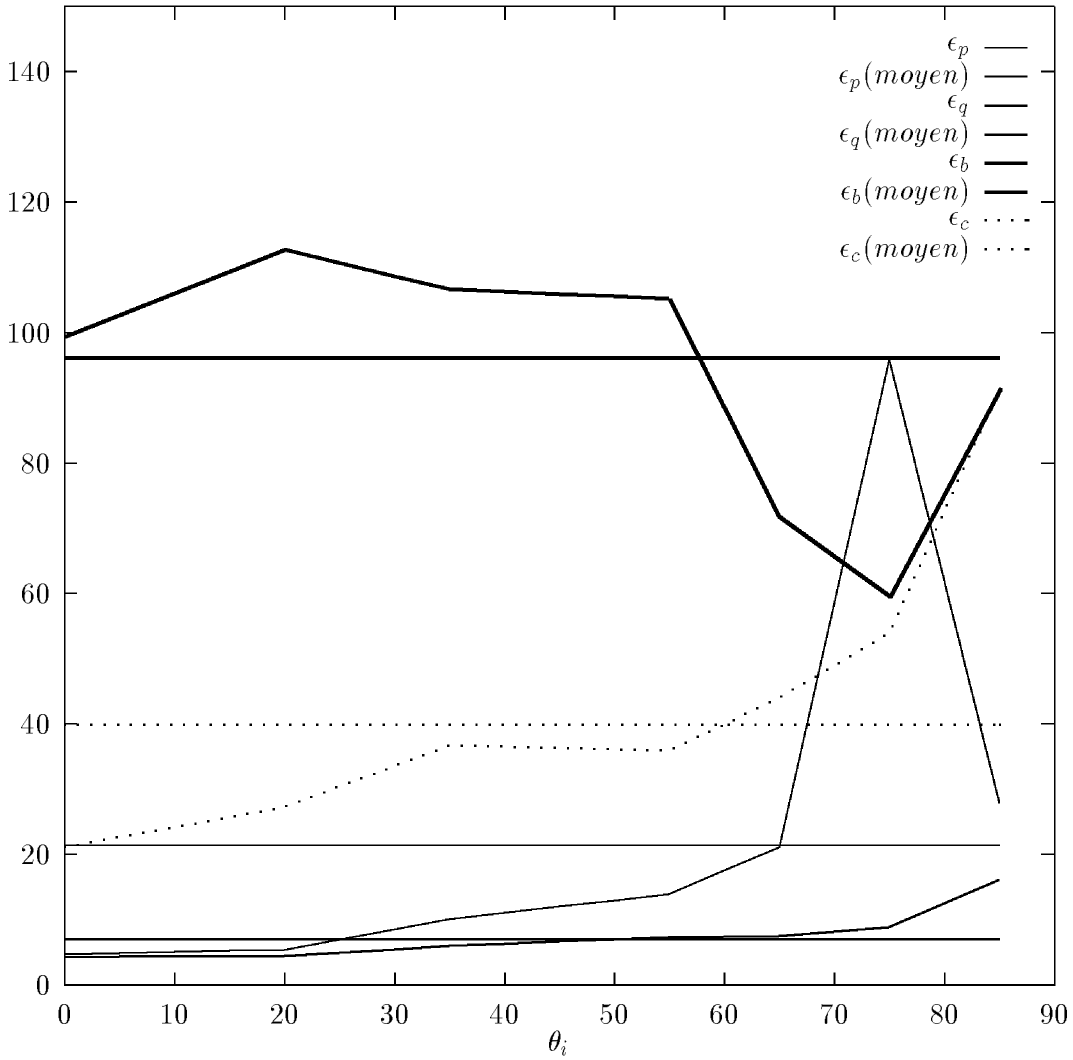

FIG. 4.5 – *comparaison des différentes erreurs, en fonction de l'angle d'incidence*

4.5 Améliorations possibles

Il est intéressant de se demander quel peut-être le lien entre la valeur de l'erreur ϵ_b ou ϵ_c entre une BRDF de référence et une BRDF approchée et l'erreur résultante sur des images calculées avec ces deux BRDFs.

En effet, si une erreur de 30% ne provoque pas de différence perceptible entre les images calculées, on pourra considérer cette valeur comme un seuil acceptable. Cependant, cette question est un problème extrêmement vaste et encore loin d'être résolu aujourd'hui. En effet, la contribution d'une BRDF a une scène particulière dépend de très nombreux paramètres: géométrie de la scène, éclairage, importance relative par rapports aux autres paramètre de la scène, ... De plus, la notion de métrique entre images, et notamment une métrique perceptuelle, reste un problème non résolu.

Une autre question que l'on peut soulever, est celle de la «similarité» entre des comportements de BRDFs. En effet, deux BRDFs dont les pics spéculaires ont la même intensité mais sont décalés de quelques degrés l'un par rapport à l'autre donneront, au niveau rendu, des images très similaires. Il serait donc intéressant de prendre en compte dans les mesures d'erreurs de légères rotations de la BRDF de référence, éventuellement pondérées en fonction de l'angle de rotation.

Chapitre 5

Un goniophotomètre virtuel

5.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'établir un lien entre l'expérience et la théorie. On a vu qu'il existe un grand nombre de modèles analytiques de BRDFs. Certaines de ces BRDFs se basent sur des hypothèses physiques. Nous allons donc confronter ces modèles à la réalité.

Le LCPC (Laboratoire Central des Ponts et Chaussées) dispose d'un goniophotomètre, appareil servant à mesurer des BRDFs de matériaux quelconques. Des mesures ont été effectuées sur un certain nombre d'échantillons (essentiellement de revêtements routiers), échantillons dont on possède aussi des relevés de surface. On possède donc deux informations complémentaires. On va adopter la démarche suivante :

- création d'un goniophotomètre virtuel recréant le processus expérimental du goniophotomètre réel,
- validation de ce goniophotomètre virtuel à l'aide des mesures du goniophotomètre réel et des informations sur les échantillons mesurés,
- application du goniophotomètre virtuel à des échantillons créés artificiellement selon les hypothèses choisies,
- comparaison des résultats du goniophotomètre virtuel et des BRDFs analytiques calculées à partir de ces hypothèses.

5.2 Travaux précédents

Différents travaux ayant trait à la simulation de BRDFs ont déjà été conduits.

- dans [HK93], les auteurs simulent des BRDFs à l'aide de réflexions internes. Ils considèrent le matériau à simuler comme un substrat translucide homogène, avec un indice de réfraction fixe, dans lequel se trouve des particules, en densité et en taille déterminées par des distributions mathématique. Un matériau complexe peut comprendre plusieurs couches de matériaux de ce type.

Les auteurs ne génèrent pas un matériau vérifiant ces propriétés, mais propagent des rayons dans le substrat, en déterminant de façon statistique au bout de quelle distance ils rencontrent une particule. Le comportement (nouvelle direction et énergie transportée) du rayon après dispersion par la particule est déduit de formules d'astrophysique.

Cette technique permet d'obtenir des BRDFs, mais aussi leur équivalent en transmission. L'application ne peut par contre se faire qu'à des matériaux dont la structure peut être assimilée à celle présentée plus haut, comme de la peau humaine par exemple.

- dans [WAT92], les auteurs parlent avec justesse d'une échelle des géométries. Ils distinguent en effet trois échelles : l'échelle de l'objet (par exemple un coussin), une géométrie intermédiaire (la géométrie des mailles du tissu de ce coussin), et enfin une micro-géométrie (la géométrie du tissu lui même).

  Les auteurs modèlisent la géométrie intermédiaire, et associent une réflexion locale simple à la micro-géométrie, afin d'obtenir une BRDF de tissu pour le calcul d'une image de coussin. Ils appliquent ce principe à différentes micro-géométries, notamment pour le modèle de He-Sillion [HTSG91], validé pour une rugosité $T/\sigma = 6,5$.

- dans [KMG96] les auteurs construisent un goniophotomètre assez simple à l'aide d'une caméra CCD, qui leur permet de mesurer plusieurs couples de directions en une seule passe (pour chaque pixel de l'image). Ils calent ensuite leur mesures dans un modèle analytique [War92a], qui est un modèle strictement empirique.

5.3 Goniophotomètre réel

Nous allons présenter le goniophotomètre du LCPC [JMC96]. Il a été spécialement conçu pour mesurer les propriétés de réflexion des surfaces telles que les chaussées routières. Une description schématique de l'appareil est donnée par (*figure 5.1, p. 71*).

5.3.1 Système d'angles

Le système d'angles utilisé est différent de celui des coordonnées sphériques. Il s'agit du système d'angles utilisé par la CIE dans le cadre de l'éclairage public. Les angles sont exprimés en degrés et sont représentés sur (*figure 5.2, p. 72*). On les définit de la manière suivante :

- α : angle d'observation,
- β : angle entre le plan d'éclairage et le plan d'observation,

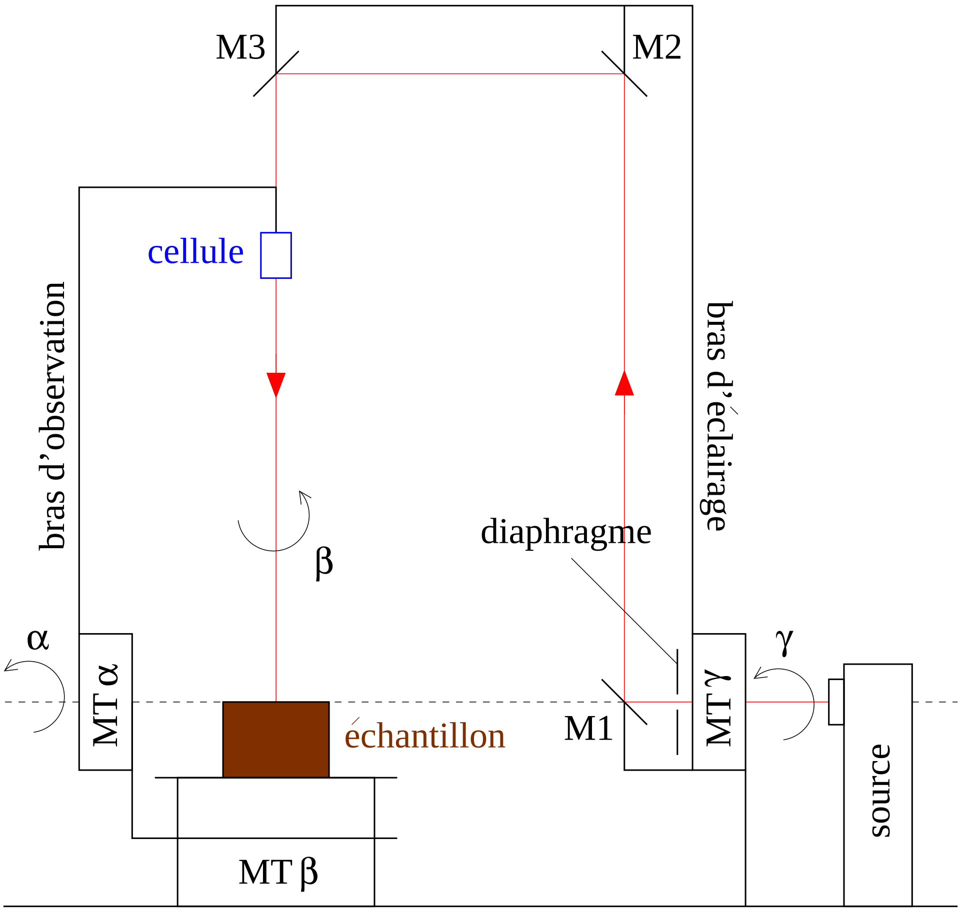

FIG. 5.1 – *schéma de fonctionnement du goniophotomètre réel*

- γ : angle d'éclairage,
- δ : angle entre le plan d'observation et l'axe de la route, c'est l'angle d'anisotropie.

5.3.2 Source de lumière

La source de lumière est une lampe halogène de 250 W, qui se trouve dans une boîte hermétique fixe. Un système optique en sortie de la source permet d'avoir un faisceau de rayons parallèles. Pour amener ce faisceau jusqu'à l'échantillon mesuré, on utilise un jeu de trois miroirs (notés M1, M2 et M3). Ils se trouvent sur le bras d'éclairage, qui peut être bougé par l'intermédiaire du moteur pas-à-pas MTγ. Ainsi on peut faire varier l'angle d'éclairage γ.

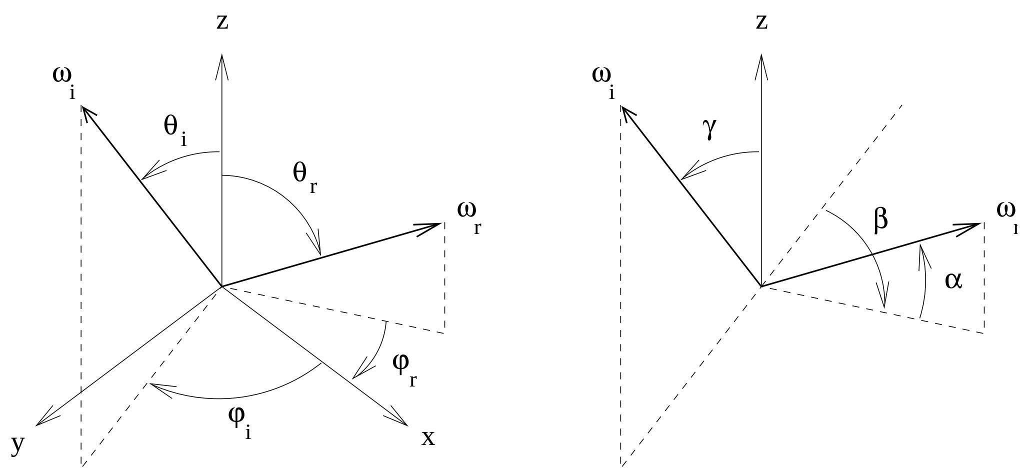

FIG. 5.2 – *système d'angles pour le goniophotomètre*

5.3.3 Principe de mesure

Un principe important lors de la mesure est de garder l'aire de la surface éclairée constante. Or le fait de modifier l'angle d'éclairage γ fait augmenter la taille de la tache de lumière. En effet, il existe un rapport $\frac{1}{\cos\gamma}$ entre la largeur du faisceau et la largeur de la surface. Pour remédier à ce problème, il faut avoir un diaphragme pour modifier la taille de la source. Pour des raison de précision, ce diaphragme est constitué de deux volets indépendants, pilotés par deux moteurs pas-à-pas. Avec ce procédé, la surface éclairée correspond à un carré de dix centimètres de côté, quel que soit l'angle γ.

5.3.4 Observateur et capteur

La seconde partie du goniophotomètre constitue l'observateur. C'est en fait une simple cellule photoélectrique qui est montée sur le bras d'observation. Ce dernier possède deux degrés de liberté α et β. Là encore, deux moteurs pas-à-pas MTα et MTβ sont utilisés pour déplacer l'observateur et balayer une demi-sphère au-dessus de l'échantillon.

5.4 Goniophotomètre virtuel

5.4.1 Principe de fonctionnement

Nous allons simuler le fonctionnement du goniophotomètre à l'aide du lancer de rayons. On va simuler la source en envoyant des rayons sur l'échantillon à observer. Nous allons suivre le trajet et l'énergie transportée par ces rayons. Toute la partie intersection du lancer de rayons va nous permettre de nous concentrer sur la partie modélisation de la réflexion et du capteur.

5.4.2 Modélisation de l'échantillon

Nous devons avoir une modélisation de la micro-structure de l'échantillon. Le lancer de rayons que nous utilisons permet d'utiliser une modélisation CSG des objets. Ceci nous permet d'envisager de valider bon nombre de modèles analytiques de BRDFs calculés à partir d'hypothèses géométriques. Mais nous devons d'abord valider le goniophotomètre virtuel.

5.4.2.1 Mesure des profils des surfaces

Le LCPC de Nantes dispose d'un outil, appelé TRIDIM, permettant de réaliser des relevés de profils de surface. La mesure de l'altitude en un point de la surface se fait par un procédé optique. Une diode laser projette une tache lumineuse sur la surface. La lumière réfléchie est recueillie par un capteur qui la transforme en un signal électrique dont la valeur est proportionnelle à la hauteur de la surface au point de focalisation.

Le profil complet d'une surface est obtenu en déplaçant la diode laser et le capteur. Ceci se fait à l'aide de moteurs pas-à-pas suivant les deux axes du plan horizontal. Étant donnée la taille de la tache de lumière, le pas minimum d'échantillonnage est fixé à 0,25mm. D'autre part, des contraintes liées au dispositif limitent le nombre maximum de pas d'échantillonnage à 256. Dans ces conditions, un profil est donné par une matrice de 256x256 points et représente une surface mesurée de 63x63 mm. (*figure 5.3, p. 73*) montre quelques exemples de relevés pour des échantillons de revêtement routier, hauteurs converties en niveau de gris.

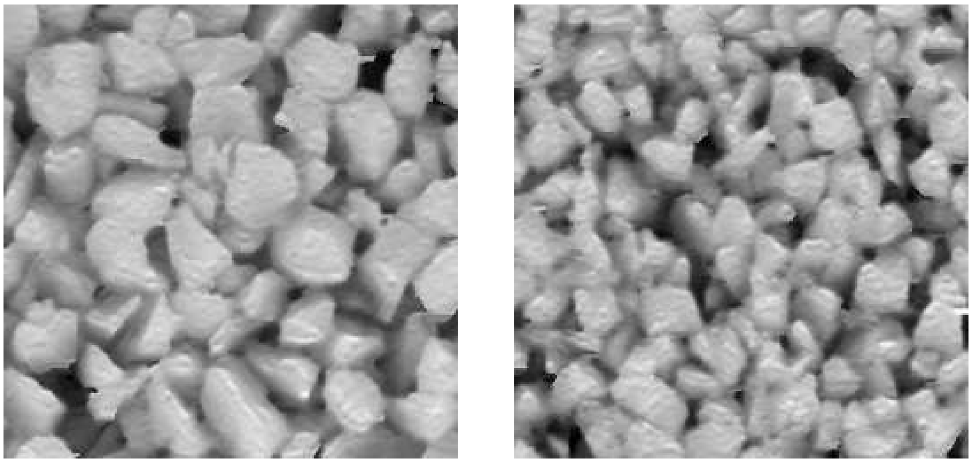

FIG. 5.3 – *quelques relevés de profils*

5.4.2.2 Représentation informatique

On dispose ainsi d'une grille de hauteurs du terrain. A partir de cette donnée discrète, on doit recomposer une information continue. En effet, dans le lancer de rayons, on doit avoir une intersection représentée par un point et une normale. On considère que l'on dispose d'une grille de n_x par n_y sommets, espacés entre eux de Δx et Δy, et notés $P_{i,j}$:

$$P_{i,j} = \begin{pmatrix} i\,\Delta x \\ j\,\Delta y \\ z_{i,j} \end{pmatrix}, i \in \{0, 1, \ldots, n_x - 1\}, j \in \{0, 1, \ldots, n_y - 1\}$$

5.4.2.2.1 Représentation par des triangles C'est la représentation la plus simple, elle traite le terrain comme un ensemble de $n_x - 1$ par $n_y - 1$ paires de triangles. On peut évidemment orienter les triangles de deux façons différentes, et ceci sur chaque paire.

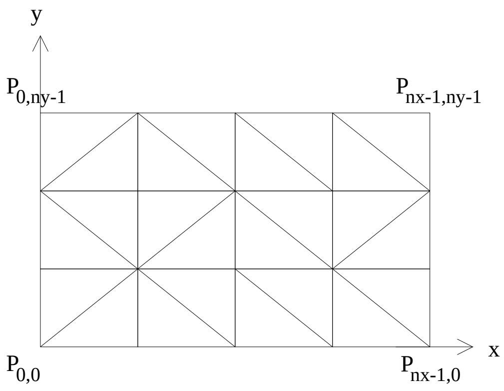

FIG. 5.4 – *un terrain sous forme de triangles*

Au niveau de l'intersection avec une paire de triangles, il s'agit de faire deux fois une simple intersection avec un plan, en vérifiant *a posteriori* que le point se trouve bien dans le triangle concerné.

5.4.2.2.2 Représentation par des quadriques On considère le terrain comme un ensemble de $n_x - 1$ par $n_y - 1$ carreaux, tels que le carreau (i, j) soit délimité par les sommets $P_{i,j}$, $P_{i+1,j}$, $P_{i,j+1}$, $P_{i+1,j+1}$.

On va chercher à connaître l'altitude d'un point P situé dans le carreau (i, j). Pour cela on va procéder à une double interpolation en utilisant les points P_1 et P_2 (*figure 5.5, p. 75*).

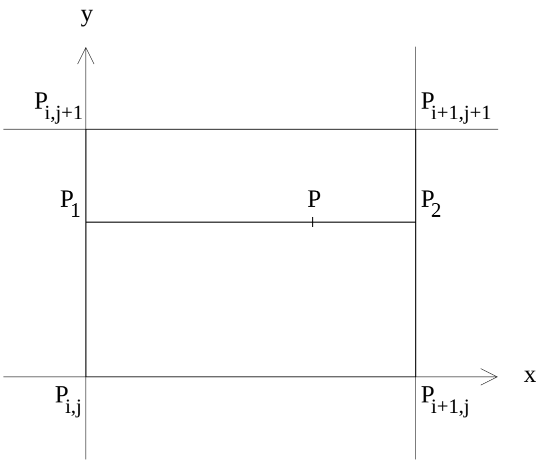

FIG. 5.5 – *un carreau de terrain sous forme de quadrique*

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad P_1 = \begin{pmatrix} i\,\Delta x \\ y \\ z_1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} (i+1)\,\Delta x \\ y \\ z_2 \end{pmatrix}$$

On peut maintenant écrire ce que vaut l'altitude z du point P :

$$\begin{aligned} z &= \left(i+1-\frac{x}{\Delta x}\right) z_1 + \left(\frac{x}{\Delta x} - i\right) z_2 \\ z_1 &= \left(j+1-\frac{y}{\Delta y}\right) z_{i,j} + \left(\frac{y}{\Delta y} - j\right) z_{i,j+1} \\ z_2 &= \left(j+1-\frac{y}{\Delta y}\right) z_{i+1,j} + \left(\frac{y}{\Delta y} - j\right) z_{i+1,j+1} \end{aligned}$$

Cette équation correspond à une quadrique. La définition d'une quadrique est :

Définition 16 (quadrique) *soit M une matrice symétrique à 4 lignes et 4 colonnes. Soit P un vecteur à quatre lignes valant :*

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

On définit la quadrique dans l'espace associée à la matrice M par l'équation : $(M \times P) \cdot P < 0$ équivalant à ${}^tP\,M\,P < 0$.

Étudions maintenant comment intersecter un rayon avec une quadrique ainsi définie. Si notre rayon est défini par l'origine O et le vecteur directeur D tels que :

$$O = \begin{pmatrix} x_O \\ y_O \\ z_O \\ 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \\ 0 \end{pmatrix}$$

on cherche le point d'intersection $P = O + \lambda\, D$ du rayon avec la quadrique. On a donc l'équation suivante :

$$\begin{aligned} &{}^tP\,M\,P = 0 \\ \Rightarrow\ &{}^tO\,M\,O + \lambda\,({}^tD\,M\,O + {}^tO\,M\,D) + \lambda^2\,{}^tD\,M\,D = 0 \\ \Rightarrow\ &{}^tO\,M\,O + 2\,\lambda\,{}^tD\,M\,O + \lambda^2\,{}^tD\,M\,D = 0 \end{aligned}$$

Maintenant que l'on sait calculer l'intersection, il faut construire la matrice associée à notre problème. On identifie cette matrice par rapport aux équations précédentes. Pour le carreau (i, j), cette matrice $M_{i,j}$ vaut :

$$M_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ a & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ b & c & \frac{1}{2} & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{2\,\Delta x\,\Delta y}\,(z_{i,j} - z_{i,j+1} - z_{i+1,j} + z_{i+1,j+1}) \\ b &= -\frac{1}{2\,\Delta x}\,((j+1)(z_{i+1,j} - z_{i,j}) + j(z_{i,j+1} - z_{i+1,j+1})) \\ c &= -\frac{1}{2\,\Delta y}\,((i+1)(z_{i,j+1} - z_{i,j}) + i(z_{i+1,j} - z_{i+1,j+1})) \\ d &= -\,((i+1)(j+1)z_{i,j} - (i+1)jz_{i,j+1} - i(j+1)z_{i+1,j} + ijz_{i+1,j+1}) \end{aligned}$$

La normale à la surface au point P s'exprime par $N = M\,P$.

5.4.2.3 Intersection d'un rayon avec le terrain

Pour effectuer l'intersection d'un rayon avec le terrain (nous avons pour l'instant considéré l'intersection avec un carreau particulier), nous allons utiliser un algorithme de suivi de rayons [Coq84]. Au lieu de tester l'intersection du rayon avec tous les carreaux et de prendre la première intersection, on va projeter le rayon sur la grille et suivre le rayon à travers les carreaux candidats (intersectés dans la projection) où l'on effectuera une véritable intersection (*figure 5.6, p. 77*).

Pour passer d'un carreau à un autre il suffit de savoir par quel bord du carreau l'on sort (bord en x ou bord en y). On peut aussi limiter l'abscisse sur le rayon car l'on sait que le terrain est compris entre une altitude minimum et une altitude maximum.

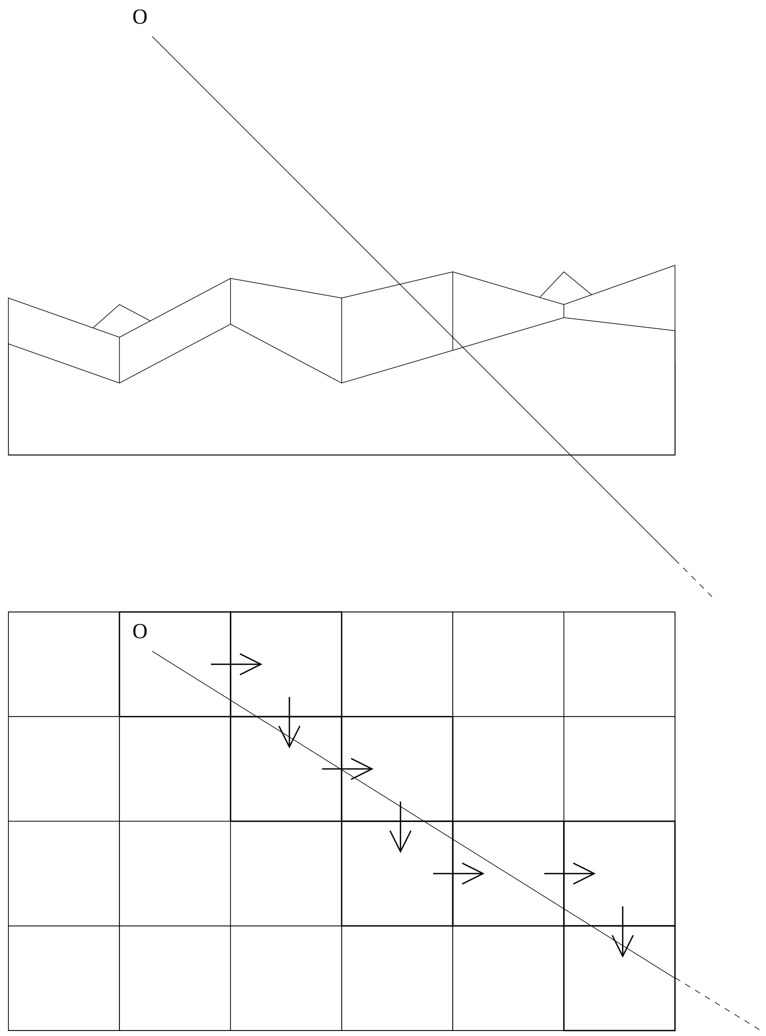

FIG. 5.6 – *principe du suivi de rayons*

5.4.2.4 Conclusion

Avec les différentes modélisations adoptées précédemment, on dispose donc d'un terrain C^0 mais pas C^1. En effet, la surface est continue, mais la normale ne l'est pas. En fait, elle n'est continue que sur un carreau (ou un demi-carreau dans le cas des triangles).

Afin d'avoir une normale continue, on pourrait envisager un lissage des normales, mais cela pose deux problèmes :

- les terrains réels sont très accidentés et on peut distinguer des petits caillous, qui créent de nombreuses discontinuités de normales,

- traiter séparément le point d'intersection et la normale, sur des terrains aussi fins, et avec des variations de hauteurs aussi importantes, mène à un grand nombre d'incohérences (intersection trouvée, mais normale rentrant dans la surface) qui va faire perdre un grand nombre de rayons, donc mieux vaut une information bruitée, mais robuste.

5.4.3 Modélisation de la réflexion

Étant donné que l'on ne possède pas d'informations sur les propriétés de réflexion locale des échantillons, il va falloir adopter des modèles de réflexion locale simplifiés.

5.4.3.1 Réflexions simples

On peut envisager tout d'abord des modèles de réflexion très simples. On considère un rayon arrivant sur la surface selon une direction ω_i en un point où la normale sortante est N, avec $\omega_i \cdot N < 0$ (c'est-à-dire une direction rentrant dans la surface) et une énergie L_i. Tous les vecteurs sont considérés normés.

5.4.3.1.1 Réflexion spéculaire Le modèle le plus simple est celui d'une réflexion spéculaire pure, c'est-à-dire en générant une direction miroir symétrique à la direction d'incidence par rapport à la normale au point d'intersection avec la surface. L'énergie réfléchie va être multipliée par le facteur de Fresnel. Le seul paramètre conditionnant notre réflexion est donc l'indice de réfraction de la surface (pouvant être complexe), noté n :

$$\cos\theta_i = \omega_i \cdot N$$
$$\omega_r = \omega_i - 2\cos\theta_i\, N$$
$$L_r = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{\cos^2\theta_i\, n^2 - \sqrt{n^2-\sin^2\theta_i}}{\cos^2\theta_i\, n^2 + \sqrt{n^2-\sin^2\theta_i}}\right|^2 + \left|\frac{\cos\theta_i - \sqrt{n^2-\sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{n^2-\sin^2\theta_i}}\right|^2\right)$$

5.4.3.1.2 Réflexion diffuse Un autre type de réflexion très simple est une réflexion diffuse parfaite, de type Lambert. Le seul paramètre conditionnant notre réflexion est donc le facteur de réflexion k_d.

5.4.3.2 Réflexion à partir de BRDFs quelconques

5.4.3.2.1 Possibilités de récursion Afin de modéliser des BRDFs plus complexes, ou d'obtenir des résultats plus rapides, on va introduire de nouveaux types de réflexion.

5.4.3.2.2 Échantillonnage régulier La manière la plus simple de modéliser une réflexion conditionnée à une BRDF quelconque est de subdiviser la demi-sphère correspondant à l'ensemble des directions réfléchies possibles et de renvoyer un rayon dans chaque direction échantillonnée, avec l'énergie correspondante.

On divise l'hémisphère des directions réfléchies en N petites cellules d'angle solide constant (*chapitre A, p. 153*). On considère que la surface possède une BRDF f. On note $\Delta\omega_{r_k}$ l'angle solide de la k-ième cellule et ω_{r_k} son centre ($k \in \{1, 2, \ldots, N\}$). On lance un rayon réfléchi dans chaque cellule avec l'énergie suivante :

$$\begin{aligned} L_{r_k} &= \int_{\omega_r \in \Delta\omega_{r_k}} f(\omega_i, \omega_r) \cos\theta_r \, d\omega_r \\ &\approx f(\omega_i, \omega_{r_k}) \cos\theta_{r_k} \, \Delta\omega_{r_k} \end{aligned}$$

Cette méthode, bien que simple à mettre en oeuvre, est totalement inapplicable pratiquement. Outre le fait qu'elle n'exploite pas les directions privilégiées de la BRDF, elle fait croître de façon exponentielle le nombre de rayons gérés par la machine (puisqu'un rayon génère N nouveaux rayons à chaque réflexion, et ainsi de suite, ...). Même dans le cas d'une BRDF purement diffuse, application la plus adaptée, elle devient inutilisable du fait que l'on doit envoyer depuis la source un grand nombre de rayons de façon à bien recouvrir la surface de l'échantillon.

5.4.3.2.3 Échantillonnage d'importance Cette méthode est plus efficace que la précédente. Elle consiste à tirer une direction réfléchie proportionnellement à la BRDF. De cette manière on suit toujours un seul rayon, et dans le cas de BRDFs locales très spéculaires la convergence est plus rapide. Pour une explication détaillée de la méthode, on se reportera à (*chapitre B, p. 165*).

5.4.3.3 Réflexion mixte

Dans le cas des terrains qui sont des revêtements routiers, il nous manque un certain nombre d'informations à propos de la BRDF à appliquer à chaque carreau. En effet, en raison de l'hétérogénétité du matériau, constitué de granulats et de liant, les propriétés en réflexion diffèrent.

Avec les informations dont on dispose (des altitudes) il est impossible de séparer les deux types de matériaux. On peut seulement envisager qu'en deçà d'une certaine altitude, on a un type de réflexion, et au-dessus, un autre. C'est ce qu'on appellera une réflexion mixte.

5.4.4 Modélisation du capteur

Un des problèmes qu'il nous reste à régler est celui de la modélisation du capteur. En effet, il est impossible de stocker tous les rayons qui vont être captés, par manque de place mémoire. On devra utiliser une structure pendant le calcul qui captera l'énergie des rayons lui arrivant dessus. Il faut donc subdiviser l'hémisphère se trouvant au-dessus de l'échantillon en petites cellules.

Le capteur est supposé situé à l'infini, ce qui veut dire que pour un rayon sortant se dirigeant vers le capteur, la cellule où il se situe est trouvée uniquement à partir de

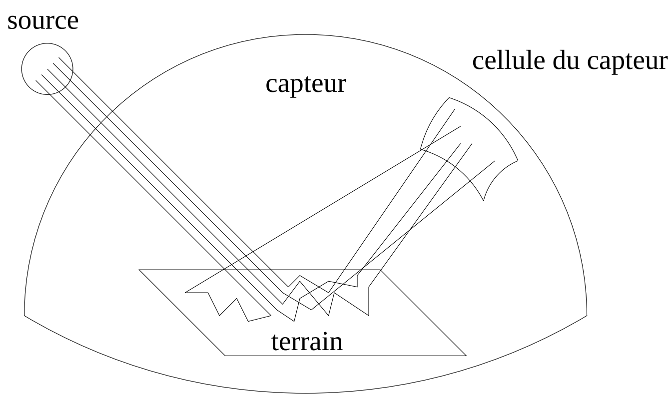

FIG. 5.7 – *capteur virtuel*

sa direction (donc sans utiliser le point sur l'échantillon dont le rayon est issu). Soient les paramètres suivants :

- ω_i la direction d'incidence fixe de la source,
- N le nombre de rayons lancés depuis la source,
- L_0 l'énergie associée à chaque rayon lancé depuis la source,
- $\Delta\omega_r$ l'angle solide d'une cellule du capteur,
- ω_r la direction orientant cette cellule,
- n le nombre de rayons captés dans cette cellule,
- $L_i, i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ l'énergie associée à chaque rayon capté dans cette cellule.

On obtient alors la BRDF calculée de l'échantillon f par la formule :

$$f(\omega_i, \omega_r) = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i}{N\, L_0} \frac{1}{\Delta\omega_r\ \cos\theta_r}$$

5.4.4.0.1 Choix de la subdivision Le choix du type de subdivision (*chapitre A, p. 153*) influence grandement la robustesse du capteur. Il doit être subdivisé de façon suffisamment régulière pour que le nombre de rayons captés dans chaque cellule soit assez important par rapport à la quantité d'énergie captée. Les meilleurs capteurs sont ceux dérivés depuis les polyèdres réguliers. L'avantage est que si la dispersion à l'interieur des cellules est trop importante (c'est-à-dire que le niveau de subdivision du polyèdre est trop important par rapport au nombre de rayons lancés), il est facile de passer à un capteur de niveau inférieur.

5.4.4.0.2 Rayons perdus Il peut arriver que des rayons soient perdus lors du calcul. Les possibilités sont les suivantes :

- le rayon est réfléchi sous le capteur, ce qui est possible puisque le terrain n'est pas infini,
- le rayon n'a pas assez d'énergie pour être détecté et a été supprimé de la simulation,
- le rayon s'est trop réfléchi et a été supprimé parce qu'il bouclait dans la simulation,
- il y a eu des imprécisions numériques lors du calcul des intersections avec le terrain et le rayon s'est trouvé dans une configuration impossible (à l'intérieur du terrain par exemple).

5.4.4.0.3 Post-traitement Il est tout à fait possible d'effectuer un post-traitement sur le capteur avant de fournir un fichier en sortie, de façon à effectuer un lissage. De plus il faudra transformer le résultat du capteur de façon à avoir les valeurs de la BRDF sur les points d'échantillonnage du capteur réel.

5.5 Résultats

5.5.1 Validation de modèles analytiques

5.5.1.1 Génération d'échantillons particuliers

5.5.1.1.1 Terrains continus On va chercher à générer des terrains vérifiant certaines conditions particulières. Puisque la modélisation adoptée est en CSG, il est facile de construire bon nombre de terrains géométriques à base de cylindres [PF90], de cavités [CT81], ou autres.

5.5.1.1.2 Terrains discrets On cherche cette fois à créer une grille, dont la finesse est à la discrétion de l'utilisateur, dont la hauteur vérifie un certain nombre de propriétés (type de distribution des hauteurs, hauteur moyenne, écart-type et auto-corrélation essentiellement). Pour le modèle de He-Sillion [HTSG91], notamment, on va vouloir imposer :

- distribution Gaussienne des hauteurs,
- hauteur moyenne nulle,
- variance des hauteurs imposée valant σ^2,
- distance d'auto-corrélation imposée valant T.

Il est facile de générer une distribution de hauteurs vérifiant une distribution Gaussienne (la moyenne de variables uniformes est une variable Gaussienne), mais se pose le problème d'imposer une auto-corrélation (générer des hauteurs avec une variable Gaussienne nous donne une distance d'auto-corrélation nulle). On ne donnera pas ici les définitions mathématiques avec les distributions de probabilités, mais directement les formules pratiques :

Définition 17 (statistiques sur un terrain) *On dispose d'une fonction $h(x,y)$ donnant la hauteur de la surface au point de coordonnées (x,y), avec $0 \leq x \leq \Delta x$ et $0 \leq y \leq \Delta y$.*

$$\begin{array}{ll}
\textit{hauteur moyenne} & m = \dfrac{1}{\Delta x\, \Delta y} \displaystyle\int_{x=0}^{\Delta x} \int_{y=0}^{\Delta y} h(x,y)\, dx\, dy \\
\textit{variance} & \sigma^2 = \dfrac{1}{\Delta x\, \Delta y} \displaystyle\int_{x=0}^{\Delta x} \int_{y=0}^{\Delta y} \left(h(x,y) - m\right)^2\, dx\, dy \\
\textit{co-variance} & cov(X,Y) = \dfrac{1}{\Delta x\, \Delta y} \displaystyle\int_{x=0}^{\Delta x - X} \int_{y=0}^{\Delta y - Y} h(x,y)\, h(x+X, y+Y)\, dx\, dy \\
\textit{auto-corrélation} & cor(d) = \dfrac{1}{2\pi\, \sigma^2} \left(\displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi} cov(d \cos\theta, d \sin\theta)\, d\theta - m^2 \right)
\end{array}$$

On relie la fonction d'auto-corrélation à la distance d'auto-corrélation de la manière suivante : $cor(d) = e^{-\frac{d^2}{T^2}}$.

L'auto-corrélation traduit, indépendamment de la distribution des hauteurs, si le terrain est bruité (petite distance) ou plus lisse (grande distance). On sait qu'il suffit de convoluer avec une Gaussienne, un terrain généré avec une distribution Gaussienne, pour obtenir l'auto-corrélation désirée.

Définition 18 (convolution avec une Gaussienne)

$$h'(X,Y) = \frac{1}{\Delta x\, \Delta y} \Phi \int_{x=0}^{\Delta x} \int_{y=0}^{\Delta y} h(x,y)\, \frac{1}{2\pi\, T_{gauss}^2} e^{-\frac{(x-X)^2 + (y-Y)^2}{T_{gauss}^2}}\, dx\, dy$$

h' conserve la moyenne et l'écart-type de h, mais sa distance d'auto-corrélation vaut maintenant : $T_{apres} = \sqrt{T_{avant}^2 + T_{gauss}^2}$.

Il est donc facile de générer des terrains avec une auto-corrélation imposée. Afin d'accélérer le calcul de la convolution, on peut utiliser une transformée de Fourier rapide. Les résultats sont les suivants (*figure 5.8, p. 83*) (*figure 5.9, p. 84*).

5.5.1.2 Limitations

On est maintenant capable de générer des terrains vérifiant les propriétés du modèle de He-Sillion. On va pour cela créer des terrains comme précédemment indiqué,

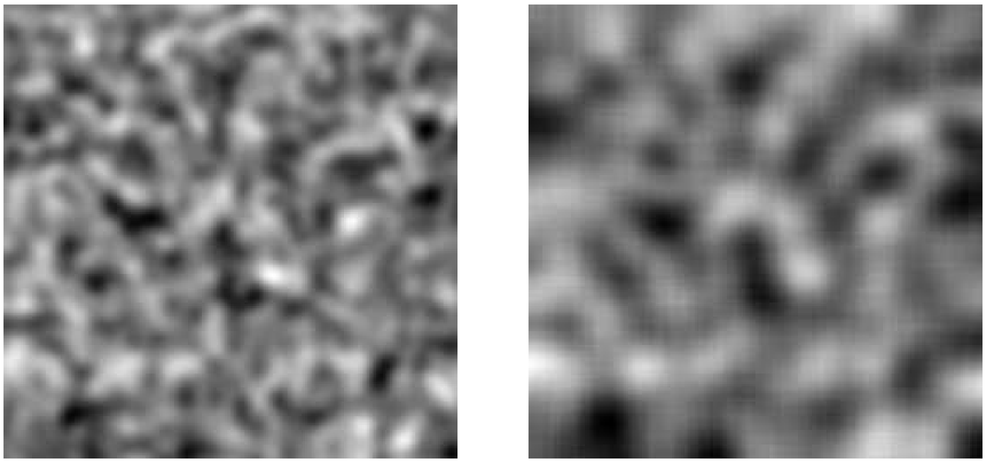

FIG. 5.8 – *terrains Gaussiens, distance d'auto-corrélation : 2,58 à gauche et 4,48 à droite*

avec des rugosités différentes. Étant donné que nos terrains sont un ensemble de carreaux, on va avoir des limites. La distance d'auto-corrélation (T) que l'on va imposer devra être grande par rapport à la taille d'un carreau (Δl), mais petite par rapport aux dimensions totales de l'échantillon de surface ($(n-1)\,\Delta l$, n étant le nombre de sommets par côté du terrain). De même, les bornes entre lesquelles varient la hauteur de la surface doivent être négligeables par rapport aux dimensions totales de l'échantillon de surface, et surtout plus que négligeables par rapport à la distance à la source. Il faut donc que :

$$T \gg \Delta l \text{ et } T \ll (n-1)\,\Delta l \Rightarrow \frac{T}{\Delta l} \approx \frac{(n-1)\,\Delta l}{T} \Rightarrow T \approx \sqrt{n-1}\,\Delta l$$

On peut donc choisir une distance d'auto-corrélation qui est de cet ordre. Il ne reste ensuite plus qu'à choisir un écart-type vérifiant les conditions de distance à la source (on rappelle que l'auto-corrélation est indépendante d'un changement linéaire des altitudes du terrain). Il sera important de vérifier la reproductibilité des expériences en gardant une même rugosité (T/σ) mais en changeant d'échelle les valeurs de T et σ.

5.5.1.3 Résultats

5.5.1.3.1 Banc d'essais On va générer deux terrains Gaussiens carrés, avec les propriétés suivantes (*table 5.1, p. 85*). Ces terrains seront eux-mêmes déclinés en deux changements linéaires des hauteurs, afin d'avoir deux écart-types des hauteurs différents. On ajoute aussi un cinquième terrain.

5.5.1.3.2 Technique de calage On va dès maintenant présenter la technique de calage que l'on utilisera plus avant pour comparer les différents résultats entre eux. La

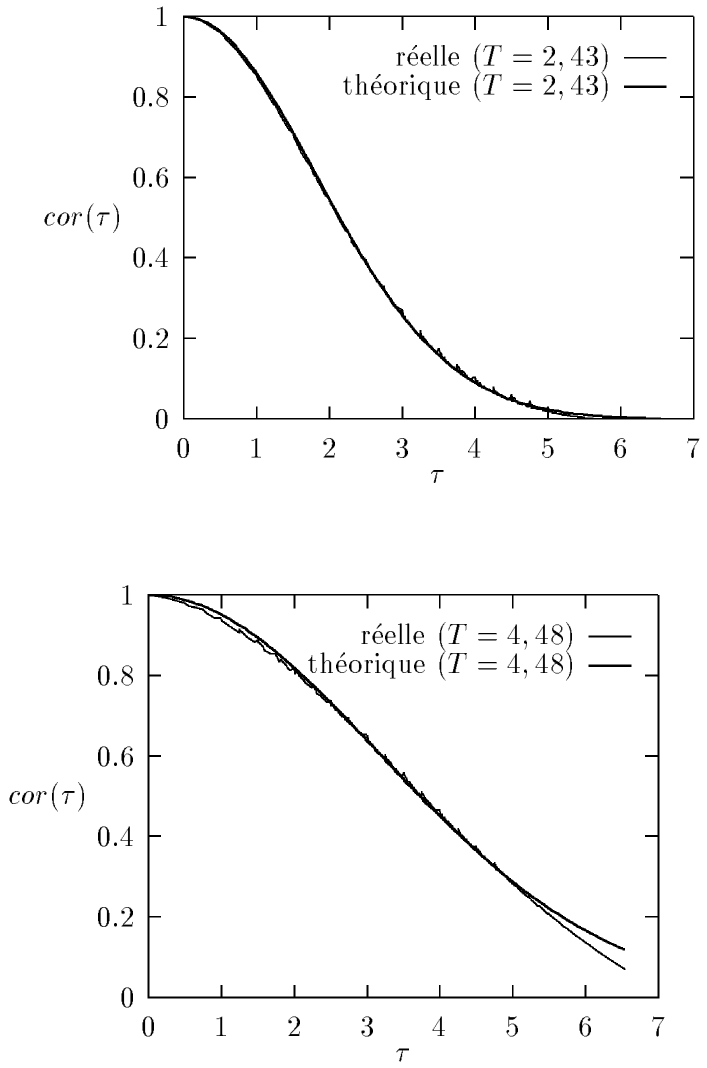

FIG. 5.9 – *terrains Gaussiens, auto-corrélation réelle et théorique*

situation dans laquelle on se trouve est la suivante : on possède une BRDF de référence (f_r) et deux autres BRDFs (f_1 et f_2). On cherche la combinaison linéaire de f_1 et f_2 telle que l'erreur (ϵ_b ou ϵ_c) entre cette combinaison linéaire $c_1 f_1 + c_2 f_2$ et f_r soit minimale. Les valeurs de ces BRDFs sont discrétisées sur un ensemble de N points d'évaluations (correspondant par exemple à un capteur réel), et alors indexées par k. Les coefficients minimisant l'erreur ϵ_b sont alors :

nom	n	T	σ	$\frac{T}{\sigma}$	$\frac{T}{\Delta l}$	$\frac{(n-1)\,\Delta l}{T}$
terrain a1	512	2.335	0.800	2.91875	18.68	27.36
terrain a2	512	2.335	0.219	10.6406	18.68	27.36
terrain b1	512	3.405	1.167	2.91875	27.24	18.76
terrain b2	512	3.405	0.320	10.6406	27.24	18.76
terrain c	512	2.685	0.396	6.77450	21.48	23.79

TAB. 5.1 – *banc de test de terrains Gaussiens*

$$v_{r1} = \sum_{k=1}^{N} f_{r_k}\, f_{1_k}\,,\; v_{r2} = \sum_{k=1}^{N} f_{r_k}\, f_{2_k}$$
$$v_{12} = \sum_{k=1}^{N} f_{1_k}\, f_{2_k}\,,\; v_{11} = \sum_{k=1}^{N} f_{1_k}^2\,,\; v_{22} = \sum_{k=1}^{N} f_{2_k}^2$$
$$c_1 = \frac{v_{22}\, v_{r1} - v_{12}\, v_{r2}}{v_{11}\, v_{22} - v_{12}^2}\,,\; c_2 = \frac{v_{11}\, v_{r2} - v_{12}\, v_{r1}}{v_{11}\, v_{22} - v_{12}^2}$$

Dans le cas de ϵ_c, il suffit de substituer aux valeurs des BRDFs, le produit de ces valeurs par le cosinus de l'angle entre la direction réfléchie et la normale.

5.5.1.3.3 Terrain a1 Le terrain a1 est un terrain plutôt «diffus», c'est-à-dire que c'est un terrain rugueux qui a tendance à réfléchir la lumière de façon diffuse. On pourra observer la forme de la BRDF pour les incidences de 20°, 50°, 80° sur (*figure 5.10, p. 86*). On constate un pic directionnel plutôt diffus, qui s'amplifie uniquement en incidence très rasante.

On peut aussi s'intéresser à ce qui se passe au niveau des réflexions multiples. Pour cela, on donne le pourcentage de rayons ayant subi une réflexion simple ou multiple (*table 5.2, p. 85*). On constate qu'en incidence rasante, on a presque uniquement des réflexions primaires. On peut voir comment se décomposent ces réflexions (*figure 5.11, p. 87*), pour une incidence de 45°.

incidence	primaire	secondaire	tertiaire	reste	énergie réfléchie
20 degrés	72.2134%	23.8913%	3.01349%	0.601556%	3.24358%
50 degrés	81.0909%	15.6338%	2.60451%	0.493806%	4.39677%
80 degrés	93.1777%	5.93294%	0.512387%	0.0481625%	8.40074%

TAB. 5.2 – *terrain a1, répartition des différentes réflexions*

La réflexion primaire apporte la forme générale de la BRDF, alors que les réflexions multiples successives, forment une sorte de lobe dans la direction spéculaire, qui contribue de moins en moins à l'énergie réfléchie.

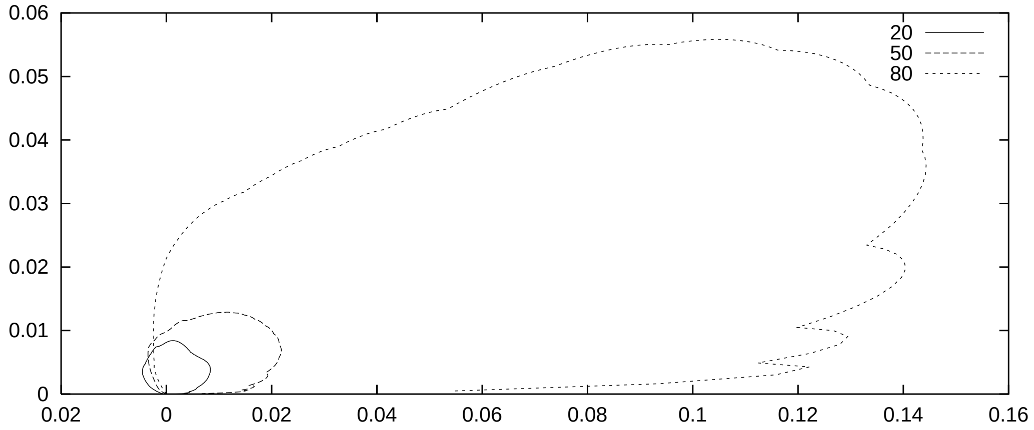

FIG. 5.10 – *terrain a1, BRDF simulé à l'aide du goniophotomètre virtuel*

Si l'on compare ces résultats avec le modèle de He-Sillion, on ne constate pas de ressemblance particulière. En effet, on a surtout une différence dans la direction principale de réflexion (beaucoup plus d'off-spécularité avec notre simulation). Cependant, la «forme générale», c'est-à-dire assez diffuse avec un lobe directionnel diffus est conservée, mais on ne peut pas considérer que les deux résultats soient compatibles.

5.5.1.3.4 Terrain a2 Ce terrain a2 est un terrain beaucoup plus «spéculaire» (qui a tendance à réfléchir la lumière de façon spéculaire), ce qui est logique puisque par rapport au précédent, les hauteurs varient beaucoup moins, ce qui le rend plus «lisse». On a un pic (*figure 5.12, p. 87*), sans presque aucune composante diffuse (la BRDF est vraiment nulle, c'est-à-dire que le capteur n'a reçu aucune énergie, dans les directions éloignées du pic).

On peut aussi s'intéresser à ce qui se passe au niveau des réflexions multiples. Pour cela, on donne le pourcentage de rayons ayant subi une réflexion simple ou multiple (*table 5.3, p. 88*). Contrairement aux résultats précédents, les réflexions multiples deviennent plus importantes pour les incidences rasantes, mais restent quand même assez faibles (*table 5.3, p. 88*). On peut voir comment se décomposent ces réflexions (*figure 5.13, p. 88*), pour une incidence de 45^o.

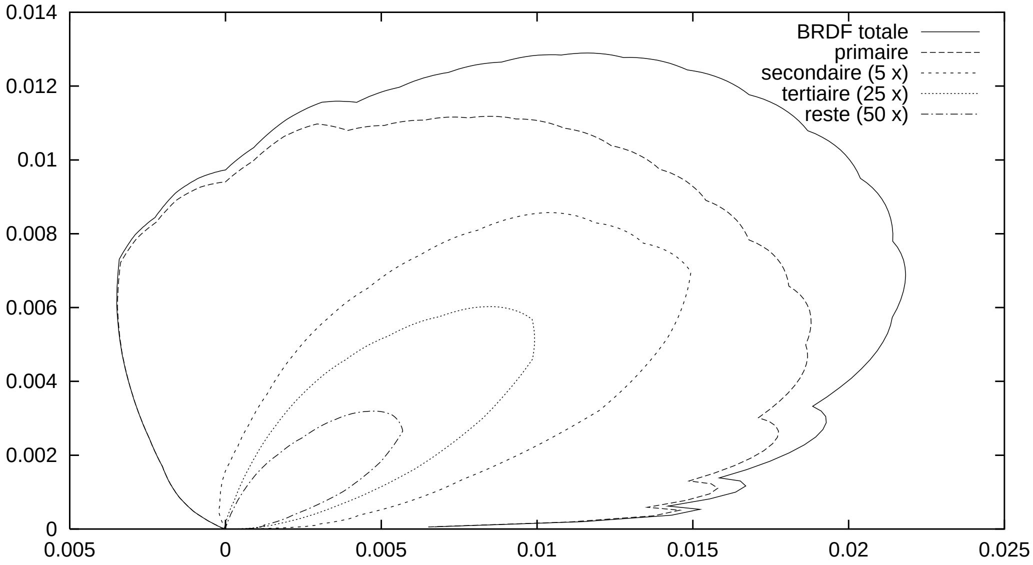

FIG. 5.11 – *terrain a1, répartition des différentes réflexions, incidence de 45°*

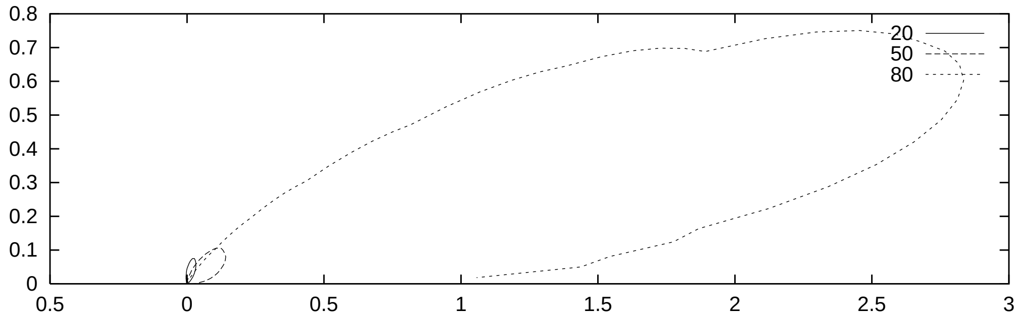

FIG. 5.12 – *terrain a2, BRDF simulé à l'aide du goniophotomètre virtuel*

La réflexion primaire apporte la forme générale de la BRDF, alors que les réflexions multiples successives, forment une sorte de lobe dans la direction spéculaire, qui contribue de moins en moins à l'énergie réfléchie.

incidence	primaire	secondaire	tertiaire	reste	énergie réfléchie
20 degrés	99.9996%	0.00038125%	0%	0%	4.07719%
50 degrés	98.9456%	0.95605%	0.0723375%	0.0120313%	6.11652%
80 degrés	92.0922%	6.82182%	0.90995%	0.11025%	24.3945%

TAB. 5.3 – *terrain a2, répartition des différentes réflexion*

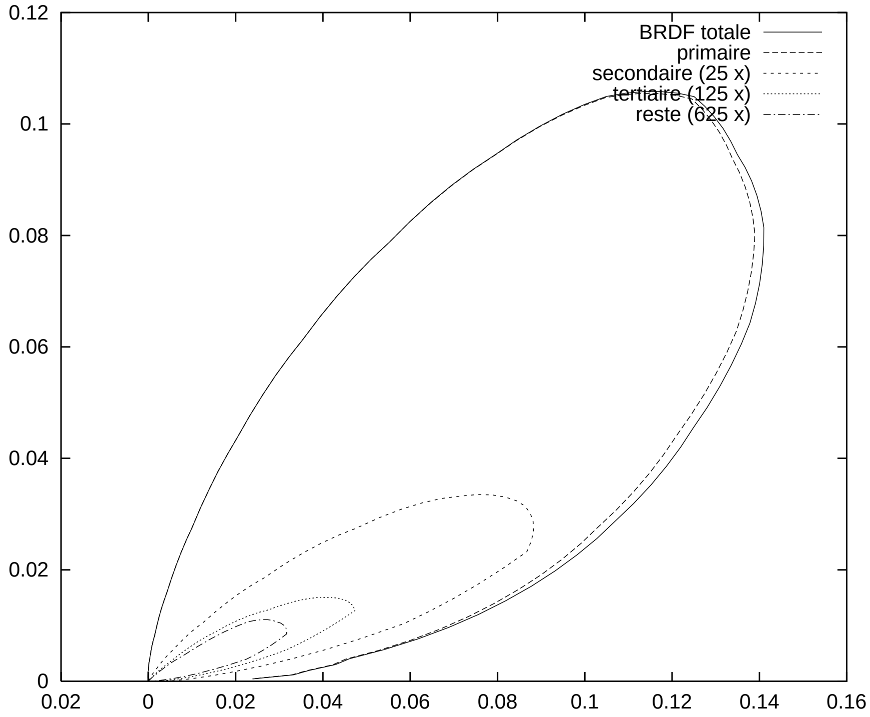

FIG. 5.13 – *terrain a2, répartition des différentes réflexions, incidence de* 45^o

Comme plus avant, nous allons comparer le résultat de cette simulation avec le modèle de He-Sillion. Ce modèle est utilisé de la manière décrite dans [Emb94], où l'on retrouve les paramètres suivants : coefficient de diffus uniforme, coefficient de diffus directionnel, rugosité de la surface, indice de réfraction du matériau. Étant donné qu'il nous reste des coefficients que l'on ne sait pas résoudre (les coefficients du diffus uniforme et du diffus directionnel), on va procéder à un calage automatique comme présenté précedemment de ces deux coefficients sur le résultat obtenu avec le goniophotomètre virtuel.

Les résultats obtenus sont alors les suivants (*figure 5.14, p. 89*). On effectue la comparaison à l'aide de la mesure d'erreur introduite dans (*chapitre 4, p. 61*).

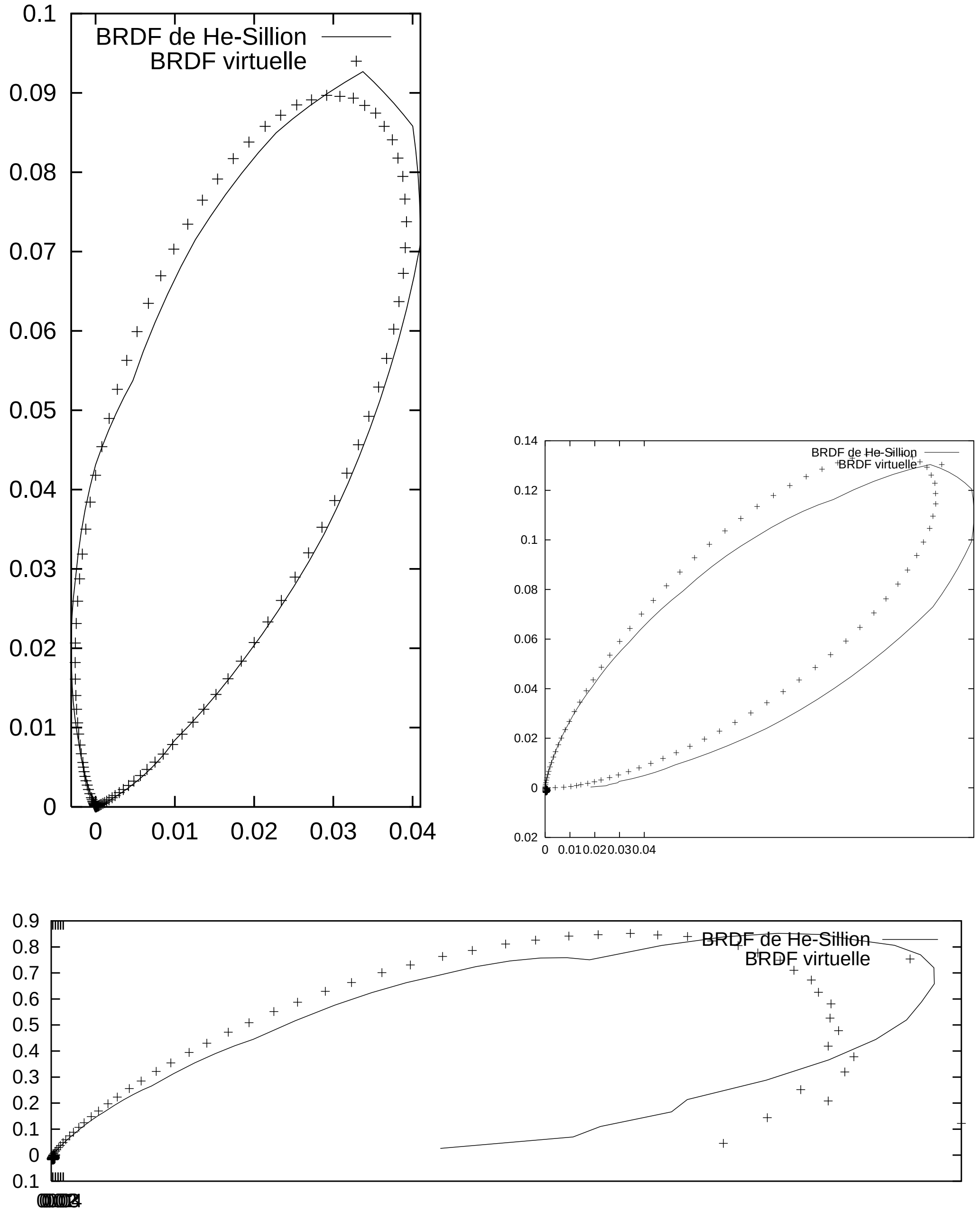

FIG. 5.14 – *comparaison des résultats du goniophotomètre avec un modèle analytique théorique*

On constate cependant, toujours une légère différence dans les directions de spécularité entre les deux modèles. Les erreurs obtenues après calage sont données dans (*table 5.4, p. 90*) (le calage a été effectué de façon à minimiser ϵ_c).

angle d'incidence	ϵ_b	ϵ_c
20^o	29%	29%
50^o	45%	20%
80^o	44%	20%

TAB. 5.4 – *erreur entre un modèle théorique et le résultat d'une simulation du goniophotomètre*

5.5.1.4 Conclusion

En conclusion, on ne peut pas valider complètement le modèle de He-Sillion à l'aide des simulations que l'on a effectuées. Si la validation est satisfaisante dans le cas de terrains peu rugueux, pour des rugosités plus importantes, les différences deviennent trop importantes. Les raisons peuvent être les suivantes :

- on utilise une géométrie qui est beaucoup trop grossière, et il faudrait travailler à des échelles beaucoup plus fines en détails (c'est-à-dire voir le même terrain de beaucoup plus loin),
- les hypothèses de He-Sillion (par exemple que les effets d'ombrage d'un élément de surface sur ses voisins ne sont pas négligeables, particulièrement dans le cas d'une surface très rugueuse).

Une des remarques importantes que l'on peut faire, est que les réflexions d'odre multiples sont des réflexions très spéculaires, et en aucun cas des réflexions diffuses, comme supposées dans de nombreux modèles.

5.5.2 Comparaison avec des résultats expérimentaux

5.5.2.1 Étude des échantillons fournis

Les échantillons que l'on va maintenant étudier sont des relevés expérimentaux de surfaces routières. On a déjà pu observer à quoi ressemblaient visuellement ces échantillons, on va maintenant faire une petite analyse de leurs propriétés statistiques. On constate que les hauteurs mesurées ne vérifient pas une loi normale (*figure 5.15, p. 91*).

Les hauteurs semblent en fait vérifier une sorte de loi log-normale, c'est-à-dire que le logarithme des hauteurs donne plus ou moins une distribution Gaussienne.

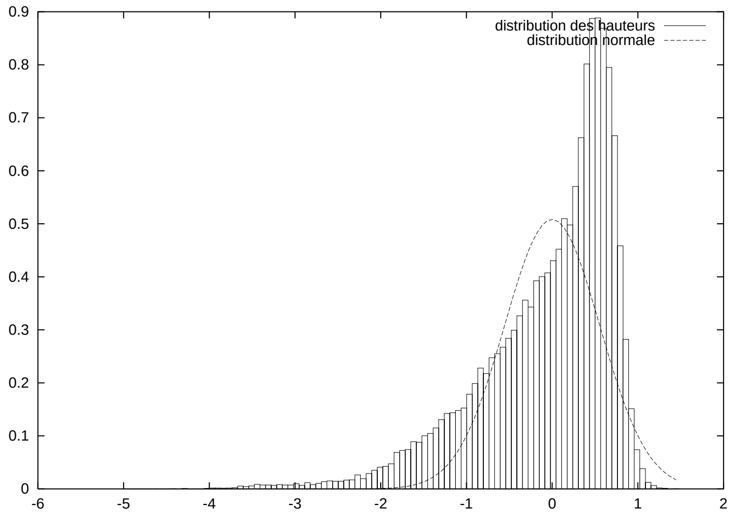

FIG. 5.15 – *distribution réelle et Gaussienne équivalente des hauteurs d'un revêtement routier*

5.5.2.2 Étude des BRDFs calculées et mesurées

5.5.2.2.1 Premier essai Nous allons commencer par effectuer des simulations simples, avec des réflexions purement diffuses et purement spéculaires. Le calcul de la BRDF simulée va être conduit de la manière suivante :

1. pour chaque incidence, simulation avec une réflexion locale purement spéculaire (l'indice de réfraction a été fixé à 1,57). On obtient donc ce que l'on appellera la BRDF simulée spéculaire, et que l'on notera $BRDF_s$
2. pour chaque incidence, simulation avec une réflexion locale purement diffuse (facteur de réflexion fixé à 10%). On obtient donc ce que l'on appellera la BRDF simulée diffuse, et que l'on notera $BRDF_d$,
3. calage, en déterminant les coefficients k_d et k_s de manière à ce que la BRDF simulée finale, $k_d\,BRDF_d + k_s\,BRDF_s$, soit la plus proche possible de la BRDF réelle (en utilisant la technique de calage présentée précédemment).

Les résultats pour le revêtement appelé F397 sont donnés visuellement dans (*figure 5.16, p. 92*), et les erreurs sont données dans (*table 5.5, p. 92*). Il ne faut pas vraiment tenir compte de l'erreur ϵ_b, dans la mesure où lorsque les directions réfléchies sont très rasantes, le résultat de la simulation est bruité, et n'est donc pas représentatif par rapport à son produit avec le cosinus de l'angle zénithal réfléchi.

La première chose que l'on remarque lorsque l'on étudie ces résultats, est l'absence de la rétro-réflexion. A cette exception près, la BRDF simulée est assez fidèle à

angle d'incidence	ϵ_b	ϵ_c
0^o	25%	7%
20^o	30%	8%
40^o	36%	14%
60^o	52%	16%
80^o	70%	19%

TAB. 5.5 – *comparaison des résultats du goniophotomètre avec une BRDF réelle (F397)*

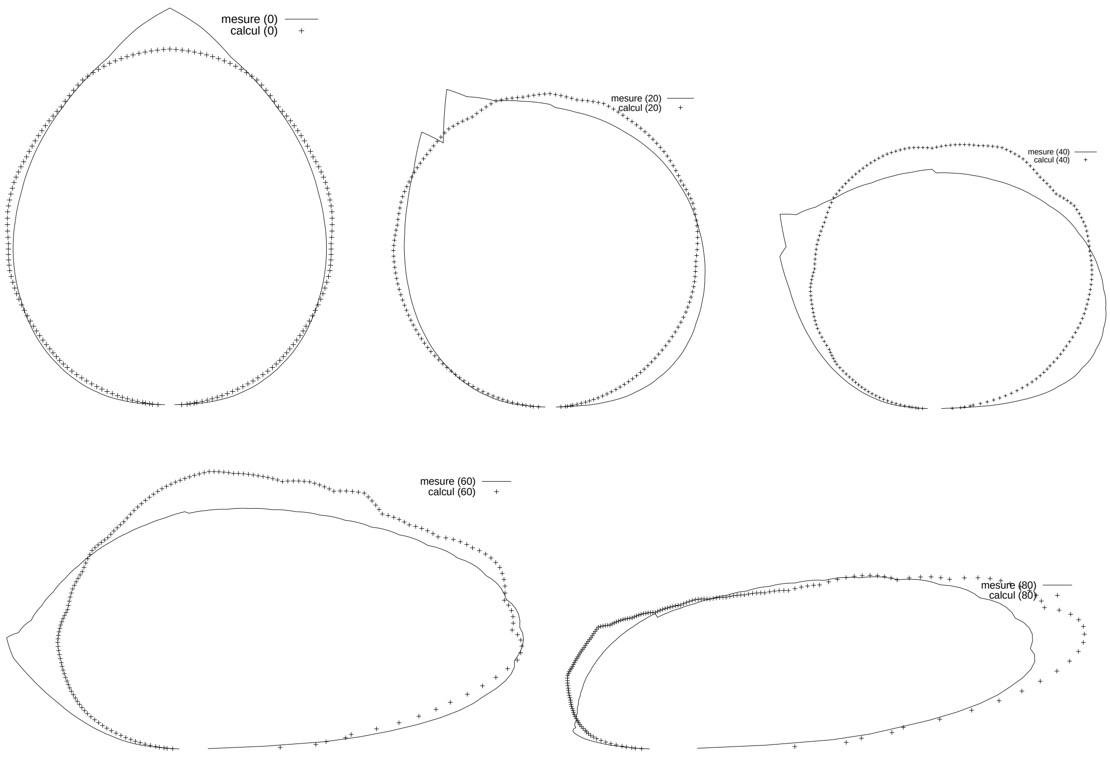

FIG. 5.16 – *comparaison des résultats du goniophotomètre (réflexion locale diffuse et spéculaire) avec une BRDF réelle (F397, incidences de 0, 20, 40, 60 et 80 degrés)*

celle mesurée. Mais, l'absence de cette rétro-réflexion pose vraiment problème : visible dans la plupart des matériaux très rugueux, on ne parvient pas à la simuler en faisant uniquement des réflexions diffuses et spéculaires pures.

5.5.2.2.2 Deuxième essai La question que l'on peut se poser est quelle est l'origine de cette rétro-réflexion ? Ce phénomène, mal expliqué, est pourtant observé dans plusieurs des matériaux dont on a des BRDFs expérimentales : peinture (Cornell), brique (CUReT), revêtement routier (LCPC). Il pourrait être dû à des mécanismes d'absorption et de réémission de la lumière.

On va maintenant utiliser comme modèle de réflexion local une véritable BRDF. L'idéal serait d'avoir la BRDF d'un échantillon de granulat, tels qu'ils sont utilisés pour la confection du revêtement. On ne dispose malheureusement pas de cette information, c'est pourquoi on va utiliser des matériaux «approchants» dont on dispose, tels que :

- plâtre,
- dalle rugueuse,
- ardoise,
- calcaire,
- brique,
- béton.

Ces matériaux sont essentiellement diffus, mêmes si certains possèdent un petit peu de rétro-réflexion. En utilisant le matériau «brique» pour refaire la simulation précédente, et en effectuant un calage uniquement sur la BRDF simulée (sans composante spéculaire donc), on obtient les résultats suivants (*figure 5.17, p. 94*).

Le pic de rétro-réflexion n'est toujours pas flagrant mais il y a quand même une amélioration (l'erreur ϵ_c reste dans les 7%), et le fait que l'énergie repart dans la direction de la source est quand même bien visible.

5.5.3 Conclusion et perspectives

En conclusion, on peut dire que l'on a obtenu un outil, et que maintenant il s'agit de l'utiliser encore plus afin d'obtenir de nouveaux résultats. Au niveau de la validation par l'expérience, les résultats sont encourageants, mais on constate que certains comportements ne sont pas reproductibles avec le modèle simplifié (à la fois de géométrie du terrain et de réflexion locale) que l'on a adopté.

Pour aller plus loin, on ne doit pas perdre de vue que le goniophotomètre virtuel recrée le comportement du goniophotomètre réel avec finalement assez peu d'informations. Si on peut espérer combler un certain nombre de manques dans le futures (notamment sur la réflexion locale), il restera toujours des hypothèse invérifiables. C'est pourquoi il sera intéressant d'étudier le comportement du goniophotomètre virtuel lorsque l'on fait varier ses différents paramètres, afin de pouvoir obtenir une information sur leur influence respective sur le résultat final.

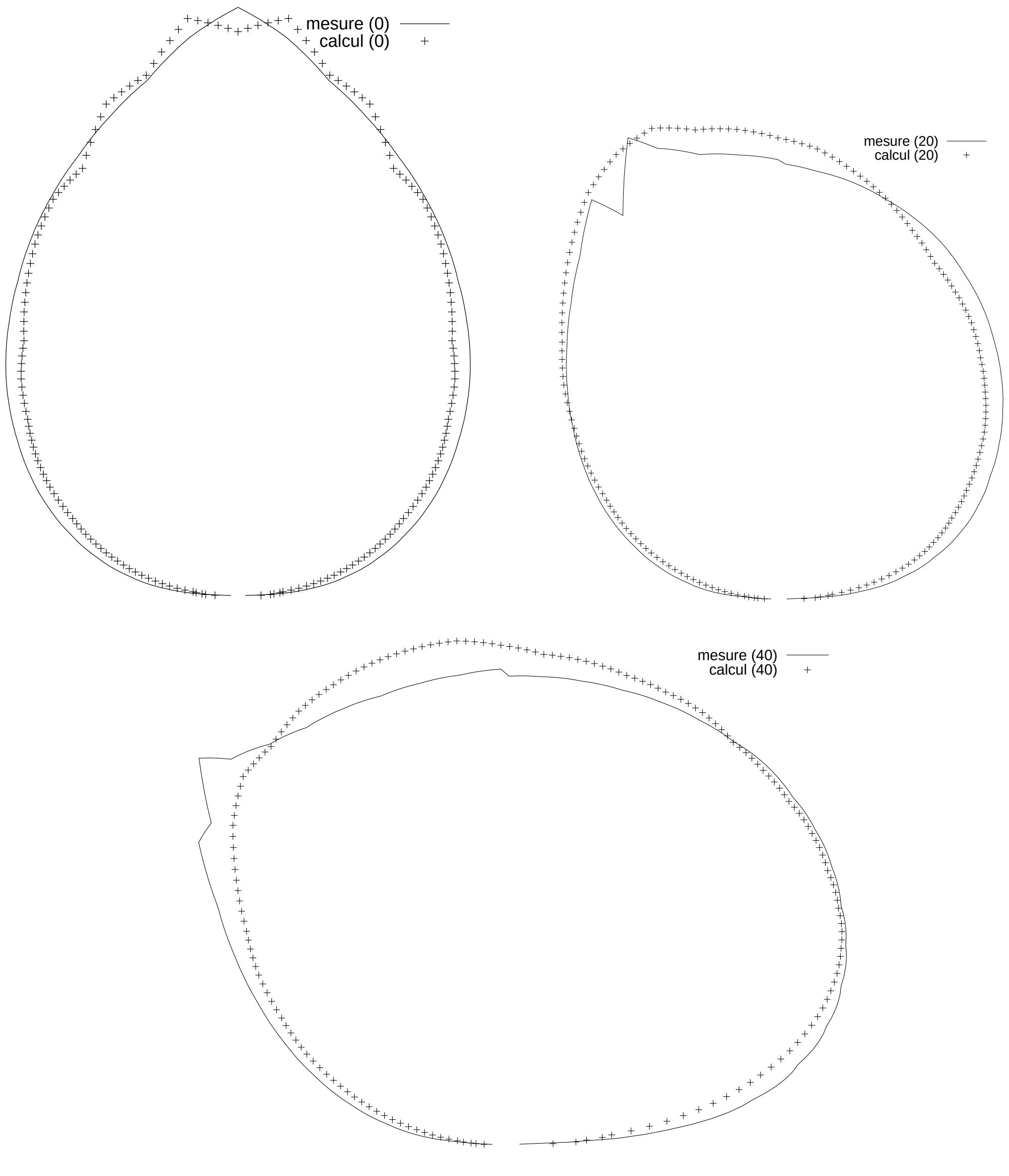

FIG. 5.17 – *comparaison des résultats du goniophotomètre (réflexion locale basée sur une BRDF de brique) avec une BRDF réelle (F397, incidences de 0, 20 et 40 degrés)*

5.5.4 Autres utilisations du goniophotomètre virtuel

Le goniophotomètre virtuel peut avoir d'autres applications que le calcul de BRDFs. En effet, on peut l'utiliser afin de calculer des coefficients de masquage, afin, là aussi de valider des modèles théoriques.

Il peut aussi servir à mesurer, non plus des réflectances, mais des transmittances. Il suffirait d'effectuer quelques petites modifications (capteur situé dans l'hémisphère inférieur, modélisation de la transmission plutôt que de la réflexion).

Une autre utilisation future est aussi la possibilité d'un retour vers les modèles analytiques. Avec une meilleure compréhension des différents phénomènes de réflexion, on sera en mesure d'emettre de nouvelles hypothèses, et de les vérifier immédiatement.

Chapitre 6

Recomposition de BRDF

6.1 Objectif

Nous allons maintenant nous attaquer à un problème complémentaire. Maintenant que l'on dispose de BRDFs, issues de mesures, ou bien issues de simulations, il va falloir les utiliser. Pour cela, on doit être capable de recomposer une BRDF complète, à partir de mesures, éventuellement bruitées. Il faudra que notre recomposition vérifie les propriétés suivantes :

- qualité de la recomposition, c'est-à-dire que la BRDF recomposée devra ressembler le plus possible à la BRDF originale. Nous vérifierons cela à l'aide de nos mesures d'erreurs (*chapitre 4, p. 61*),
- rapidité d'évaluation. Une fois la BRDF recomposée, on doit être en mesure de l'évaluer le plus rapidement possible,
- validité du résultat final. En effet, même si les mesures sont bruitées, le résultat final doit vérifier les propriétés intrinsèques des BRDFs,
- une occupation mémoire minimale.

De nombreux travaux ont été accomplis avec ces objectifs. Des travaux corrélés qui visent à simplifier le problème sont aussi apparus. On pourra citer [DF97] pour rendre valides des mesures de BRDF et [Rus98] pour un nouveau système de coordonnées. Tous ces travaux se situent en amont de la recomposition, et peuvent donc être exploités. Pour ce qui est de la dépendance en longueur d'onde, on s'en affranchira pour l'instant [GMN94].

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques méthodes classiques de recomposition, tout d'abord de façon purement mathématique, ensuite en exploitant les propriétés particulières des BRDFs. Nous introduirons ensuite une nouvelle méthode, et nous effectuerons des comparaisons.

6.2 Harmoniques sphériques

6.2.1 Introduction

Définition 19 *On appelle Ω la sphère unité de $I\!R^3$.*

Les harmoniques sphériques sont une base de fonctions qui permettent de représenter les fonctions continues de Ω dans $\mathbb{C}$. On peut les voir comme une extension des séries de Fourier, avec le même principe de vision à différentes fréquences et l'apparition de coefficients.

Définition 20 *On appelle Ω^+ la restriction de Ω au demi-espace $z \geq 0$.*

Les BRDFs sont des fonctions de Ω^{+2} dans $\mathbb{R}^+$. On va donc pouvoir aussi les représenter à partir d'harmoniques sphériques. En exploitant les restrictions particulières dues aux BRDFs, on va chercher à minimiser le nombre de coefficients à obtenir pour avoir une bonne représentation.

Définition 21 *On paramétrise Ω (resp. Ω^+) de la façon suivante :*

$$(\rho, \theta, \varphi) \to (x, y, z) \quad \begin{cases} x = \rho \cos\varphi \sin\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\theta \end{cases}$$

Avec $\theta \in [0; \pi]$ (resp. $[0; \frac{\pi}{2}]$), $\varphi \in [0; 2\pi]$ et $\rho \in I\!R^+$. On ne va s'intéresser qu'à des directions, donc ρ n'est pas utilisé. (θ, φ) est aussi noté ω. On notera alors $d\omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$.

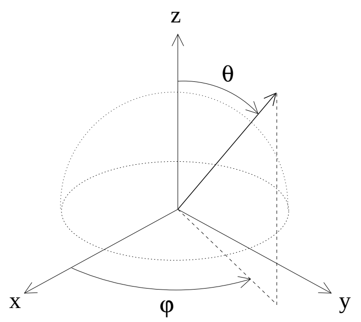

FIG. 6.1 – *paramétrisation de Ω*

Définition 22 (produit interne sur Ω) *soient f et $g : \Omega \to I\!\!C$. On définit leur produit interne par :*

$$f \cdot g = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega \in \Omega} f(\omega) \, \overline{g(\omega)} \, d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\theta, \varphi) \, \overline{g(\theta, \varphi)} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

où $\bar{x}$ est le conjugué du nombre complexe x. On a donc la propriété suivante :

Propriété 7 $g \cdot f = \overline{f \cdot g}$

6.2.2 Polynômes et fonctions de Legendre

6.2.2.1 Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre sont utilisés comme solutions d'équations différentielles classiques en physique. On ne donnera ici que leur définition :

Définition 23 (polynômes de Legendre) *On définit le polynôme de Legendre d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) par :*

$$p_n : [-1;1] \to \mathbb{R}$$
$$p_n(z) = \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dz^n}\left(z^2-1\right)^n$$

Le polynôme de Legendre d'ordre n est donc de degré n. Les polynômes de Legendre sont aussi orthogonaux :

Propriété 8 (orthogonalité des polynômes de Legendre)

$$\int_{-1}^{1} [p_n(z)]^2\, dz = \frac{2}{2n+1}$$
$$\int_{-1}^{1} p_n(z)\, p_m(z)\, dz = 0\,,\ n \neq m$$

Il vérifient aussi la propriété suivante :

Propriété 9 $p_n(-z) = (-1)^n p_n(z)$

La construction des polynômes de Legendre peut se faire par récurrence :

Propriété 10 (construction des polynômes de Legendre)

$$\frac{d}{dz}p_{n+1}(z) - z\frac{d}{dz}p_n(z) = (n+1)p_n(z)$$
$$p_{2n}(0) = (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}$$
$$p_{2n+1}(0) = 0$$

Voici les premiers polynômes de Legendre :

$$
\begin{aligned}
&p_0(z) = 1\\
&p_1(z) = z\\
&p_2(z) = \tfrac{1}{2}(3z^2 - 1)\\
&p_3(z) = \tfrac{1}{2}(5z^3 - 3z)\\
&p_4(z) = \tfrac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 3)\\
&p_5(z) = \tfrac{1}{8}(63z^5 - 70z^3 + 15z)\\
&p_6(z) = \tfrac{1}{16}(231z^6 - 315z^4 + 105z^2 - 5)\\
&p_7(z) = \tfrac{1}{16}(429z^7 - 693z^5 + 315z^3 - 35z)\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

6.2.2.2 Fonctions de Legendre

Définition 24 (fonctions de Legendre) *On définit la fonction de Legendre d'ordre* $(n, m) \in I\!N^2$, $0 \leq m \leq n$ *par :*

$$
\begin{aligned}
p_n^m(z) &= (1 - z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} p_n(z)\\
p_n^{-m}(z) &= \frac{(n-m)!}{(n+m)!} p_n^m(z)
\end{aligned}
$$

On a donc les propriétés suivantes :

Propriété 11 (orthogonalité des fonctions de Legendre)

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \left[p_n^m(z)\right]^2 \, dz &= \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\\
\int_{-1}^{1} p_n^m(z) \, p_s^m(z) \, dz &= 0 \, , \; n \neq s
\end{aligned}
$$

Propriété 12 $p_n^m(-z) = (-1)^{n-m} p_n(z)$

Les fonctions de Legendre ne sont pas des polynômes en z, à cause de leur premier terme. Toutefois, lorsqu'on substitue $\cos\theta$ à z, on obtient des fonctions polynômiales en $\cos\theta$ et $\sin\theta$, en effet :

Propriété 13 $\forall \theta \in [0; \pi]$, $(1 - \cos^2\theta)^{\frac{m}{2}} = \sin^m \theta$

Voici les premières fonctions de Legendre :

$$
\begin{array}{ll}
p_1^1(z) = (1-z^2)^{\frac{1}{2}} & p_1^1(\cos\theta) = \sin\theta \\[1em]
p_2^1(z) = 3(1-z^2)^{\frac{1}{2}} z & p_2^1(\cos\theta) = \frac{3}{2}\sin 2\theta \\
p_2^2(z) = 3(1-z^2) & p_2^2(\cos\theta) = \frac{3}{2}(1-\cos 2\theta) \\[1em]
p_3^1(z) = \frac{3}{2}(1-z^2)^{\frac{1}{2}}(5z^2-1) & p_3^1(\cos\theta) = \frac{3}{8}(\sin\theta + 5\sin 3\theta) \\
p_3^2(z) = 15(1-z^2)z & p_3^2(\cos\theta) = \frac{15}{4}(\cos\theta - \cos 3\theta) \\
p_3^3(z) = 15(1-z^2)^{\frac{3}{2}} & p_3^3(\cos\theta) = \frac{15}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta) \\[1em]
p_4^1(z) = \frac{5}{2}(1-z^2)^{\frac{1}{2}}(7z^3-3z) & p_4^1(\cos\theta) = \frac{5}{16}(2\sin 2\theta + 7\sin 4\theta) \\
p_4^2(z) = \frac{15}{2}(1-z^2)(7z^2-1) & p_4^2(\cos\theta) = \frac{15}{16}(3 + 4\cos 2\theta - 7\cos 4\theta) \\
p_4^3(z) = 105(1-z^2)^{\frac{3}{2}} z & p_4^3(\cos\theta) = \frac{105}{8}(2\sin 2\theta - \sin 4\theta) \\
p_4^4(z) = 105(1-z^2)^2 & p_4^4(\cos\theta) = \frac{105}{8}(3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta) \\
\ldots & \ldots
\end{array}
$$

6.2.2.3 Normalisation

Les fonctions de Legendre telles que présentées ici ne sont pas orthonormées. On définit donc les fonctions de Legendre normalisées :

Définition 25 (fonctions de Legendre normalisées)

$$P_n^m(z) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\, p_n^m(z)$$

On a donc la propriété suivante :

Propriété 14 $P_n^{-m}(z) = P_n^m(z)$

6.2.3 Harmoniques sphériques

6.2.3.1 Cas général

Définition 26 *On appelle harmonique sphérique d'ordre* $(n,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, -n \leq l \leq n$, *la fonction de* $\Omega \to \mathbb{C}$ *suivante :*

$$Y_n^l(\theta,\varphi) = P_n^l(\cos\theta)\, e^{i\,l\,\varphi}$$

Les harmoniques sphériques vérifient les propriétés suivantes :

Propriété 15 (manipulation des harmoniques sphériques)

$$\overline{Y_n^l} = Y_n^{-l}$$
$$Y_n^l \cdot Y_n^l = 1$$
$$Y_{n_1}^{l_1} \cdot Y_{n_2}^{l_2} = 0 \ \mathit{ssi}\ n_1 \neq n_2 \ \mathit{ou}\ \ l_1 \neq l_2$$

Propriété 16 (décomposition sur Ω) *soit f une fonction continue de Ω dans $\mathbb{C}$:*

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{l=-n}^{n} c_n^l\, Y_n^l(\theta,\varphi)$$
$$c_n^l = f\cdot Y_n^l = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\theta,\varphi)\,\overline{Y_n^l(\theta,\varphi)}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\theta,\varphi)\,Y_n^{-l}(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega\in\Omega} f(\omega)\,Y_n^{-l}(\omega)\,d\omega$$

Cette décomposition est exacte. On obtient une approximation de f en limitant la somme en n. Cette limite sera appelée degré de la décomposition et notée d. On constate qu'une représentation de degré 0 est tout simplement une constante valant la moyenne de la fonction originale. En effet :

$$c_0^0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega\in\Omega} f(\omega)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,d\omega$$
$$f_0(\omega') = c_0^0\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\pi}\int_{\omega\in\Omega} f(\omega)\,d\omega$$

6.2.3.2 Restriction aux fonctions réelles

Pour simplifier les notations, on pose :

Définition 27 (harmoniques sphériques réelles)

$$A_n^l(\theta,\varphi) = \Re(Y_n^l(\theta,\varphi)) = P_n^l(\cos\theta)\,\cos(l\varphi)$$
$$B_n^l(\theta,\varphi) = \Im(Y_n^l(\theta,\varphi)) = P_n^l(\cos\theta)\,\sin(l\varphi)$$

Cette décomposition est valable pour les fonctions de Ω dans $\mathbb{C}$. Or on ne s'intéresse qu'aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. On peut donc écrire, pour f à valeurs réelles :

$$f(\theta,\varphi) = \Re\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{l=-n}^{n} c_n^l\, Y_n^l(\theta,\varphi)\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\Re\left(c_n^0\, Y_n^0(\theta,\varphi)\right) + \sum_{l=1}^{n}\Re\left(c_n^l\, Y_n^l(\theta,\varphi) + c_n^{-l}\, Y_n^{-l}(\theta,\varphi)\right)\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\Re\left(c_n^0\, Y_n^0(\theta,\varphi)\right) + \sum_{l=1}^{n} 2\Re\left(c_n^l\, Y_n^l(\theta,\varphi)\right)\right)$$

Car $c_n^l\, Y_n^l$ et $c_n^{-l}\, Y_n^{-l}$ sont conjuguées.

Propriété 17 (restriction des harmoniques sphériques aux fonctions réelles) *Si on pose :*

$$a_n^l = \frac{2^{l \neq 0}}{2\pi} \int_{\omega \in \Omega} f(\omega)\, P_n^l(\cos\theta)\, \cos(l\varphi)\, d\omega = \frac{2^{l \neq 0}}{2\pi} \int_{\omega \in \Omega} f(\omega)\, A_n^l(\omega)\, d\omega$$

$$b_n^l = \frac{2^{l \neq 0}}{2\pi} \int_{\omega \in \Omega} f(\omega)\, P_n^l(\cos\theta)\, \sin(l\varphi)\, d\omega = \frac{2^{l \neq 0}}{2\pi} \int_{\omega \in \Omega} f(\omega)\, B_n^l(\omega)\, d\omega$$

où l'expression booléenne $l \neq 0$ vaut 1 lorsqu'elle est vraie, 0 quand elle est fausse. Il en sera de même pour toutes les expressions booléennes avec les signes $=$ ou $\neq$ utilisées dans les formules par la suite. On a alors :

$$c_n^l = \frac{1}{2^{l \neq 0}}(a_n^l - i b_n^l)$$

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{n} \left(a_n^l\, \cos(l\varphi) + b_n^l\, \sin(l\varphi)\right)\, P_n^l(\cos\theta)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{n} a_n^l\, A_n^l(\omega) + b_n^l\, B_n^l(\omega)$$

6.2.3.3 Restriction à Ω^+

Dans le cas des BRDFs, ce qui nous intéressera ne concernera que la demi-sphère supérieure, donc Ω^+. On peut utiliser cette propriété pour diminuer le nombre de coefficients. Si on dispose d'une fonction f de Ω^+ dans $\mathbb{R}$, on peut étendre cette fonction à $\Omega \to \mathbb{R}$ de la manière suivante :

Définition 28 *soit $f\colon \Omega^+ \to \mathbb{R}$, on étend f à $\Omega \to \mathbb{R}$ par :*

$$\forall(\theta, \varphi) \in [0; \frac{\pi}{2}] \times [0; 2\pi]\,,\; f(\pi - \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)$$

En utilisant cette définition, on peut écrire :

$$c_n^l = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\theta, \varphi)\, P_n^l(\cos\theta)\, e^{-il\varphi}\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\theta, \varphi)\, P_n^l(\cos\theta)\, e^{-il\varphi}\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi +$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\theta, \varphi)\, P_n^l(\cos\theta)\, e^{-il\varphi}\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

En utilisant le changement de variable $\alpha = \pi - \theta$, on peut écrire :

$$c_n^l = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\theta, \varphi)\, P_n^l(\cos\theta)\, e^{-il\varphi}\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi -$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=\frac{\pi}{2}}^{0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\pi - \alpha, \varphi)\, P_n^l(\cos(\pi - \alpha))\, e^{-il\varphi}\, \sin(\pi - \alpha)\, d\alpha\, d\varphi$$

$$= \frac{1 + (-1)^{n-l}}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\theta, \varphi)\, P_n^l(\cos\theta)\, e^{-il\varphi}\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

Donc on obtient :

Propriété 18 (décomposition sur Ω^+, fonctions quelconques)

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{\substack{l=-n\\ n-l\,pair}}^{n} d_n^l\, Y_n^l(\theta,\varphi)$$
$$d_n^l=\frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\theta,\varphi)\, Y_n^{-l}(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_{\omega\in\Omega^+} f(\omega)\, Y_n^{-l}(\omega)\, d\omega$$

Pour les fonctions réelles on a :

Propriété 19 (décomposition sur Ω^+, fonctions réelles)

$$\begin{aligned}
f(\theta,\varphi) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{\substack{l=0\\ n-l\,pair}}^{n}\Big(a_n^l\,\cos(l\varphi)+b_n^l\,\sin(l\varphi)\Big)\,P_n^l(\cos\theta)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{\substack{l=0\\ n-l\,pair}}^{n} a_n^l\,A_n^l(\omega)+b_n^l\,B_n^l(\omega)
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
a_n^l &= \frac{2^{l\neq 0}}{\pi}\int_{\omega\in\Omega^+} f(\omega)\,P_n^l(\cos\theta)\,\cos(l\varphi)\,d\omega=\frac{2^{l\neq 0}}{\pi}\int_{\omega\in\Omega^+} f(\omega)\,A_n^l(\omega)\,d\omega\\
b_n^l &= \frac{2^{l\neq 0}}{\pi}\int_{\omega\in\Omega^+} f(\omega)\,P_n^l(\cos\theta)\,\sin(l\varphi)\,d\omega=\frac{2^{l\neq 0}}{\pi}\int_{\omega\in\Omega^+} f(\omega)\,B_n^l(\omega)\,d\omega
\end{aligned}$$

6.2.3.4 Autres simplifications

Dans le cas où f vérifie la propriété suivante :

Propriété 20 (fonction symétrique) *$f:\Omega\rightarrow I\!R$ est dite symétrique, si, et seulement si :*

$$\forall(\theta,\varphi)\in[0;\pi]\times[0;2\pi],\;\; f(\theta,-\varphi)=f(\theta,2\pi-\varphi)=f(\theta,\varphi)$$

Cette propriété permet d'éliminer des coefficients nuls. En effet, tous les coefficients b_n^l sont nuls, et on peut réduire le domaine d'intégration des coefficients a_n^l par deux. En effet :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\theta,\varphi)\, P_n^l(\cos\theta)\, e^{il\varphi}\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\left(\int_{\varphi=0}^{\pi} f(\theta,\varphi)\, e^{il\varphi}\, d\varphi + \int_{\varphi=\pi}^{2\pi} f(\theta,\varphi)\, e^{il\varphi}\, d\varphi\right) P_n^l(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\left(\int_{\varphi=0}^{\pi} f(\theta,\varphi)\, e^{il\varphi}\, d\varphi - \int_{\phi=\pi,\phi=2\pi-\varphi}^{0} f(\theta,2\pi-\phi)\, e^{il(2\pi-\phi)}\, d\phi\right) P_n^l(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\left(\int_{\varphi=0}^{\pi} f(\theta,\varphi)\, e^{il\varphi}\, d\varphi + \int_{\phi=0}^{\pi} f(\theta,\phi)\, e^{il(2\pi-\phi)}\, d\phi\right) P_n^l(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi} f(\theta,\varphi)\, P_n^l(\cos\theta)\, \left(e^{il\varphi}+e^{il(2\pi-\varphi)}\right)\sin\theta\, d\theta\, d\phi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi} f(\theta,\varphi)\, P_n^l(\cos\theta)\, \cos(l\varphi)\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi
\end{aligned}$$

6.2.4 Application aux BRDF

L'utilisation d'harmoniques sphériques pour la représentation de BRDFs a déjà été abordée dans la littérature [SAWG91]. Cependant, nous tenons ici à présenter de façon claire et très précise les formules à utiliser afin de permettre une utilisation directe.

6.2.4.1 Extension à Ω^2

L'extension des harmoniques sphériques à Ω^2 se fait assez facilement, mais impose une écriture assez lourde puisqu'on se retrouve avec une indexation à quatre variables. Dans le cas général on peut écrire :

Propriété 21 (décomposition sur Ω^2) *soit $f : \Omega^2 \to \mathbb{C}$ et continue :*

$$\begin{aligned}
f(\omega_1,\omega_2) &= \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{l_1=-n_1}^{n_1}\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{l_2=-n_2}^{n_2} c_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2}\, Y_{n_1}^{l_1}(\omega_1)\, Y_{n_2}^{l_2}(\omega_2) \\
c_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} &= \frac{1}{4\pi^2}\int\!\!\int_{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega^2} f(\omega_1,\omega_2)\, Y_{n_1}^{-l_1}(\omega_1)\, Y_{n_2}^{-l_2}(\omega_2)\, d\omega_1\, d\omega_2
\end{aligned}$$

Pour simplifier les notations on pose :

$$Y_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} = Y_{n_1}^{l_1}\, Y_{n_2}^{l_2}$$

6.2.4.2 Restriction aux fonctions réelles

De la même manière que pour Ω, on peut restreindre la décomposition pour les fonctions réelles. Toutefois les calculs pour le démontrer sont longs et lourds et on n'exposera que le résultat :

Propriété 22 *soit $f : \Omega^2 \to I\!R$. On a alors :*

$$f(\omega_1,\omega_2) = \begin{array}{c}\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{l_1=0}^{n_1} \\ \sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{n_2}\end{array} \left(\begin{array}{l} aa_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2}\ \cos(l_1\varphi_1)\ \cos(l_2\varphi_2) + \\ ab_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2}\ \cos(l_1\varphi_1)\ \sin(l_2\varphi_2) + \\ ba_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2}\ \sin(l_1\varphi_1)\ \cos(l_2\varphi_2) + \\ bb_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2}\ \sin(l_1\varphi_1)\ \sin(l_2\varphi_2)\end{array}\right) \begin{array}{l} P_{n_1}^{l_1}(\cos\theta_1) \\ P_{n_2}^{l_2}(\cos\theta_2)\end{array}$$

$$= \begin{array}{c}\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{l_1=0}^{n_1} \\ \sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{n_2}\end{array} \left(\begin{array}{l} aa_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2}\ A_{n_1}^{l_1}(\omega_1)\,A_{n_2}^{l_2}(\omega_2)\ +\ ab_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2}\ A_{n_1}^{l_1}(\omega_1)\,B_{n_2}^{l_2}(\omega_2) + \\ ba_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2}\ B_{n_1}^{l_1}(\omega_1)\,A_{n_2}^{l_2}(\omega_2)\ +\ bb_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2}\ B_{n_1}^{l_1}(\omega_1)\,B_{n_2}^{l_2}(\omega_2)\end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} aa_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} \\ ab_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} \\ ba_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} \\ bb_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2}\end{array}\right\} = \frac{2^{l_1\neq 0 + l_2 \neq 0}}{4\pi^2} \iint\limits_{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega^2} f(\omega_1,\omega_2) \left\{\begin{array}{l} \cos(l_1\varphi_1)\ \cos(l_2\varphi_2) \\ \cos(l_1\varphi_1)\ \sin(l_2\varphi_2) \\ \sin(l_1\varphi_1)\ \cos(l_2\varphi_2) \\ \sin(l_1\varphi_1)\ \sin(l_2\varphi_2)\end{array}\right\} \begin{array}{l} P_{n_1}^{l_1}(\cos\theta_1)\,d\omega_1 \\ P_{n_2}^{l_2}(\cos\theta_2)\,d\omega_2\end{array}$$

$$= \frac{2^{l_1\neq 0 + l_2 \neq 0}}{4\pi^2} \iint\limits_{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega^2} f(\omega_1,\omega_2) \left\{\begin{array}{l} A_{n_1}^{l_1}(\omega_1)\,A_{n_2}^{l_2}(\omega_2) \\ A_{n_1}^{l_1}(\omega_1)\,B_{n_2}^{l_2}(\omega_2) \\ B_{n_1}^{l_1}(\omega_1)\,A_{n_2}^{l_2}(\omega_2) \\ B_{n_1}^{l_1}(\omega_1)\,B_{n_2}^{l_2}(\omega_2)\end{array}\right\} d\omega_1\,d\omega_2$$

6.2.4.3 Restriction à Ω^{+2}

De la même manière que sur Ω^+, on peut réduire le nombre de coefficients. Par rapport à la définition précédente on se retrouve avec :

Propriété 23 (décomposition sur Ω^{+2}, fonctions réelles) *soit $f : \Omega^{+2} \to I\!R$ et continue :*

$$f(\omega_1,\omega_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1=0 \\ n_1-l_1\ pair}}^{n_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_2=0 \\ n_2-l_2\ pair}}^{n_2} \dots$$

$$\left.\begin{array}{l} aa_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} \\ ab_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} \\ ba_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} \\ bb_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2}\end{array}\right\} = \frac{2^{l_1\neq 0 + l_2 \neq 0}}{\pi^2} \iint\limits_{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega^{+2}} \dots$$

6.2.4.4 BRDFs anisotropes

Par rapport aux harmoniques sphériques précédentes, la seule condition supplémentaire apportée par les BRDF anisotropes est le principe de réciprocité, c'est-à-dire :

Définition 29 (principe de réciprocité) *soit f une BRDF, f vérifie :*

$$\forall(\omega_1,\omega_2) \in \Omega^{+2}\ ,\ f(\omega_1,\omega_2) = f(\omega_2,\omega_1)$$

Propriété 24 (manipulation de sommes)

$$\sum_{n_1=0}^{d}\sum_{n_2=n_1+1}^{d} = \sum_{n_2=1}^{d}\sum_{n_1=0}^{n_2-1} = \sum_{n_2=0}^{d}\sum_{n_1=0}^{n_2-1}$$
$$\sum_{l_1=-n_1}^{n_1}\sum_{l_2=l_1+1}^{n_1} = \sum_{l_2=-n_1+1}^{n_1}\sum_{l_1=-n_1}^{l_2-1} = \sum_{l_2=-n_1}^{n_1}\sum_{l_1=-n_1}^{l_2-1}$$

Les démonstrations se font simplement à l'aide de dessins. On justifie les troisièmes membres de l'égalité par le fait que lorsqu'un signe somme est utilisé avec des bornes strictement décroissantes, la somme correspondante est nulle (par une simple convention de notations). On va chercher à utiliser toutes les propriétés précédentes dans la somme suivante :

$$\begin{array}{ll}
S = & \displaystyle\sum_{n_1=0}^{d}\sum_{l_1=-n_1}^{n_1}\sum_{n_2=0}^{d}\sum_{l_2=-n_2}^{n_2} f_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} = \\
(S_1) & \displaystyle\sum_{n_1=0}^{d}\sum_{n_2=0}^{n_1-1}\sum_{l_1=-n_1}^{n_1}\sum_{l_2=-n_2}^{n_2} f_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} + \\
(S_2) & \displaystyle\sum_{n_1=0}^{d}\sum_{l_1=-n_1}^{n_1}\sum_{l_2=-n_1}^{n_1} f_{n_1\,n_1}^{l_1\,l_2} + \\
(S_3) & \displaystyle\sum_{n_1=0}^{d}\sum_{n_2=n_1+1}^{d}\sum_{l_1=-n_1}^{n_1}\sum_{l_2=-n_2}^{n_2} f_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2}
\end{array}$$

En utilisant la première propriété de manipulation des sommes, on peut écrire :

$$S_3 = \sum_{n_2=0}^{d}\sum_{n_1=0}^{n_2-1}\sum_{l_2=-n_2}^{n_2}\sum_{l_1=-n_1}^{n_1} f_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} = \sum_{n_1=0}^{d}\sum_{n_2=0}^{n_1-1}\sum_{l_1=-n_1}^{n_1}\sum_{l_2=-n_2}^{n_2} f_{n_2\,n_1}^{l_2\,l_1}$$

On cherche maintenant à calculer S_2. On peut écrire :

$$\begin{array}{ll}
S_2 = & \displaystyle\sum_{n_1=0}^{d}\sum_{l_1=-n_1}^{n_1}\sum_{l_2=-n_1}^{n_1} f_{n_1\,n_1}^{l_1\,l_2} = \\
(S_{21}) & \displaystyle\sum_{n_1=0}^{d}\sum_{l_1=-n_1}^{n_1}\sum_{l_2=-n_1}^{l_1-1} f_{n_1\,n_1}^{l_1\,l_2} + \\
(S_{22}) & \displaystyle\sum_{n_1=0}^{d}\sum_{l_1=-n_1}^{n_1} f_{n_1\,n_1}^{l_1\,l_1} + \\
(S_{23}) & \displaystyle\sum_{n_1=0}^{d}\sum_{l_1=-n_1}^{n_1}\sum_{l_2=l_1+1}^{n_1} f_{n_1\,n_1}^{l_1\,l_2}
\end{array}$$

En utilisant la deuxième propriété de manipulation des sommes, on peut écrire :

$$S_{23} = \sum_{n_1=0}^{d} \sum_{l_2=-n_1}^{n_1} \sum_{l_1=-n_1}^{l_2-1} f_{n_1\,n_1}^{l_1\,l_2} = \sum_{n_1=0}^{d} \sum_{l_1=-n_1}^{n_1} \sum_{l_2=-n_1}^{l_1-1} f_{n_1\,n_1}^{l_2\,l_1}$$

On a donc : $$S_2 = \sum_{n_1=0}^{d} \sum_{l_1=-n_1}^{n_1} \sum_{l_2=-n_1}^{l_1} \frac{f_{n_1\,n_1}^{l_1\,l_2} + f_{n_1\,n_1}^{l_2\,l_1}}{2^{l_1=l_2}}$$

Et au final : $$S = \sum_{n_1=0}^{d} \sum_{l_1=-n_1}^{n_1} \sum_{n_2=0}^{n_1} \sum_{l_2=-n_2}^{\substack{l_1(n_2=n_1)\\ n_2(n_2<n_1)}} \frac{f_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} + f_{n_2\,n_1}^{l_2\,l_1}}{2^{(n_1=n_2)(l_1=l_2)}}$$

A cause du principe de réciprocité, on peut écrire :

$$c_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} = c_{n_2\,n_1}^{l_2\,l_1}$$

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{l_1=-n_1}^{n_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{l_2=-n_2}^{n_2} c_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2}\, Y_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2}(\omega_1, \omega_2)$$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{l_1=-n_1}^{n_1} \sum_{n_2=0}^{n_1} \sum_{l_2=-n_2}^{\substack{l_1(n_2=n_1)\\ n_2(n_2<n_1)}} \frac{c_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2}}{2^{(n_1=n_2)(l_1=l_2)}} \left(Y_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2}(\omega_1, \omega_2) + Y_{n_2\,n_1}^{l_2\,l_1}(\omega_1, \omega_2)\right)$$

On diminue ainsi le nombre de coefficients. En utilisant le fait que la BRDF est définie sur Ω^{+2} on se retrouve avec la décomposition suivante :

Propriété 25 (décomposition d'une BRDF anisotrope) *soit $f : \Omega^{+2} \to I\!R$, une BRDF anisotrope. On a alors :*

$$f(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1=0\\ n_1-l_1\ pair}}^{n_1} \sum_{n_2=0}^{n_1} \sum_{\substack{l_2=0\\ n_2-l_2\ pair}}^{\substack{l_1(n_2=n_1)\\ n_2(n_2<n_1)}} \left(\begin{array}{l} aa_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} \left(A_{n_1}^{l_1}(\omega_1)\, A_{n_2}^{l_2}(\omega_2) + A_{n_2}^{l_2}(\omega_1)\, A_{n_1}^{l_1}(\omega_2)\right) + \\ ab_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} \left(A_{n_1}^{l_1}(\omega_1)\, B_{n_2}^{l_2}(\omega_2) + A_{n_2}^{l_2}(\omega_1)\, B_{n_1}^{l_1}(\omega_2)\right) + \\ ba_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} \left(B_{n_1}^{l_1}(\omega_1)\, A_{n_2}^{l_2}(\omega_2) + B_{n_2}^{l_2}(\omega_1)\, A_{n_1}^{l_1}(\omega_2)\right) + \\ bb_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} \left(B_{n_1}^{l_1}(\omega_1)\, B_{n_2}^{l_2}(\omega_2) + B_{n_2}^{l_2}(\omega_1)\, B_{n_1}^{l_1}(\omega_2)\right) \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} aa_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} \\ ab_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} \\ ba_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} \\ bb_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} \end{array} \right\} = \frac{2^{l_1\neq 0 + l_2 \neq 0}}{2^{(n_1=n_2)(l_1=l_2)}\,\pi^2} \iint_{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega^{+2}} f(\omega_1, \omega_2) \left\{ \begin{array}{c} A_{n_1}^{l_1}(\omega_1)\, A_{n_2}^{l_2}(\omega_2) \\ A_{n_1}^{l_1}(\omega_1)\, B_{n_2}^{l_2}(\omega_2) \\ B_{n_1}^{l_1}(\omega_1)\, A_{n_2}^{l_2}(\omega_2) \\ B_{n_1}^{l_1}(\omega_1)\, B_{n_2}^{l_2}(\omega_2) \end{array} \right\} d\omega_1\, d\omega_2$$

Exprimée de cette manière, la somme est compacte, mais présente des termes superflus. En effet $ab_{n_1\,n_2}^{l_1\,0}$, $ba_{n_1\,n_2}^{0\,l_2}$, $bb_{n_1\,n_2}^{l_1\,0}$, $bb_{n_1\,n_2}^{0\,l_2}$ sont nuls. On peut essayer d'évaluer le nombre maximum de coefficients potentiellement non nuls dans cette formule. C'est un calcul très pénible (à cause des multiples cas de parité) mais assez simple. Le résultat est :

Propriété 26 (nombre de coefficients pour une BRDF anisotrope)

$$\begin{array}{ll} \textit{(d pair)} & \frac{1}{8}d^4 + \frac{3}{4}d^3 + \frac{17}{8}d^2 + \frac{11}{4}d + 1 \\ \textit{(d impair)} & \frac{1}{8}d^4 + \frac{3}{4}d^3 + \frac{17}{8}d^2 + \frac{11}{4}d + \frac{5}{4} \end{array}$$

6.2.4.5 BRDFs anisotropes particulières

Dans la plupart des cas, les BRDFs anisotropes dont on dispose ont quand même des propriétés particulières. Notamment des propriétés de symétrie. Interessons nous aux BRDFs vérifiant les propriétés suivantes :

Définition 30 (BRDFs symétriques) *soit f une BRDF, f est dite symétrique si elle vérifie :*

$$\begin{array}{cc} & \forall\,((\theta_1,\varphi_1),(\theta_2,\varphi_2)) \in \left([0;\frac{\pi}{2}]\times[0;2\pi]\right)^2 \\ (1) & f(\theta_1,\varphi_1,\theta_2,\varphi_2) = f(\theta_1,-\varphi_1,\theta_2,-\varphi_2) \\ (2) & f(\theta_1,\varphi_1,\theta_2,\varphi_2) = f(\theta_1,\pi+\varphi_1,\theta_2,\pi+\varphi_2) \end{array}$$

Ces deux propriétés sont notamment vérifiées par les modèles de Ward [War92a] et de Lafortune [LFTG97], dans le cas anisotrope. Elles permettent de diminuer grandement le nombre de coefficients. En effet, on peut montrer que :

$$\begin{array}{lll} aa_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} & = 0 & \text{pour } l_1 - l_2 \text{ impair, déduit de (1) et (2)} \\ ab_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} & = 0 & \text{tout le temps, déduit de (1)} \\ ba_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} & = 0 & \text{tout le temps, déduit de (1)} \\ bb_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} & = 0 & \text{pour } l_1 - l_2 \text{ impair, déduit de (1) et (2)} \end{array}$$

De plus, des regroupements de domaine peuvent être effectués, et on se retrouve avec la formule suivante :

Propriété 27 (décomposition d'une BRDF anisotrope symétrique) *soit* $f : \Omega^{+2} \rightarrow I\!R$, *une BRDF anisotrope symétrique. On a alors :*

$$f(\omega_1, \omega_2) = \begin{array}{cc} \displaystyle\sum_{n_1=0}^{\infty} & \displaystyle\sum_{\substack{l_1=0 \\ n_1-l_1\, pair \\ l_1(n_2=n_1)}}^{n_1} \\ \displaystyle\sum_{\substack{n_2=0 \\ n_1-n_2\, pair}}^{n_1} & \displaystyle\sum_{\substack{n_2(n_2<n_1) \\ l_2=0 \\ n_2-l_2\, pair}} \end{array} \left(\begin{array}{l} aa_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} \left(A_{n_1}^{l_1}(\omega_1)\, A_{n_2}^{l_2}(\omega_2) + A_{n_2}^{l_2}(\omega_1)\, A_{n_1}^{l_1}(\omega_2) \right) + \\ bb_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} \left(B_{n_1}^{l_1}(\omega_1)\, B_{n_2}^{l_2}(\omega_2) + B_{n_2}^{l_2}(\omega_1)\, B_{n_1}^{l_1}(\omega_2) \right) \end{array} \right)$$

$$aa_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} = \frac{4 \cdot 2^{l_1 \neq 0 + l_2 \neq 0}}{2^{(n_1=n_2)(l_1=l_2)}\,\pi^2} \begin{array}{c} \displaystyle\int_{\theta_1=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi_1=0}^{\frac{\pi}{2}} \\ \displaystyle\int_{\theta_2=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi_2=0}^{\frac{\pi}{2}} \end{array} \begin{array}{c} (f(\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2) + f(\theta_1, -\phi_1, \theta_2, \phi_2)) + (-1)^{l_1} \\ (f(\theta_1, \pi - \phi_1, \theta_2, \phi_2) + f(\theta_1, \pi + \phi_1, \theta_2, \phi_2)) \\ \cos(l_1\phi_1)\, \cos(l_2\phi_2)\, d\omega_1\, d\omega_2 \end{array}$$

$$bb_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} = \frac{4 \cdot 2^{l_1 \neq 0 + l_2 \neq 0}}{2^{(n_1=n_2)(l_1=l_2)}\,\pi^2} \begin{array}{c} \displaystyle\int_{\theta_1=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi_1=0}^{\frac{\pi}{2}} \\ \displaystyle\int_{\theta_2=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi_2=0}^{\frac{\pi}{2}} \end{array} \begin{array}{c} (f(\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2) + f(\theta_1, -\phi_1, \theta_2, \phi_2)) - (-1)^{l_1} \\ (f(\theta_1, \pi - \phi_1, \theta_2, \phi_2) + f(\theta_1, \pi + \phi_1, \theta_2, \phi_2)) \\ \sin(l_1\phi_1)\, \sin(l_2\phi_2)\, d\omega_1\, d\omega_2 \end{array}$$

La somme présente toujours des termes superflus. En effet, tous les $bb_{n_1\,n_2}^{l_1\,0}$ et $bb_{n_1\,n_2}^{0\,l_2}$ sont nuls. On peut essayer d'évaluer le nombre maximum de coefficients potentiellement non nuls dans cette formule. C'est un calcul très pénible (à cause des multiples cas de parité) mais assez simple. Le résultat est :

Propriété 28 (nombre de coefficients pour une BRDF anisotrope symétrique)

$$\begin{array}{ll} \textit{(d pair)} & \frac{1}{32}d^4 + \frac{1}{3}d^3 + \frac{11}{8}d^2 + \frac{8}{3}d + 2 \\ \textit{(d impair)} & \frac{1}{32}d^4 + \frac{1}{3}d^3 + \frac{19}{16}d^2 + \frac{5}{3}d + \frac{25}{32} \end{array}$$

6.2.4.6 BRDFs isotropes

Par rapport aux BRDFs anisotropes, on ajoute une nouvelle condition, c'est l'isotropie. Pour une définition complète de l'isotropie, on se reportera à (*paragraphe 2.3.3, p. 29*). On rappelle juste qu'une condition nécessaire d'isotropie est que la somme des dérivées partielles de la BRDF par rapport à chacun de ses angles azimutaux doit être nulle.

Pour exploiter cette propriété on va répartir des harmoniques sphériques complexes sur Ω^{+2}. On a donc :

$$
\begin{aligned}
f(\omega_1,\omega_2) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1=-n_1 \\ n_1-l_1\ pair}}^{n_1} \sum_{n_2=0}^{n_1} \sum_{\substack{l_2=-n_2 \\ n_2-l_2\ pair}}^{\substack{l_1(n_2=n_1) \\ n_2(n_2<n_1)}} c_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2}\, Z_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2}(\omega_1,\omega_2) \\
Z_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2}(\omega_1,\omega_2) &= Y_{n_1}^{l_1}(\omega_1)\, Y_{n_2}^{l_2}(\omega_2) + Y_{n_2}^{l_2}(\omega_1)\, Y_{n_1}^{l_1}(\omega_2) \\
c_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2} &= \frac{1}{2^{(n_1=n_2)(l_1=l_2)}\,\pi^2} \iint\limits_{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega^{+2}} f(\omega_1,\omega_2)\, Y_{n_1}^{-l_1}(\omega_1)\, Y_{n_2}^{-l_2}(\omega_2)\, d\omega_1\, d\omega_2
\end{aligned}
$$

Les fonctions Z définissent une base, on cherche donc celles qui sont isotropes. On doit donc avoir :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Z_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2}}{\partial\varphi_1}(\omega_1,\omega_2) &= i\,l_1\, Y_{n_1}^{l_1}(\omega_1)\, Y_{n_2}^{l_2}(\omega_2) + i\,l_2\, Y_{n_2}^{l_2}(\omega_1)\, Y_{n_1}^{l_1}(\omega_2) \\
\frac{\partial Z_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2}}{\partial\varphi_2}(\omega_1,\omega_2) &= i\,l_2\, Y_{n_1}^{l_1}(\omega_1)\, Y_{n_2}^{l_2}(\omega_2) + i\,l_1\, Y_{n_2}^{l_2}(\omega_1)\, Y_{n_1}^{l_1}(\omega_2) \\
\frac{\partial Z_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2}}{\partial\varphi_1} &+ \frac{\partial Z_{n_1\,n_2}^{l_1\,l_2}}{\partial\varphi_2} = 0
\end{aligned}
$$

Étant donné que les Y forment une base linéairement indépendante, la seule solution est que $l_1 + l_2 = 0$. On va chercher à limiter notre somme à ce cas. Écrire directement $l_2 = -l_1$ dans la somme n'est pas juste, car les domaines de variations de l_2 ne lui permettent pas forcément de valoir $-l_1$. On cherche donc quand cela est possible :

$$
\begin{array}{lll}
\text{1er cas : } n_2 < n_1 & & \Rightarrow -n_2 \le l_2 \le n_2 \\
& & \Rightarrow -n_2 \le -l_1 \le n_2 \\
& \text{1er sous-cas : } \ l_1 \ge 0 & \Rightarrow n_2 \ge l_1 \ge -n_2 \\
& & \Rightarrow l_1 \le n_2 \\
& \text{2ème sous-cas : } \ l_1 \le 0 & \Rightarrow -n_2 \le -l_1 \le n_2 \\
& & \Rightarrow l_1 \ge -n_2 \\
\text{2ème cas : } n_2 = n_1 & & \Rightarrow -n_1 \le l_2 \le l_1 \\
& & \Rightarrow -n_1 \le -l_1 \le l_1 \\
& & \Rightarrow l_1 \ge 0
\end{array}
$$

Ce qui nous amène au résultat suivant :

$$
f(\omega_1,\omega_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{\substack{n_2=0 \\ n_1-n_2\ pair}}^{n_1} \sum_{\substack{l=-n_2\,(n_2<n_1) \\ l=0(n_2=n_1) \\ n_2-l\ pair}}^{n_2} c_{n_1\,n_2}^{l\,-l}\, Z_{n_1\,n_2}^{l\,-l}(\omega_1,\omega_2)
$$

Le fait que $n_1 - n_2$ soit pair est déduit de $n_1 - l$ pair, $n_2 + l$ pair ($l_1 = l, l_2 = -l$). On cherche donc à calculer les $c_{n_1\,n_2}^{l\,-l}$. En effectuant les changements de variables $\varphi = \varphi_1$ et $\phi = \varphi_2 - \varphi_1$, on obtient :

$$c_{n_1\,n_2}^{l\,-l} = \frac{1}{2^{(n_1=n_2)(l=0)}\,\pi^2} \int_{\theta_1=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta_2=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=-\varphi}^{2\pi-\varphi} \begin{array}{c} f(\theta_1,\theta_2,\phi)\, P_{n_1}^l(\cos\theta_1)\, P_{n_2}^l(\cos\theta_2) \\ e^{il\phi}\, sin\theta_1\, d\theta_1\, d\varphi\, sin\theta_2\, d\theta_2\, d\phi \end{array}$$

Or on peut calculer l'intégrale I suivante :

$$\begin{array}{c} I = \displaystyle\int_{\phi=-\varphi}^{2\pi-\varphi} f(\theta_1,\theta_2,\phi)\, e^{il\phi}\, d\phi \\ = \left(\displaystyle\int_{\phi=-\varphi}^{0}(1) + \int_{\phi=0}^{\varphi}(2) + \int_{\phi=\varphi}^{\pi-\varphi}(3) + \int_{\phi=\pi-\varphi}^{\pi}(4) + \int_{\phi=\pi}^{\pi+\varphi}(5) + \int_{\phi=\pi+\varphi}^{2\pi-\varphi}(6)\right) f(\theta_1,\theta_2,\phi)\, e^{il\phi}\, d\phi \end{array}$$

En effectuant les changements de variables respectifs $\phi_1 = -\phi$, $\phi_2 = \phi$, $\phi_3 = \phi$, $\phi_4 = \phi$, $\phi_5 = 2\pi - \phi$, $\phi_6 = 2\pi - \phi$ dans (1) à (6), et en utilisant le fait que $f(\theta_1,\theta_2,\phi) = f(\theta_1,\theta_2,-\phi) = f(\theta_1,\theta_2,2\pi-\phi)$, on obtient :

$$\begin{array}{c} I = \displaystyle\int_{\phi_1=0}^{\varphi} f(\theta_1,\theta_2,\phi_1)\, e^{-il\phi_1}\, d\phi_1 + \int_{\phi_2=0}^{\varphi} f(\theta_1,\theta_2,\phi_2)\, e^{il\phi_2}\, d\phi_2 + \\ \displaystyle\int_{\phi_3=\varphi}^{\pi-\varphi} f(\theta_1,\theta_2,\phi_3)\, e^{il\phi_3}\, d\phi_3 + \int_{\phi_4=\pi-\varphi}^{\pi} f(\theta_1,\theta_2,\phi_4)\, e^{il\phi_4}\, d\phi_4 + \\ \displaystyle\int_{\phi_5=\pi-\varphi}^{\pi} f(\theta_1,\theta_2,\phi_5)\, e^{-il\phi_5}\, d\phi_5 + \int_{\phi_6=\varphi}^{\pi-\varphi} f(\theta_1,\theta_2,\phi_6)\, e^{-il\phi_6}\, d\phi_6 \\ = 2\displaystyle\int_{\phi=0}^{\pi} f(\theta_1,\theta_2,\phi)\, \cos(l\phi)\, d\phi \end{array}$$

D'où :

$$c_{n_1\,n_2}^{l\,-l} = \frac{4}{2^{(n_1=n_2)(l=0)}\,\pi} \int_{\theta_1=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\theta_2=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=0}^{\pi} \begin{array}{c} f(\theta_1,\theta_2,\phi)\, P_{n_1}^l(\cos\theta_1)\, P_{n_2}^l(\cos\theta_2) \\ \cos(l\phi)\, sin\theta_1\, d\theta_1\, sin\theta_2\, d\theta_2\, d\phi \end{array}$$

Le fait que $c_{n_1\,n_2}^{l\,-l}$ soit réel était prévisible dans la mesure où la fonction ne doit dépendre que de $|\varphi_1 - \varphi_2|$ et donc que les termes en $\sin(l\phi)$ ne doivent pas apparaître. On constate aussi que $c_{n_1\,n_2}^{l\,-l} = c_{n_1\,n_2}^{-l\,l}$. On réécrit la décomposition sous la forme suivante :

$$f(\omega_1,\omega_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{\substack{n_2=0 \\ n_1-n_2\, pair}}^{n_1-1} \sum_{\substack{l=0 \\ n_2-l\, pair}}^{n_2} \frac{c_{n_1\,n_2}^{l\,-l}}{2^{l=0}} \left(Z_{n_1\,n_2}^{l\,-l}(\omega_1,\omega_2) + Z_{n_1\,n_2}^{-l\,l}(\omega_1,\omega_2) \right) \\ + \displaystyle\sum_{\substack{l=0 \\ n_1-l\, pair}}^{n_1} c_{n_1\,n_1}^{l\,-l}\, Z_{n_1\,n_1}^{l\,-l}(\omega_1,\omega_2) \end{array} \right)$$

On peut aussi facilement démontrer que :

Propriété 29 (manipulation des fonctions Z)

$$\begin{array}{c} Q_{n_1\,n_2}^l(\cos\theta_1,\cos\theta_2) = P_{n_1}^l(\cos\theta_1)\, P_{n_2}^l(\cos\theta_2) + P_{n_2}^l(\cos\theta_1)\, P_{n_1}^l(\cos\theta_2) \\ Z_{n_1\,n_2}^{l\,-l}(\omega_1,\omega_2) + Z_{n_1\,n_2}^{-l\,l}(\omega_1,\omega_2) = 2\,\cos(l(\varphi_1-\varphi_2))\, Q_{n_1\,n_2}^l(\cos\theta_1,\cos\theta_2) \\ Z_{n_1\,n_1}^{l\,-l}(\omega_1,\omega_2) = \cos(l(\varphi_1-\varphi_2))\, Q_{n_1\,n_1}^l(\cos\theta_1,\cos\theta_2) \end{array}$$

Ce qui fait que l'on peut écrire :

$$f(\omega_1,\omega_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{\substack{n_2=0 \\ n_1-n_2\, pair}}^{n_1} \sum_{\substack{l=0 \\ n_2-l\, pair}}^{n_2} k^l_{n_1\, n_2}\, c^{l-l}_{n_1\, n_2}\, Q^l_{n_1\, n_2}(\cos\theta_1, \cos\theta_2)\, \cos(l(\varphi_1-\varphi_2))$$

$$\text{Avec : } \quad k^l_{n_1\, n_2} = \left\{ \begin{array}{ll} (n_1 \neq n_2) & \dfrac{2}{2^{l=0}} = 2^{l\neq 0} \\ (n_1 = n_2) & 1 \end{array} \right\} = 2^{(n_1\neq n_2)(l\neq 0)}$$

Ce qui fait que l'on arrive au résultat final :

Propriété 30 (décomposition d'une BRDF isotrope) *soit $f\,:\,\Omega^{+2} \to I\!R$, une BRDF isotrope. On a alors :*

$$f(\theta_1,\theta_2,\phi) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{\substack{n_2=0 \\ n_1-n_2\, pair}}^{n_1} \sum_{\substack{l=0 \\ n_2-l\, pair}}^{n_2} a^l_{n_1\, n_2} \left(\begin{array}{c} P^l_{n_1}(\cos\theta_1)\, P^l_{n_2}(\cos\theta_2) + \\ P^l_{n_2}(\cos\theta_1)\, P^l_{n_1}(\cos\theta_2) \end{array} \right) \cos(l\phi)$$

$$a^l_{n_1\, n_2} = \frac{2^{1+(n_1\neq n_2)+(l\neq 0)}}{\pi} \int_{\theta_1=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\theta_2=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=0}^{\pi} \begin{array}{c} f(\theta_1,\theta_2,\phi)\, P^l_{n_1}(\cos\theta_1)\, P^l_{n_2}(\cos\theta_2) \\ \cos(l\phi)\, \sin\theta_1\, d\theta_1\, \sin\theta_2\, d\theta_2\, d\phi \end{array}$$

Le coefficient devant les intégrales dans $a^l_{n_1\, n_2}$ se justifie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} a^l_{n_1\, n_2} &= \frac{2^{(n_1\neq n_2)(l\neq 0)}}{2^{(n_1=n_2)(l=0)}} \frac{4}{\pi} = \frac{2^{(1-(n_1=n_2))(1-(l=0))-(n_1=n_2)(l=0)+2}}{\pi} \\ &= \frac{2^{3-(n_1=n_2)-(l=0)}}{\pi} = \frac{2^{1+(n_1\neq n_2)+(l\neq 0)}}{\pi} \end{aligned}$$

On peut essayer d'évaluer le nombre maximum de coefficients dans cette formule. C'est un calcul très pénible (à cause des multiples cas de parité) mais assez simple. Le résultat est :

Propriété 31 (nombre de coefficients pour une BRDF isotrope)

$$\begin{array}{ll} \textit{(d pair)} & \dfrac{1}{24}d^3 + \dfrac{3}{8}d^2 + \dfrac{13}{12}d + 1 = \dfrac{1}{24}(d+2)(d+3)(d+4) \\ \textit{(d impair)} & \dfrac{1}{24}d^3 + \dfrac{3}{8}d^2 + \dfrac{23}{24}d + \dfrac{5}{8} = \dfrac{1}{24}(d+1)(d+3)(d+5) \end{array}$$

On peut résumer les nombres de coefficients dans le représentation d'une BRDF par le graphique (*figure 6.2, p. 114*).

6.2.4.7 Conservation de l'énergie

Les BRDFs vérifient aussi une propriété que l'on n'a pas encore exploitée.

Propriété 32 (conservation de l'énergie) *soit f une BRDF. On a alors :*

$$\forall \omega_1 \in \Omega^+ ,\ \int_{\omega_2\in\Omega^+} f(\omega_1,\omega_2)\, \cos\omega_2\, d\omega_2 \leq 1$$

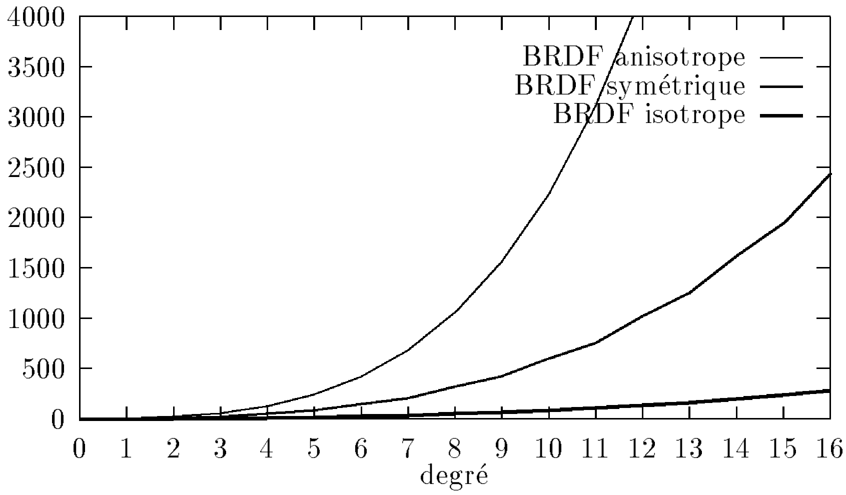

FIG. 6.2 – *nombre de coefficients d'une représentation*

Il est facile de vérifier que la fonction recomposée vérifie aussi cette propriété. Il nous suffit en fait de savoir calculer :

$$\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} P_n^l(\cos\theta)\,\cos\theta\,\sin\theta\,d\theta = \int_0^1 P_n^l(z)\,z\,dz$$

6.2.4.8 Un exemple

Afin de s'assurer du bon fonctionnement de la méthode présentée ici, et de la validité des équations destinées au calcul, on va présenter un petit exemple de recomposition de BRDF à l'aide des harmoniques sphériques.

Les calculs ont été faits sur une station à base de `R10000` cadencé à 195Mhz. On notera :

- d le degré de la représentation,
- n_t le nombre de coefficients calculés,
- n_n le nombre de coefficients non nuls,
- ϵ_b l'erreur fonctionnelle (*chapitre 4, p. 61*),
- ϵ_c l'erreur énergétique (*chapitre 4, p. 61*),
- t_c le temps total de calcul des coefficients,
- t_e le temps d'évaluation moyen de la représentation.

6.2.4.8.1 Une BRDF isotrope Il s'agit d'une BRDF analytique issue du modèle de Lafortune [LFTG97]. Elle possède une composante diffuse constante, un lobe spéculaire et un lobe de rétro-réflexion, les deux lobes étant isotropes. Les résultats sont visibles dans (*table 6.1, p. 115*) et sur (*figure 6.3, p. 115*).

d	0	1	2	4	8	16
n_t	1	2	5	14	55	285
n_n	1	2	5	14	55	285
ϵ_b	100%	95%	51%	22%	7%	6%
ϵ_c	97%	90%	45%	24%	6%	5%
t_c	790ms	1.58s	3.95s	11.0s	43.4s	3mn 44s
t_e	0.03ms	0.04ms	0.04ms	0.05ms	0.10ms	0.22ms

TAB. 6.1 – *harmoniques sphériques appliquées à une BRDF analytique isotrope*

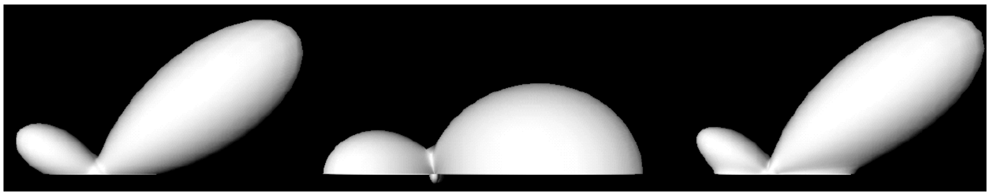

FIG. 6.3 – *de gauche à droite, fonction originale (BRDF analytique isotrope), harmoniques sphériques de degré 2, harmoniques sphériques de degré 8 (incidence de* 45^o*)*

6.2.4.8.2 Une BRDF anisotrope Il s'agit d'une BRDF analytique issue du modèle de Lafortune. Elle possède une composante diffuse constante, un lobe spéculaire et un lobe de rétro-réflexion, les deux lobes étant anisotropes. Les résultats sont visibles dans (*table 6.2, p. 115*) et sur (*figure 6.4, p. 116*).

d	0	1	2	4	8	16
n_t	2	4	16	64	410	3810
n_n	1	3	9	39	285	3033
ϵ_b	100%	100%	70%	39%	9%	2%
ϵ_c	103%	101%	66%	37%	10%	2%
t_c	35.6s	1mn 11s	4mn 44s	18mn 59s	2h 1mn	18h 50mn
t_e	0.04ms	0.05ms	0.05ms	0.08ms	0.14ms	0.46ms

TAB. 6.2 – *harmoniques sphériques appliquées à une BRDF analytique anisotrope*

6.3 Polynômes de Zernike

6.3.1 Introduction

Définition 31 *On appelle* Δ *le disque unité de* $\mathbb{R}^2$.

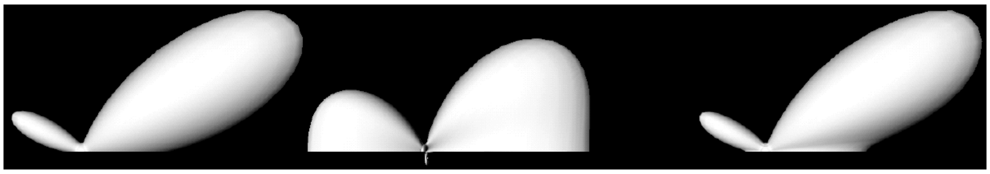

FIG. 6.4 – *de gauche à droite, fonction originale (BRDF analytique anisotrope), harmoniques sphériques de degré 4, harmoniques sphériques de degré 16 (incidence de 45^o)*

Les polynômes de Zernike sont une base de fonctions qui permettent de représenter les fonctions continues de Δ dans $\mathbb{C}$. C'est le même principe que les séries de Fourier ou les harmoniques sphériques. Étant donné que les BRDFs sont définies sur Ω^{+2} et que Ω^+ est isomorphe à Δ, on va pouvoir utiliser ces polynômes pour représenter des BRDFs. L'étude qui va conduire à l'adaptation de cette base aux BRDFs est très similaire à celle faite pour les harmoniques sphériques, ce qui fait que l'on se reportera à celle-ci pour la plupart des démonstrations.

Définition 32 *On paramétrise Δ de la façon suivante :*

$$(\rho, \varphi) \to (x, y) \quad \begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \end{cases}$$

Avec $\rho \in [0;1]$ et $\varphi \in [0;2\pi]$. (ρ, φ) est aussi noté δ. On notera alors $d\delta = \rho \, d\rho \, d\varphi$.

Définition 33 (produit interne sur Δ) *soient f et $g : \Delta \to \mathbb{C}$. On définit leur produit interne par :*

$$\begin{aligned} f \cdot g &= \frac{2}{\pi} \int_{\delta \in \Delta} f(\delta) \, \overline{g(\delta)} \, d\delta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\rho=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\rho, \varphi) \, \overline{g(\rho, \varphi)} \, \rho \, d\rho \, d\varphi \end{aligned}$$

On a donc la propriété suivante :

Propriété 33 $g \cdot f = \overline{f \cdot g}$

6.3.2 Polynômes de Zernike

6.3.2.1 Polynômes radiaux

Les polynômes radiaux de Zernike sont très proches des polynômes de Jacobi, et l'on ne donnera ici que leur définition :

Définition 34 (polynômes de Zernike) *On définit le polynôme radial de Zernike d'ordre $(n, l) \in I\!N^2$, $l \leq n$, $n - l$ pair par :*

$$r_n^l : [0;1] \to I\!R$$
$$r_n^l(\rho) = \sum_{k=0}^{\frac{n-l}{2}} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!\left(\frac{n+l}{2}-k\right)!\left(\frac{n-l}{2}-k\right)!} \rho^{n-2k}$$

On définit aussi :

$$r_n^{-l} = r_n^l$$

Le polynôme radial de Zernike d'ordre (n, l) est donc de degré n. Les polynômes radiaux de Zernike sont aussi orthogonaux :

Propriété 34 (orthogonalité des polynômes radiaux de Zernike)

$$\int_0^1 \left[r_n^l(\rho)\right]^2 \rho\, d\rho = \frac{1}{2}\frac{1}{n+1}$$
$$\int_0^1 r_{n_1}^{l_1}(\rho)\, r_{n_2}^{l_2}(\rho)\, \rho\, d\rho = 0 \,,\; n_1 \neq n_2 \;\; ou \;\; l_1 \neq l_2$$

Voici les premiers polynômes radiaux de Zernike :

$$\begin{array}{ll}
r_0^0(\rho) = 1 & r_5^1(\rho) = 10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho \\
 & r_5^3(\rho) = 5\rho^5 - 4\rho^3 \\
r_1^1(\rho) = \rho & r_5^5(\rho) = \rho^5 \\
 & \\
r_2^0(\rho) = 2\rho^2 - 1 & r_6^0(\rho) = 20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1 \\
r_2^2(\rho) = \rho^2 & r_6^2(\rho) = 15\rho^6 - 20\rho^4 + 6\rho^2 \\
 & r_6^4(\rho) = 6\rho^6 - 5\rho^4 \\
r_3^1(\rho) = 3\rho^3 - 2\rho & r_6^6(\rho) = \rho^6 \\
r_3^3(\rho) = \rho^3 & \ldots
\end{array}$$

On va normaliser ces polynômes pour leur utilisation ultérieure.

Définition 35 (polynômes radiaux de Zernike normalisés) *On appelle polynômes radiaux de Zernike normalisés les R_n^l définis par :*

$$R_n^l = \sqrt{\frac{n+1}{2}}\, r_n^l$$

6.3.2.2 Polynômes circulaires

Définition 36 *On appelle polynôme circulaire de Zernike d'ordre* $(n,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, $-n \leq l \leq n$, *la fonction de* $\Delta \to \mathbb{C}$ *suivante :*

$$U_n^l(\rho,\varphi) = R_n^l(\rho)\, e^{i\,l\,\varphi}$$

Les polynômes circulaires de Zernike vérifient les propriétés suivantes :

Propriété 35 (manipulation des polynômes circulaires de Zernike)

$$\begin{gathered}\overline{U_n^l} = U_n^{-l} \\ U_n^l \cdot U_n^l = 1 \\ U_{n_1}^{l_1} \cdot U_{n_2}^{l_2} = 0 \;\; ssi \;\, n_1 \neq n_2 \;\; ou \;\;\; l_1 \neq l_2\end{gathered}$$

6.3.3 Utilisation des polynômes de Zernike

6.3.3.1 Décomposition des fonctions sur Δ

Les polynômes circulaires de Zernike forment une base orthonormée pour les fonctions continues de $\Delta \to \mathbb{C}$. On peut donc écrire :

Propriété 36 (décomposition sur Δ) *soit f une fonction continue de Δ dans $\mathbb{C}$:*

$$\begin{aligned} f(\rho,\varphi) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{l=-n}^{n} c_n^l\, U_n^l(\rho,\varphi) \\ c_n^l = f \cdot U_n^l &= \frac{2}{\pi} \int_{\rho=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\rho,\varphi)\, \overline{U_n^l}(\rho,\varphi)\, \rho\, d\rho\, d\varphi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\rho=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\rho,\varphi)\, U_n^{-l}(\rho,\varphi)\, \rho\, d\rho\, d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_{\delta\in\Delta} f(\delta)\, U_n^{-l}(\delta)\, d\delta \end{aligned}$$

Cette décomposition est exacte. On obtient une approximation de f en limitant la somme en n. Cette limite sera appelée degré de la décomposition et notée d.

6.3.3.2 Décomposition des fonctions sur Ω^+

Il est évident que Δ et Ω^+ peuvent être mis en bijection. On pourra donc utiliser les polynômes de Zernike pour décomposer les fonctions de $\Omega^+ \to \mathbb{C}$. Cependant, cette bijection ne peut pas être quelconque, étant donné qu'en pratique, on va limiter la somme. Il semble logique que φ sur Δ soit le même que φ sur Ω^+. On va donc chercher à conserver l'homogénéité des éléments de surface :

$$\begin{aligned}
\frac{\rho\, d\rho\, d\phi}{\int_\Delta \rho\, d\rho\, d\phi} &= \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\phi}{\int_{\Omega^+} \sin\theta\, d\theta\, d\phi}\\
\Rightarrow \frac{\rho\, d\rho\, d\phi}{\pi} &= \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\phi}{2\pi}\\
\Rightarrow 2\,\rho\, d\rho &= \sin\theta\, d\theta\\
\Rightarrow d(\rho^2) &= d(-\cos\theta)\\
\Rightarrow \rho &= \sqrt{K - \cos\theta}\\
\text{or}: \rho(\theta = 0) = 0 \text{ et } \rho &\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = 1\\
\Rightarrow \rho &= \sqrt{1-\cos\theta} = \sqrt{2}\,\sin\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

Afin de simplifier les notations, on note :

Définition 37 (polynômes circulaires de Zernike sur Ω^+)

$$\begin{aligned}
\hat{R}_n^l(\cos\theta) &= R_n^l\left(\sqrt{2}\,\sin\frac{\theta}{2}\right)\\
\hat{U}_n^l(\theta,\varphi) &= \hat{R}_n^l(\cos\theta)\, e^{i\,l\,\varphi}
\end{aligned}$$

On peut donc utiliser les polynômes radiaux de Zernike pour représenter des fonctions de Ω^+ dans $\mathbb{C}$. C'est la propriété suivante :

Propriété 37 (décomposition sur Ω^+) *soit f une fonction continue de Ω^+ dans $\mathbb{C}$:*

$$\begin{aligned}
f(\theta,\varphi) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{l=-n}^{n} c_n^l\, U_n^l\left(\sqrt{2}\,\sin\frac{\theta}{2},\varphi\right)\\
c_n^l &= \frac{2}{\pi}\int_{\rho=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi} f\left(2\,\sin^{-1}\frac{\rho}{\sqrt{2}},\varphi\right)\overline{U_n^l(\rho,\varphi)}\,\rho\, d\rho\, d\varphi\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\theta,\varphi)\, U_n^{-l}\left(\sqrt{2}\,\sin\frac{\theta}{2},\varphi\right)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\theta,\varphi)\,\hat{U}_n^{-l}(\theta,\varphi)\,\sin\theta\, d\theta\, d\varphi
\end{aligned}$$

6.3.4 Application aux BRDFs

L'utilisation des polynômes radiaux dans la représentation de BRDFs a été introduite dans [JKS96].

6.3.4.1 Adaptation des harmoniques sphériques

En observant la formule précédente, on s'aperçoit qu'elle est identique à la décomposition en harmoniques sphériques sur Ω^+ (*propriété 18, p. 104*), en substituant $\hat{R}_n^l$ à

P_n^l. On va donc pouvoir utiliser directement tous les résultats trouvés avec les harmoniques sphériques, sachant que les polynômes de Zernike vérifient les mêmes propriétés essentielles que les fonctions de Legendre. Il suffit donc de remplacer les P_n^l par des $\hat{R}_l^l$ dans (*propriété 25, p. 108*), (*propriété 27, p. 110*) et (*propriété 30, p. 113*).

6.3.4.2 Un exemple

On présente ici le même exemple que celui utilisé pour les harmoniques sphériques (*p. 114*).

6.3.4.2.1 Une BRDF isotrope Les résultats sont visibles dans (*table 6.3, p. 120*) et sur (*figure 6.5, p. 120*).

d	0	1	2	4	8	16
n_t	1	2	5	14	55	285
e^+	100%	95%	51%	28%	5%	5%
e^*	97%	90%	52%	30%	5%	4%
t_c	840ms	1.68s	4.20s	11.8s	46.2s	3mn 59s
t_e	0.03ms	0.04ms	0.04ms	0.05ms	0.08ms	0.18ms

TAB. 6.3 – *polynômes de Zernike appliqués à une BRDF analytique isotrope*

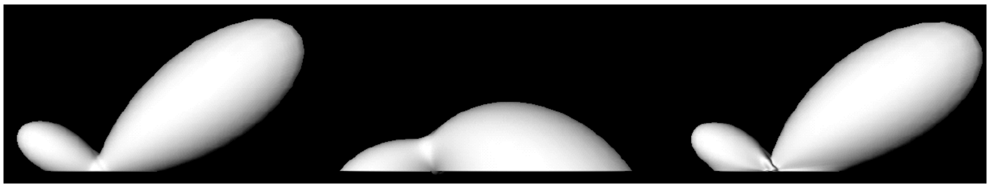

FIG. 6.5 – *de gauche à droite, fonction originale (BRDF analytique isotrope), polynômes de Zernike de degré 2, polynômes de Zernike de degré 8 (incidence de 45°)*

6.3.4.2.2 Une BRDF anisotrope Les résultats sont visible dans (*table 6.4, p. 121*) et sur (*figure 6.6, p. 121*).

6.4 Ondelettes sphériques

Nous n'allons pas exposer la théorie des ondelettes dans ce travail. Pour cela, on se reportera à [SDS95a, SDS95b] qui est un cours d'introduction général au principe des ondelettes.

d	0	1	2	4	8	16
n_t	2	4	16	64	410	3810
n_n	1	3	9	39	285	3033
ϵ_b	100%	100%	67%	55%	12%	3%
ϵ_c	103%	102%	64%	51%	13%	3%
t_c	35.4s	1mn 10s	4mn 42s	18mn 53s	2h 0mn	18h 44mn
t_e	0.04ms	0.05ms	0.05ms	0.07ms	0.12ms	0.42ms

TAB. 6.4 – *polynômes de Zernike appliqués à une BRDF analytique anisotrope*

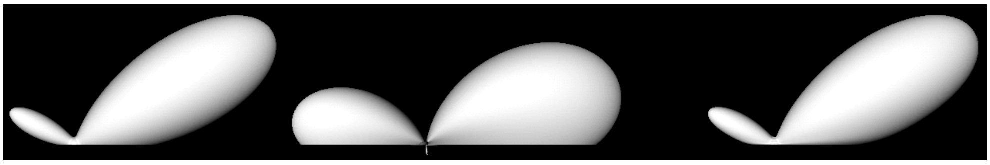

FIG. 6.6 – *de gauche à droite, fonction originale (BRDF analytique anisotrope), polynômes de Zernike de degré 4, polynômes de Zernike de degré 16 (incidence de 45°)*

En effet, les ondelettes sont une technique générale de représentation de fonctions. Elles ont été appliquées à bien des domaines différents. Le principe général est de decomposer de façon hiérarchique des fonctions. Cela permet de décrire n'importe quelle fonction à l'aide d'une forme globale grossière, et de rajouter des détails de plus en plus fins. L'avantage est que l'on peut avoir une représentation d'une fonction avec différents niveaux de détails.

Les ondelettes sphériques ont été introduites par [SS95], et permettent d'appliquer la technique des ondelettes à des fonctions définies sur la sphère. Elles ont ensuite été adaptées aux BRDFs par [LF97a, LF97b].

Les ondelettes restent complexes à mettre en place, notamment dans le cas des BRDFs.

À partir de maintenant, nous allons présenter une méthode que nous avons développée, dans le cadre de la recomposition des BRDF. Nous allons tout d'abord exposer une technique d'interpolation adaptée aux BRDF, puis une méthode générique de représentation des BRDF.

6.5 Interpolation

6.5.1 Introduction

Lorsque des mesures de BRDF sont effectuées, il est rare que l'on obtienne un ensemble de valeurs pour des directions d'incidence et de reflexion n'ayant aucun lien les unes avec les autres. En effet, cet ensemble de directions est souvent structuré.

Ainsi, on effectue souvent les mesures de la BRDF en fixant d'abord la direction d'incidence, puis en échantillonnant toutes les directions réfléchies. Dans ce cas, il est facile de recomposer la BRDF, incidence par incidence, et d'interpoler linéairemen (ou de façon plus évoluée) entre ces différentes incidences.

6.5.2 Interpolation améliorée

6.5.2.1 Structure des données

On admet que l'on dispose de la BRDF pour un certain nombre d'incidences données $(\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_n})$. Pour ces incidences, on admet que l'on connait complètement la BRDF restreinte à chacune de ces incidences (appelée BRDF projetée), sur tout le domaine de l'hémisphère supérieur. On va chercher à obtenir la BRDF pour n'importe quel couple de directions d'incidence et de réflexion. On a donc un ensemble de n surfaces, chacune de ces surfaces correspondant à la BRDF projetée pour l'incidence ω_{i_k}, et on veut obtenir la surface correspondant à une direction d'incidence ω_i quelconque.

6.5.2.2 Idée de base

On se donne un couple de directions quelconques (ω_i, ω_e) et on cherche à calculer la valeur de la BRDF pour ces directions. On commence tout d'abord par encadrer ω_i par les plus proches directions incidentes dont on dispose dans les données, au sens de θ, en s'affranchissant pour l'instant du cas anisotrope. On se retrouve donc avec $\theta_i^- \leq \theta_i \leq \theta_i^+$. Au lieu d'interpoler simplement de façon linéaire en écrivant :

$$f(\theta_i, \theta_e, \phi) = \frac{(\theta_i^+ - \theta_i)\, f(\theta_i^-, \theta_e, \phi) + (\theta_i - \theta_i^-)\, f(\theta_i^+, \theta_e, \phi)}{\theta_i^+ - \theta_i^-}$$

on va chercher à interpoler de façon plus adaptée à notre situation particulière. En effet, si on prend le cas d'une réflexion miroir $(\theta_i = \theta_e)$, (*figure 6.7, p. 123*).

On aurait envie d'interpoler entre les valeurs de la BRDF pour les directions miroirs correspondant à ω_i^- et ω_i^+, en écrivant :

$$f(\theta_i, \theta_e, \phi) = \frac{(\theta_i^+ - \theta_i)\, f(\theta_i^-, \theta_i^-, \phi) + (\theta_i - \theta_i^-)\, f(\theta_i^+, \theta_i^+, \phi)}{\theta_i^+ - \theta_i^-}$$

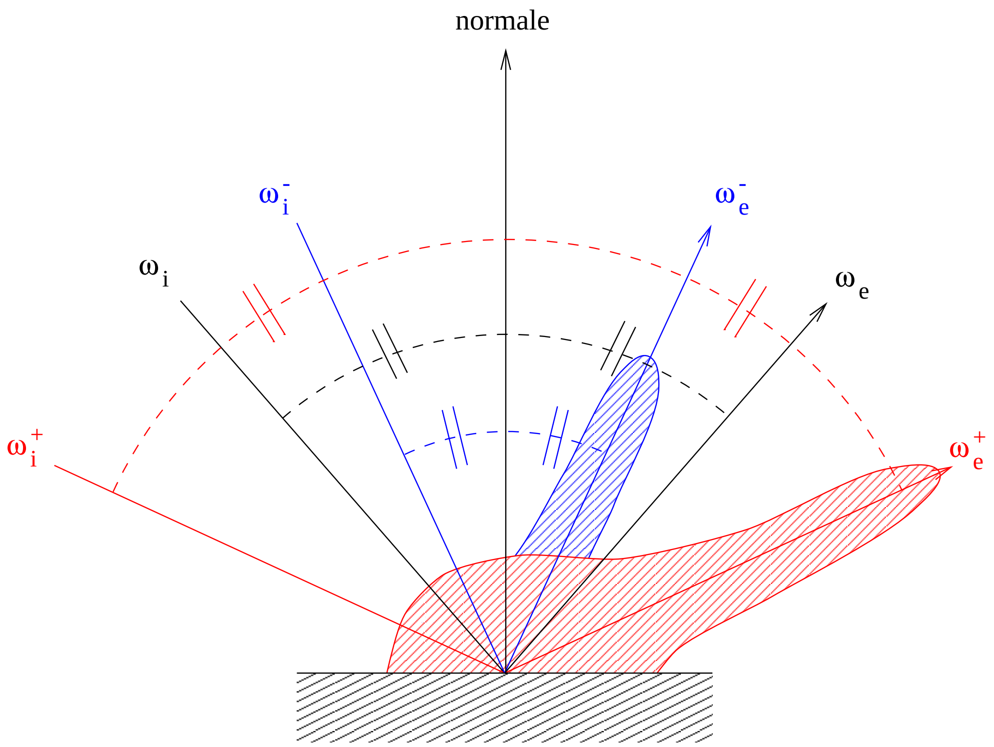

FIG. 6.7 – *interpolation entre les incidences (cas miroir)*

6.5.2.3 Mise en oeuvre

On va chercher à reproduire le phénomène précédent, mais dans le cas général, d'une incidence et d'une direction réfléchie quelconques. L'idée est que les angles entre les incidences doivent être conservés pour les directions réfléchies (*figure 6.8, p. 124*).

Si on pose :

$$\begin{aligned}\Delta\theta^- &= \theta_i - \theta_i^- \geq 0\\ \Delta\theta^+ &= \theta_i^+ - \theta_i \geq 0\end{aligned}$$

On définit :

$$\begin{aligned}\theta_e^- &= \theta_e - \Delta\theta^-\\ \theta_e^+ &= \theta_e + \Delta\theta^+\end{aligned}$$

Un cas de débordement peut bien sûr être observé (dans le cas où $\theta_e^- < 0$ ou $\theta_e^+ > \frac{\pi}{2}$). Ce cas sera traité ultérieurement. On peut maintenant faire une simple interpolation linéaire sur les valeurs de la BRDF en écrivant :

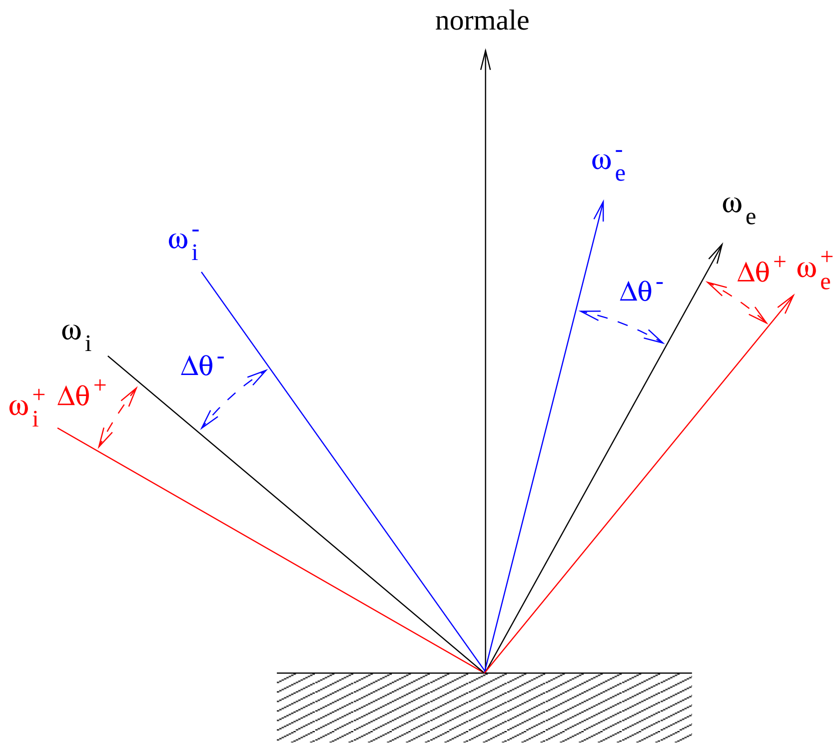

FIG. 6.8 – *interpolation entre les incidences (cas général)*

$$
\begin{aligned}
f(\theta_i, \theta_e, \phi) &= \frac{(\theta_i^+ - \theta_i)\, f(\theta_i^-, \theta_e^-, \phi) + (\theta_i - \theta_i^-)\, f(\theta_i^+, \theta_e^+, \phi)}{\theta_i^+ - \theta_i^-} \\
&= \frac{(\theta_e^+ - \theta_e)\, f(\theta_i^-, \theta_e^-, \phi) + (\theta_e - \theta_e^-)\, f(\theta_i^+, \theta_e^+, \phi)}{\theta_e^+ - \theta_e^-}
\end{aligned}
$$

6.5.2.4 Gestion des cas limites

6.5.2.4.1 Cas où $\theta_e^- < 0$ Si on se reporte à la valeur du vecteur sur la sphère, le fait de prendre une direction (θ_e^-, ϕ_e^-) avec $\theta_e^- < 0$ revient à prendre la même direction, mais paramétrée par $(-\theta_e^-, \phi_e^- + \pi)$ qui elle, est valide. On écrira alors :

$$
f(\theta_i, \theta_e, \phi) = \frac{(\theta_e^+ - \theta_e)\, f(\theta_i^-, -\theta_e^-, \phi + \pi) + (\theta_e - \theta_e^-)\, f(\theta_i^+, \theta_e^+, \phi)}{\theta_e^+ - \theta_e^-}
$$

6.5.2.4.2 Cas où $\theta_e^+ > \frac{\pi}{2}$ Avoir $\theta_e^+ > \frac{\pi}{2}$ n'a aucun sens, en effet, la BRDF n'est pas définie en cet endroit de la sphère. On va donc modifier notre couple (ω_i^+, ω_e^+) de telle manière à ce qu'il redevienne valide. Et donc aussi modifier les poids pour l'interpolation linéaire. On va donc remplacer θ_e^+ par $\frac{\pi}{2}$, et on écrira alors :

$$f(\theta_i, \theta_e, \phi) = \frac{(\frac{\pi}{2} - \theta_e)\, f(\theta_i^-, \theta_e^-, \phi) + (\theta_e - \theta_e^-)\, f(\theta_i^+, \frac{\pi}{2}, \phi)}{\frac{\pi}{2} - \theta_e^-}$$

6.5.2.5 Cas où il impossible d'encadrer ω_i

Le cas général s'applique ici, mais il s'agira alors d'une extrapolation. Il suffit de choisir les θ_i^- et θ_i^+ comme les deux dernières incidences disponibles.

6.5.2.6 Extension au cas anisotrope

Dans le cas anisotrope, on peut étendre cette méthode, en effectuant le même travail au niveau de φ.

6.5.2.7 Exemple d'application

On va pouvoir voir l'avantage d'une telle méthode par rapport à une interpolation classique. Tout d'abord sur une BRDF analytique (*figure 6.9, p. 125*). Il s'agit d'un cas idéal, puisque la BRDF est de type Phong, donc la direction spéculaire est bien la direction miroir.

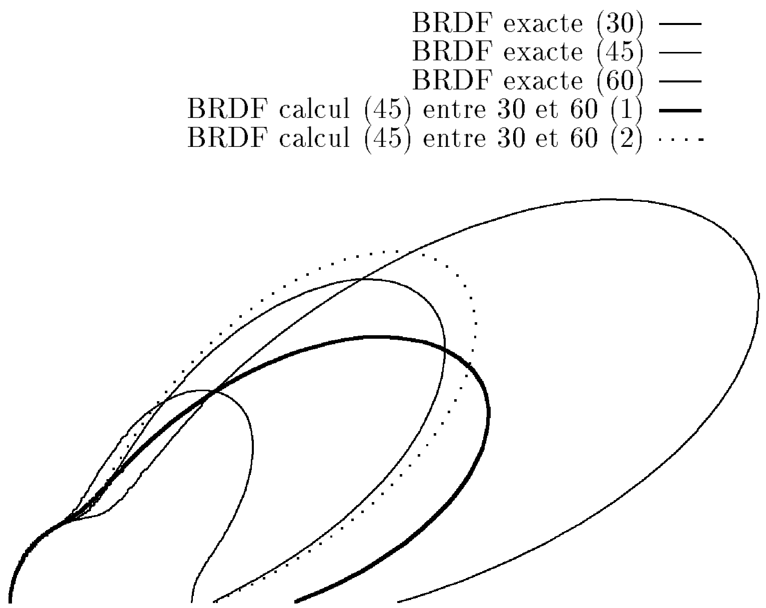

FIG. 6.9 – *interpolation classique (1) et améliorée (2) pour une BRDF analytique*

Ensuite, un deuxième exemple (*figure 6.10, p. 126*), où cette fois il s'agit d'une BRDF mesurée. Ici, le pic le plus important est le pic de rétro-réflexion.

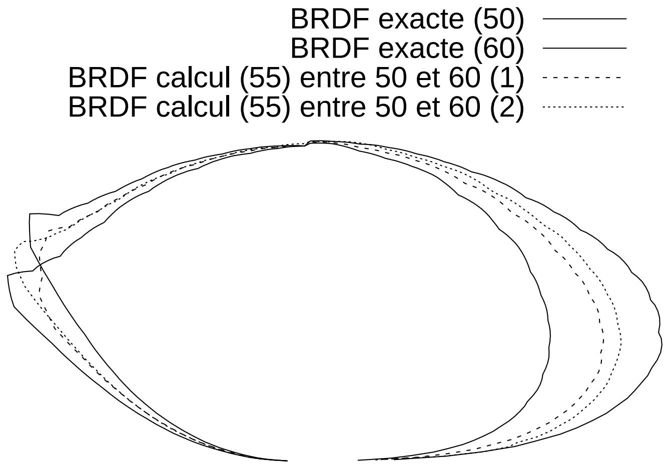

FIG. 6.10 – *interpolation classique (1) et améliorée (2) pour une BRDF mesurée*

6.6 Nouvelle méthode

6.6.1 Introduction

On va chercher à introduire une nouvelle méthode de recomposition des BRDFs. L'objectif que l'on se fixe est d'avoir une recomposition qui fonctionne pour n'importe quelle distribution de données. Elle devra en plus satisfaire aux conditions particulières des BRDFs et si possible les exploiter, tout en étant la plus rapide possible.

6.6.2 Idée intuitive

On peut relier, pour un couple de directions donné, la BRDF au rebond d'un photon sur la surface et à la perte d'énergie qui en découle. De cette manière, chaque mesure correspond à la trajectoire d'un photon. Dans la réalité, un photon peut être vu comme une distribution d'énergie s'atténuant très vite. Avec un grand nombre de photons de ce type, la lumière réfléchie apparaît continue.

L'avantage de cette approche est que l'on peut considérer une distribution d'énergie sur Ω^2. Pour un ensemble d'échantillons (X_i, Y_i, F_i), on peut alors écrire :

$$F(X,Y) = N \sum_{i=1}^{n} K\left(d\left((X,Y),(X_i,Y_i)\right)\right) F_i$$

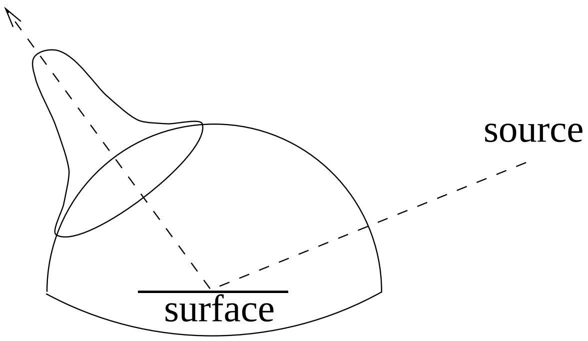

FIG. 6.11 – *distribution d'énergie associée à un photon*

C est une constante de normalisation, K la distribution d'énergie associée aux photons, d la distance entre deux couples de directions. C'est l'idée proposée dans [Pfl96] Plusieurs problèmes se posent :

- le choix de la distribution K,
- le calcul de la constante de normalisation N,
- le choix de la distance d sur Ω^2.

Pour ce qui est de la distribution, il est intéressant d'avoir une distribution à support local, par exemple une approximation de Gaussienne, comme pour un blob. Cependant se pose aussi le problème du dimensionnement en largeur de cette distribution. Cette méthode n'a aucun support physique comme mathématique et reste problématique lorsque les échantillons sont répartis de manière particulière sur Ω^2. Par contre, elle présente l'avantage de proposer directement une fonction sur Ω^2 et rapidement évaluable (support local).

6.6.3 Justifications mathématiques

6.6.3.1 Quelques définitions

On rappelle que Ω représente la sphère unité. On introduit les ensembles suivants :

Définition 38 (ensembles de base) *On définit $C(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions continues de Ω dans $\mathbb{R}$. On équipe $C(\Omega)$ avec la norme définie pour $F \in C(\Omega)$ par $\|F\| = sup_{X \in \Omega}|F(X)|$.*

On introduit $\mathcal{L}^1([-1;1])$ comme l'ensemble des fonctions intégrables de $[-1;1]$ dans $\mathbb{R}$. On équipe $\mathcal{L}^1([-1;1])$ avec la norme définie pour $f \in \mathcal{L}^1([-1;1])$ par $\|f\| = 2\pi \int_{-1}^{1} |f(t)|\, dt$.

On définit alors :

Définition 39 (transformées de Legendre et convolution) *On définit la transformée de Legendre de $f \in \mathcal{L}^1([-1;1])$ par :*

$$n \in I\!N,\ \hat{f}(n) = 2\pi \int_{-1}^{1} f(t)\, p_n(t)\, dt$$

*p_n étant le polynôme de Legendre d'ordre n. On pourra trouver la définition des polynômes de Legendre dans (*définition 23, p. 99*). On rappelle seulement que :*

$$\begin{array}{l} p_0(t) = 1 \\ p_1(t) = t \end{array}$$

On définit la convolution de $F \in C(\Omega)$ et $f \in \mathcal{L}^1([-1;1])$, notée $F \otimes f$ par :

$$\forall X \in \Omega,\ (F \otimes f)(X) = \int_{\Omega} F(Y)\, f(X \cdot Y)\, d\omega(Y)$$

On peut chercher à simplifier l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \int_{X\in\Omega} (F \otimes f)(X)\, d\omega(X) &= \int_{X\in\Omega} \int_{Y\in\Omega} F(Y)\, f(X \cdot Y)\, d\omega(Y)\, d\omega(X) \\ &= \int_{Y\in\Omega} F(Y)\, d\omega(Y) \int_{\theta_X=0}^{\pi} \int_{\varphi_X=0}^{2\pi} f(\cos\theta_X)\, \sin\theta_X\, d\theta_X\, d\varphi_X \\ &= 2\pi \int_{t=-1}^{1} f(t)\, dt \int_{X\in\Omega} F(X)\, d\omega(X) \\ &= \hat{f}(0) \int_{X\in\Omega} F(X)\, d\omega(X) \end{aligned}$$

C'est une méthode de calcul que nous utiliserons presque tout le temps. Elle consiste à choisir un vecteur z paramétrant Ω qui permet de simplifier le calcul. Ici, c'est Y qui a été choisi comme origine. Donc, dans ce repère, les vecteurs X et Y ont les coordonnées suivantes :

$$X = \begin{pmatrix} \cos\varphi_X \sin\theta_X \\ \sin\varphi_X \sin\theta_X \\ \cos\theta_X \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ensuite on effectue un changement de variable, de façon à transformer un produit scalaire en cosinus. Ici on a fait: $\cos\theta_X = t$.

6.6.3.2 Intégrales singulières

On va introduire une convolution particulière que nous allons utiliser dans la recomposition de fonctions.

Définition 40 (intégrales singulières) *soit $\{K_\rho\}, \rho \in]-1;1[$ une sous-famille de $\mathcal{L}^1([-1;1])$. On appelle intégrale singulière correspondant au noyau intégral $\{K_\rho\}$, et on note $\{I_\rho\}, \rho \in]-1;1[$, la convolution $I_\rho(F) = K_\rho \otimes F$.*

La propriété qui nous intéresse est la suivante :

Propriété 38 (convergence des intégrales singulières) *dans le cas où les* $\{K_\rho\}$ *définis précédemment vérifient en plus les propriétés suivantes :*

$$\hat{K}_\rho(0) = 2\pi \int_{t=-1}^{1} K_\rho(t)\, dt = 1$$
$$\lim_{\rho \to 1^-} \hat{K}_\rho(1) = \lim_{\rho \to 1^-} 2\pi \int_{t=-1}^{1} K_\rho(t)\, t\, dt = 1$$

on a la convergence uniforme de $I_\rho(F)$ *vers* F *:*

$$\lim_{\rho \to 1^-} I_\rho(F) = F$$

Dans ce cas, on a évidemment la propriété suivante (grâce à la condition sur $\hat{K}_\rho(0)$) :

$$\int_{\omega \in \Omega} I_\rho(F)\, d\omega = \int_\Omega F\, d\omega$$

La démonstration de cette propriété ne nous intéresse pas, elle peut être faite à l'aide des harmoniques sphériques.

6.6.3.3 Un exemple de noyau

Il faut maintenant trouver des familles de noyaux vérifiant les propriétés précédentes. On introduit donc la fonction de base suivante :

Définition 41 (fonctions de base) *soit* $B_\rho \in \mathcal{L}^1([-1;1])$, *avec* $\rho \in [-1:1]$ *et* $k \in I\!N$ *tel que :*

$$B_\rho(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \in [-1;\rho[\\ \dfrac{k+1}{2\pi\,(1-\rho)} \left(\dfrac{t-\rho}{1-\rho}\right)^k & si\ t \in [\rho\,;1] \end{cases}$$

k est le degré de la fonction de base, ρ son paramètre.

On peut vérifier si B_ρ satisfait (*propriété 38, p. 129*). Pour cela, on calcule l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} IB_{kl} &= \frac{k+1}{(1-\rho)^{k+1}} \int_{t=\rho}^{1} (t-\rho)^k\, t^l\, dt \\ &= \frac{k+1}{(1-\rho)^{k+1}} \left(\left[\frac{(t-\rho)^{k+1}}{k+1}\, t^l \right]_\rho^1 - \int_{t=\rho}^{1} \frac{(t-\rho)^{k+1}}{k+1}\, l\, t^{l-1}\, dt \right) \\ &= 1 - \frac{l\,(1-\rho)}{k+2}\, IB_{k+1\, l-1} \\ IB_{k0} &= 1 \end{aligned}$$

On peut alors calculer les transformées de Legendre d'ordres 0 et 1 de notre fonction de base B_ρ :

$$\begin{aligned}\hat{B}_\rho(0) &= IB_{k0} = 1\\ \hat{B}_\rho(1) &= IB_{k1} = 1 - \frac{1-\rho}{k+2} \overset{\rho\to 1^-}{\to} 1\end{aligned}$$

La forme de ces fonctions de base, qui ressemblent à des gaussiennes pour des valeurs de k supérieures à 2, peut être observée sur (*figure 6.12, p. 130*) et (*figure 6.13, p. 131*).

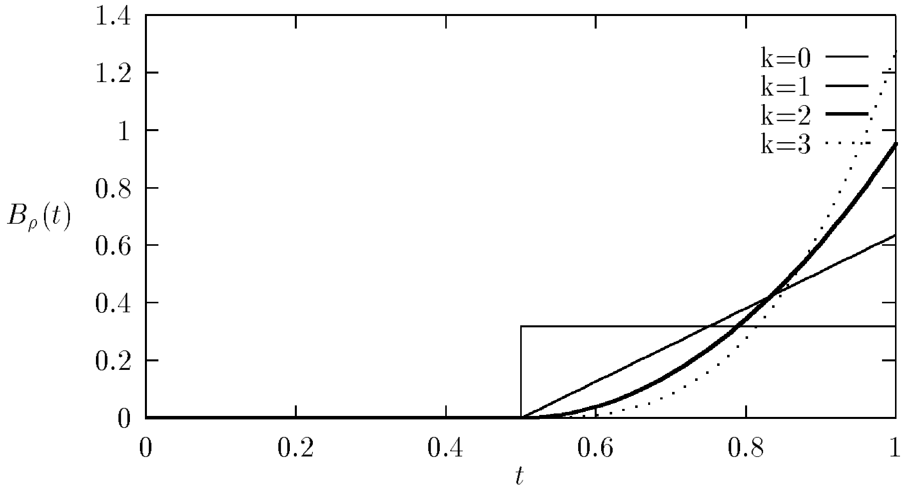

FIG. 6.12 – *fonctions de base pour différents degrés, en fonction de t*

6.6.4 Application aux BRDFs

6.6.4.1 Extension à Ω^2

On étend le résultat précédent sur Ω à Ω^2.

Propriété 39 (intégrales singulières sur Ω^2) *soit $f \in C(\Omega^2)$ et $\{K_\rho\}$ une sous-famille de $\mathcal{L}^1([-1;1]^2)$. On définit l'intégrale singulière $I_\rho(f)$ associée à f par :*

$$I_\rho(f)(X,Y) = \iint_{(x,y)\in\Omega^2} f(x,y)\, K_\rho(x\cdot X, y\cdot Y)\, d\omega(x)\, d\omega(y)$$

Si en plus les $\{K_\rho\}$ vérifient les propriétés suivantes :

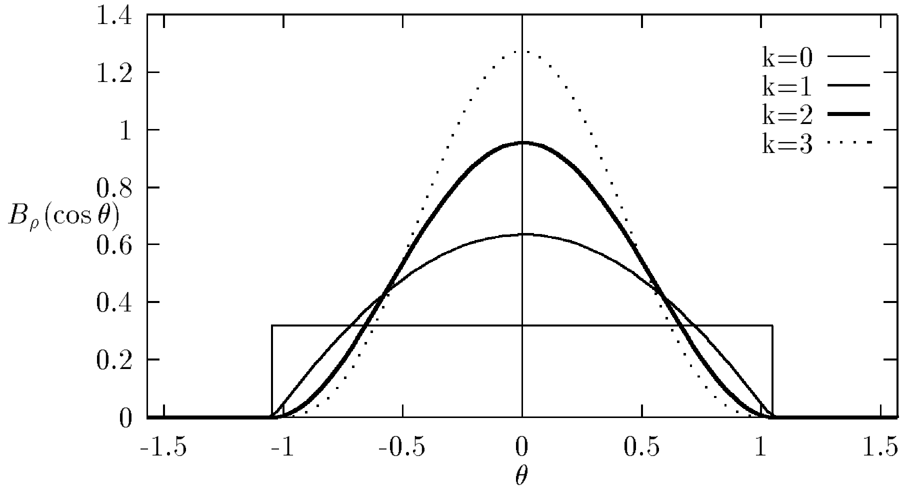

FIG. 6.13 – *fonctions de base pour différents degrés, en fonction de θ*

$$4\pi^2 \int_{u=-1}^{1}\int_{v=-1}^{1} K_\rho(u,v)\,du\,dv = 1 \text{ et}$$
$$\lim_{\rho\to 1^-} 4\pi^2 \int_{u=-1}^{1}\int_{v=-1}^{1} K_\rho(u,v)\,u\,v\,du\,dv = 1$$

Alors on a la convergence uniforme de $I_\rho(f)$ vers f lorsque ρ tend vers 1.

On peut évidemment utiliser comme noyau à deux paramètres le produit de deux noyaux vérifiant la propriété décrite dans (*propriété 38, p. 129*). On peut aussi utiliser un noyau unifié. En effet, le noyau suivant vérifie (*propriété 39, p. 130*) :

Définition 42 (noyau unifié sur Ω^2) *soit $B_\rho \in \mathcal{L}^1([-1;1]^2)$, avec $\rho \in [-1:1]$ et $k \in I\!N$ tel que :*

$$B_\rho(t) = \begin{cases} 0 & si\ \frac{u+v}{2} \le \rho \\ \dfrac{(k+1)(k+2)}{16\pi^2(1-\rho)^2}\left(\dfrac{\frac{u+v}{2}-\rho}{1-\rho}\right)^k & sinon \end{cases}$$

*ce noyau vérifie (*propriété 39, p. 130*).*

6.6.4.2 Restriction à Ω^{+2}

On n'a pas de travail particulier à faire pour restreindre nos définitions à Ω^{+2}. Il suffit de le substituer à Ω^2 dans les différentes intégrales et définitions.

6.6.4.3 Discrétisation

On se place maintenant dans le cas discret, c'est-à-dire que l'on dispose de données réelles que l'on cherche à recomposer. Ces données sont sous la forme suivante : $\{X_i, Y_i, F_i\}, i \in 1, 2, \ldots, n$ un ensemble de mesures (X_i est la direction d'incidence, Y_i est la direction réfléchie, F_i est la valeur mesurée de la BRDF pour ce couple de directions, n est le nombre de mesures). On va donc discrétiser notre expression de la manière suivante, en notant à l'avenir $\bar{F}$ la fonction recomposée :

$$\begin{aligned} F(X,Y) &= \int_{x\in\Omega^+}\int_{y\in\Omega^+} F(x,y)\, K_\rho(x\cdot X)\, K_\rho(y\cdot Y)\, d\omega(x)\, d\omega(y) \\ \bar{F}(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n} F_i\, K_\rho(X_i\cdot X)\, K_\rho(Y_i\cdot Y)\, \Delta\omega_i^2 \end{aligned}$$

Il nous faut donc donner une valeur à $\Delta\omega_i^2$, qui dépend a priori de l'échantillon indexé par i. On ne fait pas d'hypothèse particulière sur la distribution de nos directions de mesures sur l'hémisphère, notamment sur le fait qu'on puisse les décorréler de façon à obtenir deux sommes. On va donc choisir un $\Delta\omega_i^{(2)}$ constant. Deux possibilités s'offrent à nous :

6.6.4.3.1 Discrétisation avec calage sur fonction constante

On va chercher un $\Delta\omega_i^{(2)}$ tel que la recomposition soit exacte pour une fonction constante, ayant pour valeur F_0. On écrit :

$$\begin{aligned} F_0 &= \sum_{i=1}^{n} F_0\, K_\rho(X_i\cdot X)\, K_\rho(Y_i\cdot Y)\, \Delta\omega_i^{(2)} \\ \Rightarrow \Delta\omega_i^{(2)} &= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} K_\rho(X_i\cdot X)\, K_\rho(Y_i\cdot Y)} \\ \Rightarrow \bar{F}(X,Y) &= \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i\, K_\rho(X_i\cdot X)\, K_\rho(Y_i\cdot Y)}{\sum_{i=1}^{n} K_\rho(X_i\cdot X)\, K_\rho(Y_i\cdot Y)} \end{aligned}$$

On se retrouve donc avec une sorte de pondération entre les différentes valeurs de la BRDF. Le désavantage de cette méthode est que l'angle solide dépend de l'endroit où l'on fait l'évaluation. On remarquera aussi, que si l'on a des capsules trop petites (ρ trop grand), l'évaluation risque de faire apparaître des divisions de 0 par 0 en dehors des abords des directions de mesures et des valeurs constantes égales aux F_i à leurs abords.

6.6.4.3.2 Discretisation avec minimisation de l'erreur

On va cette fois discrétiser avec un angle solide constant $\Delta\omega^{(2)}$, minimisant l'erreur entre la recomposition et la fonction originale. On pose :

$$\bar{f}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} F_i\, K_\rho(X_i \cdot X)\, K_\rho(Y_i \cdot Y)$$
$$\bar{F}(X,Y) = \bar{f}(X,Y)\, \Delta\omega^2$$
$$E = \sum_{i=1}^{n} \left(F_i - \Delta\omega^2\, \bar{f}(X_i, Y_i)\right)^2 \text{ doit être minimal}$$
$$\Rightarrow \Delta\omega^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i\, \bar{f}(X_i, Y_i)}{\sum_{i=1}^{n} \bar{f}(X_i, Y_i)^2}$$
$$\Rightarrow \Delta\omega^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \sum_{j=1}^{n} F_j\, K_\rho(X_j \cdot X_i)\, K_\rho(Y_j \cdot Y_i)}{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} F_j\, K_\rho(X_j \cdot X_i)\, K_\rho(Y_j \cdot Y_i)\right)^2}$$

Il suffit de pré-calculer cette valeur.

6.6.4.4 Réciprocité

Comme les BRDFs sont réciproques, on a $F(x,y) = F(y,x)$ et on peut écrire :

$$\begin{aligned}
I_\rho(F)^{(2)}(X,Y) &= \iint_{(x,y)\in\Omega^{+2}} F(x,y)\, K_\rho(x \cdot X)\, K_\rho(y \cdot Y)\, d\omega(x)\, d\omega(y) \\
&= \frac{1}{2} \iint_{(x,y)\in\Omega^{+2}} F(x,y)\, K_\rho(x \cdot X)\, K_\rho(y \cdot Y)\, d\omega(x)\, d\omega(y) + \\
&\quad \frac{1}{2} \iint_{(x,y)\in\Omega^{+2}} F(y,x)\, K_\rho(y \cdot X)\, K_\rho(x \cdot Y)\, d\omega(x)\, d\omega(y) \\
&= \iint_{(x,y)\in\Omega^{+2}} F(x,y)\, \frac{1}{2}\left(K_\rho(x \cdot X)\, K_\rho(y \cdot Y) + K_\rho(y \cdot X)\, K_\rho(x \cdot Y)\right) d\omega(x)\, d\omega(y)
\end{aligned}$$

$I_\rho(F)$ conserve donc naturellement la réciprocité et on voit naturellement apparaître un noyau réciproque:

Définition 43 (noyau réciproque) *On définit le noyau réciproque de la manière suivante :*

$$K_\rho^{rec.}((X,Y),(x,y)) = \tfrac{1}{2}\left(K_\rho(x \cdot X)\, K_\rho(y \cdot Y) + K_\rho(y \cdot X)\, K_\rho(x \cdot Y)\right)$$

D'un point de vue discrétisation, cela revient simplement à doubler le nombre de mesures, en inversant les directions, mais cela est fait de façon cachée.

6.6.4.5 Conservation de l'énergie

On va chercher à calculer le facteur de réflexion $\bar{r}$, pour une incidence donnée X, pour notre fonction recomposée $\bar{F}$. On rappelle les définitions de r et $\bar{F}$:

$$r(X) = \int_{Y\in\Omega} F(X,Y)\, (Y \cdot N)\, d\omega(Y)$$
$$\bar{F}(X,Y) = \int_{x\in\Omega} \int_{y\in\Omega} F(x,y)\, K_\rho(x \cdot X)\, K_\rho(y \cdot Y)\, d\omega(x)\, d\omega(y)$$

En posant N la normale à la surface, on fait bien sûr l'hypothèse que F est nulle lorsque que les produits scalaires $X \cdot N$ ou $Y \cdot N$ sont négatifs.

$$\begin{aligned}
\bar{r}(X) &= \int_{Y\in\Omega} \bar{F}(X,Y)\,(Y\cdot N)\,d\omega(Y) \\
&= \int_{x\in\Omega}\int_{y\in\Omega} F(x,y)\,K_\rho(x\cdot X)\int_{Y\in\Omega} K_\rho(y\cdot Y)\,(Y\cdot N)\,d\omega(Y)\,d\omega(x)\,d\omega(y)
\end{aligned}$$

On peut calculer l'intégrale intérieure en Y en prenant y comme vecteur normal paramétrant $X \in \Omega$, et en orientant ce repère de façon à ce que N ait un angle azimuthal égal à 0. Dans ce repère, N s'écrit :

$$N = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ avec } \cos\alpha = y\cdot N$$

$$\begin{aligned}
&\int_{Y\in\Omega} K_\rho(y\cdot Y)\,(Y\cdot N)\,d\omega(Y) \\
= &\int_{\theta_Y=0}^{\pi}\int_{\varphi_Y=0}^{2\pi} K_\rho(\cos\theta_Y)\,(\cos\varphi_Y\,\sin\theta_Y\,\sin\alpha+\cos\theta_Y\,\cos\alpha)\,\sin\theta_Y\,d\theta_Y\,d\varphi_Y \\
= &\;2\pi\,\cos\alpha\int_{\theta_Y=0}^{\pi} K_\rho(\cos\theta_Y)\,\cos\theta_Y\,\sin\theta_Y\,d\theta_Y\,d\varphi_Y \\
= &\;2\pi\,\cos\alpha\int_{-1}^{1} K_\rho(t)\,t\,dt \\
= &\;\hat{K}_\rho(1)\,(y\cdot N)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\bar{r}(X) &= \hat{K}_\rho(1)\int_{x\in\Omega}\int_{y\in\Omega} F(x,y)\,K_\rho(x\cdot X)\,(y\cdot N)\,d\omega(y)\,d\omega(x) \\
&= \hat{K}_\rho(1)\int_{x\in\Omega} K_\rho(x\cdot X)\,r(x)\,d\omega(x) \\
&= \hat{K}_\rho(1)\,I_\rho(r)(X)
\end{aligned}$$

Propriété 40 (facteur de réflexion de $\bar{F}$) *Soit F une BRDF et r son facteur de réflexion. Soit $\bar{F}$ sa recomposition par convolution et $\bar{r}$ le facteur de réflexion de cette $\bar{F}$. On a alors :*

$$\bar{r} = \hat{K}_\rho(1)\,I_\rho(r)$$

On peut s'intéresser à la version discrétisée dans le cas d'un noyau réciproque (en revenant pour cela, comme d'habitude à l' expression faisant apparaître deux intégrales, qui devient une somme sur les échantillons) :

$$\hat{r}(X) = \hat{K}_\rho(1)\sum_{i=1}^{n} F_i\,\left(K_\rho(X_i\cdot X)\,(Y_i\cdot N)+K_\rho(Y_i\cdot X)\,(X_i\cdot N)\right)\frac{\Delta\omega_i}{2}$$

6.6.4.6 Isotropie

On va tout d'abord vérifier que notre méthode de reconstruction conserve l'isotropie d'une BRDF. Si X est un vecteur de Ω et ϕ un angle, on appelle $X+\phi$, le vecteur obtenu par rotation d'un angle ϕ autour de la normale. Si f est une BRDF isotrope, f vérifie :

$$\forall (X,Y) \in \Omega^{+2}, \forall \phi \in [0;2\pi] \;\; f(X+\phi, Y+\phi) = f(X,Y)$$

On écrit donc :

$$\begin{aligned} I_\rho(f)(X+\phi, Y+\phi) &= \iint_{\Omega^{+2}} F(x,y)\, K_\rho(x\cdot(X+\phi), y\cdot(Y+\phi))\, d\omega(x)\, d\omega(y) \\ &= \iint_{\Omega^{+2}} F(x,y)\, K_\rho((x-\phi)\cdot X, (y-\phi)\cdot Y)\, d\omega(x)\, d\omega(y) \\ &= \iint_{\Omega^{+2}} F(x+\phi, y+\phi)\, K_\rho(x\cdot X, y\cdot Y)\, d\omega(x)\, d\omega(y) \\ &= \iint_{\Omega^{+2}} F(x,y)\, K_\rho(x\cdot X, y\cdot Y)\, d\omega(x)\, d\omega(y) \\ &= I_\rho(f)(X,Y) \end{aligned}$$

Pour faire apparaître l'isotropie dans nos formules, on va chercher à modifier notre noyau. Étant données les propriétés de f, on voit immédiatement que le noyau adapté est :

$$K_{\rho\, iso}((x,y),(X,Y)) = \frac{1}{2\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} K_\rho(x\cdot(X+\phi), y\cdot(Y+\phi))\, d\phi$$

Malheureusement, ce noyau est difficile à calculer de façon générale. Il est cependant possible de le faire dans le cas du noyau unifié, avec des petites valeurs de k, en développant à l'aide du binôme de Newton, mais c'est assez fastidieux.

On va donc plutôt utiliser un noyau par maximum. C'est-à-dire que pour chaque échantillon, on va rechercher dans quelle position (en effectuant une rotation autour de la normale des deux directions, incidente et réfléchie) cet échantillon apporte la plus grande contribution. En partant du noyau unifié, on veut donc avoir :

$$\begin{gathered} K_{\rho\, iso}((x,y),(X,Y)) = \max_{\phi\in[0;2\pi]} K_\rho(x\cdot(X+\phi), y\cdot(Y+\phi)) \\ \Leftrightarrow \text{trouver l'angle } \phi \text{ maximisant } s(\phi) = x\cdot(X+\phi) + y\cdot(Y+\phi) \end{gathered}$$

dans le cas où le noyau utilisé est croissant (ce qui est le cas avec l'exemple proposé). Pour rechercher l'angle ϕ donnant le maximum on va procéder de la manière suivante :

$$\begin{gathered} s(\phi) = x\cdot(X+\phi) + y\cdot(Y+\phi) \\ = (\sin\theta_x \sin\theta_X \cos(\varphi_x-\varphi_X) + \sin\theta_y \sin\theta_Y \cos(\varphi_y-\varphi_Y))\cos\phi \\ +(\sin\theta_x \sin\theta_X \sin(\varphi_x-\varphi_X) + \sin\theta_y \sin\theta_Y \sin(\varphi_y-\varphi_Y))\sin\phi \\ +(\cos\theta_x \cos\theta_X + \cos\theta_y \cos\theta_Y) \end{gathered}$$

Si l'on appelle les trois coefficients précédents a, b, c, on peut écrire que :

$$s(\phi) = a \cos\phi + b \sin\phi + c \Rightarrow \max_{\phi\in[0;2\pi]} s(\phi) = \sqrt{a^2+b^2} + c$$

Après simplifications, on obtient le résultat suivant :

Définition 44 (noyau isotrope) *on définit le noyau isotrope de la manière suivante :*

$$K_{\rho\,iso}((x,y),(X,Y)) = \frac{(k+1)\,(k+2)}{16\pi^2\,(1-\rho)^2}\left(\frac{\frac{1}{2}\,s((x,y),(X,Y))-\rho}{1-\rho}\right)^k$$
$$s((x,y),(X,Y)) = (\sin^2\theta_x\,\sin^2\theta_X + \sin^2\theta_y\,\sin^2\theta_Y +$$
$$2\sin\theta_x\,\sin\theta_X\,\sin\theta_y\,\sin\theta_Y\,\cos((\varphi_x-\varphi_y)-(\varphi_X-\varphi_Y)))^{\frac{1}{2}} + \cos\theta_x\,\cos\theta_X + \cos\theta_y\,\cos\theta_Y$$

Cette expression ne dépend que des angles θ et des $\Delta\varphi$ entre les directions. Elle est donc bien isotrope. De plus, elle est aussi réciproque, si on restreint les $\Delta\varphi$ à $[0;\pi]$.

6.6.5 Approche hiérarchique

Le problème posé par la discrétisation présentée précédemment est celui du choix de ρ. En effet on ne possède a priori aucune information particulière sur la disposition des échantillons. Mais il semble logique de supposer que ceux-ci ne sont pas répartis régulièrement sur Ω^2. En effet, lors de mesures, on aura tendance à sur-échantillonner dans les domaines de fortes variations, en particulier, autour de la direction miroir où se trouve la plupart du temps un pic de spécularité. Le choix d'un ρ trop petit risque de créer des trous dans les domaines où se trouvent peu d'échantillons, alors que le choix d'un ρ trop grand va introduire un lissage bien trop important là où l'on a beaucoup de mesures. La solution pourrait être celle de choisir un ρ différent pour chaque échantillon. Mais cela soulève des problèmes :

- le choix du ρ d'un échantillon implique une connaissance a priori du type d'échantillonnage,
- une trop grande diversité dans les valeurs de ρ risque de conditionner l'aspect de l'approximation,
- certaines distributions d'échantillons ne se prêtent même pas à cette méthode.

En effet, prenons le cas d'échantillons répartis sur Ω de la manière suivante (*figure 6.14, p. 137*). Les croix correspondent à l'endroit sur l'hémisphère supérieure projeté où il y a des mesures en réflexion (la partie gauche, où les croix se concentrent correspond à la direction miroir, et la partie droite, elle, correspont à la direction d'incidence). Le trou visible sur la partie droite correspond à l'endroit où direction d'incidence et direction réfléchie sont égales, ce qu'il n'est pas possible de réaliser pratiquement avec l'appareil utilisé, puisqu'on ne peut mettre au même endroit source et capteur.

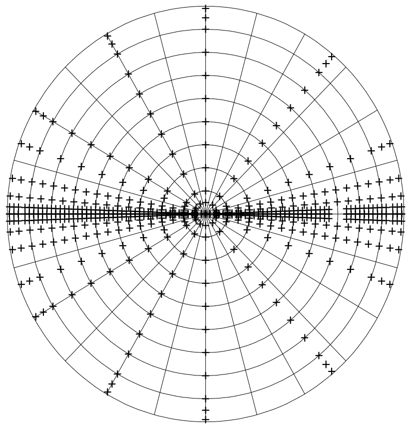

FIG. 6.14 – *distribution des directions réfléchies*

Il est évidemment impossible de choisir un bon ρ. La seule solution semblerait être d'introduire deux paramètres, un en θ, l'autre en ϕ. Cependant la justification mathématique présentée plus haut et les propriétés qui nous intéressent ne seraient plus valables.

6.6.5.1 Principe

La solution pour résoudre ce problème est d'avoir une approche similaire aux ondelettes. On va chercher à représenter la fonction sur différents niveaux, en raffinant de plus en plus. C'est-à-dire que l'on va commencer par représenter la fonction, puis de façon plus fine, l'erreur entre la fonction et la première recomposition, etc. On va aussi, si c'est nécessaire, travailler avec une double recomposition, en discrétisant à la fois sur la grille des échantillons mais aussi sur une grille régulière de Ω^{+2}.

6.6.5.2 Formalisation

On cherche donc à représenter une fonction F (la BRDF ou l'erreur par rapport à un modèle analytique). On a comme données : $\mathcal{E}_0$ l'ensemble des échantillons de Ω^2 que l'on a mesurés, $\mathcal{R}_0 \supset \mathcal{R}_1 \supset \mathcal{R}_2 \ldots$ des parties discrètes de Ω^2 de plus en plus fines, auxquelles on associe des paramètres $\rho_0 < \rho_1 < \rho_2 \ldots$ de plus en plus proches de 1. On applique deux fois la discrétisation présentée précédemment, une fois sur $\mathcal{E}_0$ et une fois sur $\mathcal{R}_0$:

$$I_{\rho_0\,(1)}(F)\,(X,Y) = C_0\,(X,Y) = \sum_{(x,y)\in\mathcal{E}_0} F(x,y)\,K_{\rho_0}\,((X,Y),(x,y))\;\Delta\omega_{\rho_0\,(1)}(x,y)^2$$

$$I_{\rho_0\,(2)}(F)\,(X,Y) = F_0\,(X,Y) = \sum_{(x,y)\in\mathcal{R}_0} C_0(x,y)\,K_{\rho_0}\,((X,Y),(x,y))\;\Delta\omega_{\rho_0\,(2)}(x,y)^2$$

On obtient donc une approximation de F, appelée F_0. Mais cette approximation est très lissée et encore éloignée de F, car :

- ρ_0 est assez petit pour prévenir les trous dus à la répartition dans $\mathcal{E}_0$,

- c'est le résultat de deux lissages.

Il faut donc améliorer cette approximation. C'est pourquoi l'on va maintenant chercher à représenter $F - F_0$, l'erreur commise après la première approximation. Toutefois, il est probable que pour un certain nombre de valeurs de $\mathcal{E}_0$, l'erreur commise soit très faible. On se fixe donc une erreur limite (ou un pourcentage d'erreur limite), et on déduit de $\mathcal{E}_0$ un ensemble $\mathcal{E}_1$, ensemble des données sur lesquelles l'erreur commise est trop importante :

$$\mathcal{E}_1 = \{(X, Y) \in \mathcal{E}_0 \ / \ \mid F(X, Y) - F_0(X, Y) \mid > seuil\}$$

On cherche maintenant à représenter $F - F_0$ et l'on écrit :

$$I_{\rho_1\,(1)}(F - F_0)\,(X, Y) = C_1\,(X, Y) = \sum_{(x,y)\in\mathcal{E}_1} F(x, y)\, K_{\rho_1}\,((X, Y), (x, y))\ \Delta\omega_{\rho_1\,(1)}(x, y)^2$$
$$I_{\rho_1\,(2)}(F - F_0)\,(X, Y) = F_1\,(X, Y) = \sum_{(x,y)\in\mathcal{R}_1} C_1(x, y)\, K_{\rho_1}\,((X, Y), (x, y))\ \Delta\omega_{\rho_1\,(2)}(x, y)^2$$

Et on répète le processus jusqu'à ce que toutes les données présentent une erreur inférieure au seuil imposé. Toutefois, lorsque le nombre de données est très faible, descendre trop bas ne présente pas d'intérêt. En effet, les capsules induites par le ρ_i ne comprendraient plus que la valeur de l'échantillon lui-même, et ne lisseraient plus, mais introduiraient des créneaux.

6.6.5.3 Avantages.

Les avantages d'une telle méthode sont multiples :

- il n'est plus utile de connaître a priori des valeurs pour les ρ,

- on a un raffinement progressif et contrôlable de la représentation,

- toutes les fonctions sont à support local, donc l'évaluation est très rapide,

- on a une décomposition analogue dans sa symétrie à celle des harmoniques sphériques.

Bien que le cardinal des ensembles $\mathcal{R}_i$ augmente très vite, le nombre réel de coefficients non nuls reste lui très petit. En fait, la formalisation peut être réécrite sous la forme :

Définition 45 (recomposition hiérarchique)

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_i &= \{(X,Y) \in \mathcal{E}_{i-1} \;/\; \mid F(X,Y) - F_0(X,Y) - \ldots - F_{i-1}(X,Y) \mid > erreur\} \\
F_i\,(X,Y) &= \sum_{(x,y)\in\mathcal{R}'_i} C_i(x,y)\, K_{\rho_i}\left((X,Y),(x,y)\right)\, \Delta\omega_{\rho_i\,(1)}(x,y)^2 \\
C_i\,(X,Y) &= \sum_{(x,y)\in\mathcal{E}_i} F(x,y) - F_0(x,y) - \ldots - F_{i-1}(X,Y)\, K_{\rho_i}\left((X,Y),(x,y)\right)\, \Delta\omega_{\rho_i\,(2)}(x,y)^2
\end{aligned}$$

En définissant $\mathcal{R}'_i$ comme étant la partie de $\mathcal{R}_i$ ou $C_i(X,Y)$ est non nul, c'est-à-dire l'intersection de $\mathcal{R}_i$ avec $\mathcal{E}_i$ augmenté de la taille de ses capsules. A ce moment, on écrit que : $F = F_0 + F_1 + F_2 + \ldots$

6.6.6 Utilisation pratique

On va détailler ici comment on utilise pratiquement cette représentation. L'implémentation peut légèrement varier suivant le type de données dont on dispose en entrée (si il est nécessaire ou pas de pratiquer la double recomposition).

6.6.6.1 Implémentation

L'implémentation se déroule en deux phases. Tout d'abord, on construit les différents noyaux, c'est-à-dire que l'on calcule leur position et la valeur que l'on va leur associer. Ensuite, on cherche à les stocker de façon à exploiter l'intérêt de cette méthode :

- on ne doit stocker que les noyaux apportant effectivement une contribution, c'est-à-dire ceux déterminés lors de la construction,
- on doit pouvoir exploiter le support local, en connaissant, en un minimum de temps, quels sont les noyaux concernés lors d'une évaluation de la recomposition.

6.6.6.1.1 Calage dans un modèle analytique On a vu précédemment qu'au lieu de représenter la BRDF elle-même, on pouvait commencer par représenter l'erreur par rapport à une BRDF analytique. Dans l'absolu, c'est la meilleure chose à faire. Cependant, la représentation de cette différence peut parfois être aussi complexe que la représentation de la BRDF originale. Dans bien des cas, on aura intérêt à utiliser comme BRDF analytique une valeur constante, en extrayant la composante diffuse des données à représenter (*chapitre 3, p. 47*).

6.6.6.1.2 Subdivision hiérarchique On a vu que pour utiliser cette méthode on a besoin d'une subdivision hiérarchique et régulière de l'hémisphère supérieur. Pour cela on se reportera à (*chapitre A, p. 153*). De manière pratique, on utilisera les polyèdres réguliers qui sont bien adaptés. La progression du paramètre entre les différents niveaux est la suivante :

$$\rho_{n+1} = \cos \frac{\cos^{-1} \rho_n}{2} = \sqrt{\frac{\rho_n + 1}{2}}$$

Le paramètre initial, dans le cas de l'icosaèdre est le cosinus de l'angle entre deux sommets de la structure de plus bas niveau, donc : $\rho_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. On peut aussi avoir à adapter la valeur du paramètre lorsque le niveau de subdivision augmente, étant donné que les tailles des facettes des polyèdres deviennent sensiblement différentes.

Dans le cas d'une BRDF anisotrope, on utilise cette structure de façon double, à la fois en incidence et en réflexion. Étant donné que le nombre de sommets augmente très rapidement, on ne peut pas stocker, pour éviter de saturer la mémoire avec des informations inutiles, tous les couples possibles. On ne veut stocker que les noyaux apportant effectivement une contribution, et en plus, pour exploiter le support local, on procède à une localisation, c'est-à-dire qu'on veut savoir, pour un couple de directions données, quels sont les noyaux pouvant apporter une contribution non nulle.

Dans le cas d'une BRDF isotrope, on utilise la structure conjointement avec une subdivision linéaire du segment $[0; \frac{\pi}{2}]$. En effet, dans le cas d'un quart d'octaèdre, le nombre de valeurs différentes en θ, dans le plan Oxz (ou Oyz) est égal à la racine carrée du nombre de sommets. De plus cette gamme de valeurs en θ est linéaire. Il suffit de diviser le segment $[0; \frac{\pi}{2}]$ en fonction d'un $\Delta\theta_n = \cos^{-1} \rho_n$.

De plus, en pratique on utilise deux seuils d'erreurs : un seuil d'erreur relatif s_{rel} et un seuil d'erreur absolu s_{abs}. La condition d'acceptation devient alors :

$$\begin{gathered} F' \text{ approche bien } F \\ \Leftrightarrow \left|F'(X,Y) - F(X,Y)\right| \leq s_{\text{abs}} \text{ ou } \left|F'(X,Y) - F(X,Y)\right| \leq s_{\text{rel}}\, F(X,Y) \end{gathered}$$

Ceci afin que des erreurs, dont le pourcentage par rapport à la valeur d'origine est assez important, ne viennent pas perturber si cette valeur d'origine est négligeable par rapport aux autres valeurs de la BRDF.

6.6.6.1.3 Localisation On va utiliser pour la localisation des noyaux une structure plus lâche que celle utilisée pour leur construction. La plus adaptée est l'igloo (*chapitre A, p. 153*). On va stocker dans chaque cellule c, les deux listes de noyaux suivantes :

- $l_i = \{$ noyaux ayant une contribution potentiellement non nulle, lorsqu'on les évalue pour une incidence située dans cette cellule $\}$,
- $l_r = \{$ noyaux ayant une contribution potentiellement non nulle, lorsqu'on les évalue pour une direction réfléchie située dans cette cellule $\}$.

Lors de l'évaluation pour un couple de directions quelconques (X, Y), il suffira de faire l'intersection du l_i de la cellule où se trouve X, et du l_r où se trouve Y, notée l. Ensuite on fera l'évaluation complète de tous les noyaux de l.

Dans le cas d'une BRDF isotrope, où le nombre de noyaux est bien inférieur, on peut procéder différemment, en utilisant uniquement des bandes en θ. En effet, un noyau situé en (X, Y) n'apporte aucune contribution lorsqu'on l'évalue en (x, y) avec ϕ_{xy} quelconque si et seulement si :

$$\forall \phi_{xy} \in [0; \pi] \ s((x,y),(X,Y)) \leq 2\rho \Leftrightarrow \max_{\phi_{xy} \in [0;\pi]} s((x,y),(X,Y)) \leq 2\rho$$
$$\Leftrightarrow \cos(\theta_x - \theta_X) + \cos(\theta_y - \theta_Y) \leq 2\rho \text{ (maximum atteint pour } \phi_{xy} = \phi_{XY} \text{)}$$

Donc, quelque soit ϕ_{xy} :

$$\cos(\theta_x - \theta_X) \leq 2\rho - 1 \text{ ou } \cos(\theta_y - \theta_Y) \leq 2\rho - 1$$
$$\Rightarrow \text{le noyau situé en } (X, Y) \text{ avec le paramètre } \rho \text{ ne contribue pas en } (x, Y)$$

6.6.6.2 Méthodes de Monte-Carlo

Si on veux utiliser cette représentation dans une simulation de Monte-Carlo, on doit être capable de tirer une direction réfléchie proportionnellement à la valeur de la BRDF, pour une incidence donnée (*chapitre B, p. 165*).

Dans le cas du noyau séparé, il est facile de faire ce tirage, puisque les noyaux sont séparables, et normalisés individuellement. Mais de toute façon, il est souvent plus judicieux d'utiliser directement les mesures dont on dispose pour faire un tirage.

6.7 Comparaisons

6.7.1 Introduction

6.7.1.1 Utilisation des recompositions

Les méthodes précédentes peuvent être utilisées pour représenter des BRDFs directement, ou des fonctions intermédiaires. Étant donné que lors de son utilisation, la BRDF va être invoquée sous la forme : $f(\omega_1, \omega_2) \cos\theta_2$, on peut aussi essayer de représenter $f(\omega_1, \omega_2) \cos\theta_1 \cos\theta_2$, qui nous permet de nous affranchir des pics spéculaires très importants se formant aux incidences rasantes. Toutefois, l'avantage de cette représentation n'a pas été prouvée, puisque dans tous les cas exposés plus avant, l'erreur énergétique est supérieure à celle due à une représentation directe de la BRDF.

6.7.1.2 Implémentation des harmoniques sphériques et des polynômes de Zernike

Il a été réalisé une implémentation générale de ces deux méthodes, appliquées aux fonctions réelles. Le code a été écrit en `C++`, vu l'aspect objet qui se dégage de ces méthodes. On se retrouve donc, dans le cas des BRDFs avec les classes suivantes, pour les harmoniques sphériques :

`HS1Normal`	fonctions de $\Omega \to \mathbb{R}$
`HS1Dessus`	fonctions de $\Omega^+ \to \mathbb{R}$
`HS2Normal`	fonctions de $\Omega^2 \to \mathbb{R}$
`HS2Dessus`	fonctions de $\Omega^{+2} \to \mathbb{R}$
`HS2BrdfAnisotrope`	BRDFs anisotropes
`HS2BrdfSymetrique`	BRDFs anisotropes et symétriques
`HS2BrdfIsotrope`	BRDFs isotropes
`HS2BrdfInterpole`	BRDFs isotropes par interpolation

Et des classes de polynômes de Zernike suivantes :

`KZ1Dessus`	fonctions de $\Omega^+ \to \mathbb{R}$
`KZ2Dessus`	fonctions de $\Omega^{+2} \to \mathbb{R}$
`KZ2BrdfAnisotrope`	BRDFs anisotropes
`KZ2BrdfSymetrique`	BRDFs anisotropes et symétriques
`KZ2BrdfIsotrope`	BRDFs isotropes
`KZ2BrdfInterpole`	BRDFs isotropes par interpolation

La représentation de BRDFs isotropes par interpolation consiste à représenter la BRDF pour un certain nombre d'incidences données, à l'aide de `HS1Dessus` ou `KZ1Dessus`. Ensuite pour obtenir la BRDF pour une incidence quelconque, on fera une interpolation entre les coefficients pour chaque incidence. Cette méthode est naturelle dans le cas où l'on dispose de la BRDF comme le résultat de mesures, où l'on a généralement la BRDF pour différentes incidences. Mais cette méthode ne fournit pas des fonctions vérifiant le principe de réciprocité. Elle est proposée à titre de comparaison pour les BRDFs issues de mesures.

6.7.1.3 Méthode d'évaluation des résultats

L'évaluation des résultats va être faite sur trois critères différents :

- la qualité de la recomposition, objectif essentiel,
- le temps d'évaluation de la recomposition, objectif aussi essentiel,
- l'occupation mémoire,
- le temps de calcul de la recomposition.

Pour évaluer la qualité de la recomposition, on va utiliser les erreurs présentées dans (*chapitre 4, p. 61*). Tous les calculs sont effectués sur un processeur `R10000` cadencé à $195 Mhz$.

6.7.2 Résultats

6.7.2.1 BRDF de céramique

On effectue ici des comparaisons pour une BRDF de céramique (*chapitre 3, p. 47*). On va comparer notre méthode aux harmoniques sphériques (HS) et aux polynômes de Zernike (KZ). On appelle n le nombre de coefficients, t_e le temps d'évaluation moyen de la recomposition pour un couple de directions, t_c le temps de précalcul de la recomposition.

6.7.2.1.1 Méthodes classiques On présente ici les résultats avec les méthodes des harmoniques sphériques et des polynômes de Zernike. On peut voir les résultats dans (*table 6.5, p. 143*).

type	HS	HS	KZ	KZ
n	285	819	285	819
ϵ_f	72%	54%	68%	51%
ϵ_e	69%	51%	67%	49%
t_e	0.22ms	0.41ms	0.19ms	0.34ms
t_c	15mn	42mn	15mn	42mn

TAB. 6.5 – *recomposition d'une BRDF de céramique avec des harmoniques sphériques et des polynômes de Zernike*

6.7.2.1.2 Premier essai On va tout d'abord effectuer un essai avec uniquement un seuil d'erreur relatif, fixé à 10%. Les résultats sont visibles sur (*table 6.6, p. 143*). On constate que le temps de calcul reste très faible, même lorsque le nombre de coefficients augmente, grâce au support local. De plus, la qualité s'améliore bien lorsque le nombre de coefficients augmente, bien que l'on semble atteindre une borne de 20%.

type	1 niveau	2 niveaux	3 niveaux	4 niveaux
n	245	700	962	1326
ϵ_f	49%	34%	27%	21%
ϵ_e	51%	38%	29%	24%
t_e	0.05ms	0.08ms	0.08ms	0.09ms
t_c	8s	25s	43s	1mn

TAB. 6.6 – *recomposition d'une BRDF de céramique avec notre méthode (premier essai)*

6.7.2.1.3 Deuxième essai La tolérance demandée dans l'exemple précédent était de 10% en relatif. La représentation obtenue était de bonne qualité, mais pas très concise.

Or, en observant la BRDF, on constate qu'elle possède une base diffuse presque parfaite. En se donnant une erreur absolue valant cette base diffuse, on se retrouve avec une représentation beaucoup plus concise (*table 6.7, p. 144*). L'erreur obtenue est cependant plus importante. Pour cela, on utilise le système de représentation présenté précédemment (*figure 6.15, p. 144*).

type	1 niveau	2 niveaux	3 niveaux	4 niveaux
n	18	140	267	477
ϵ_f	81%	27%	18%	16%
ϵ_e	77%	25%	16%	14%
t_e	0.02ms	0.03ms	0.05ms	0.06ms
t_c	1s	4s	9s	16s

TAB. 6.7 – *recomposition d'une BRDF de céramique avec notre méthode (deuxième essai)*

C'est déjà beaucoup mieux, puisqu'on se concentre sur le pic spéculaire. Dans le cas de la représentation la plus grossière, celle avec 18 coefficients, on peut observer l'erreur sur (*figure 6.15, p. 144*).

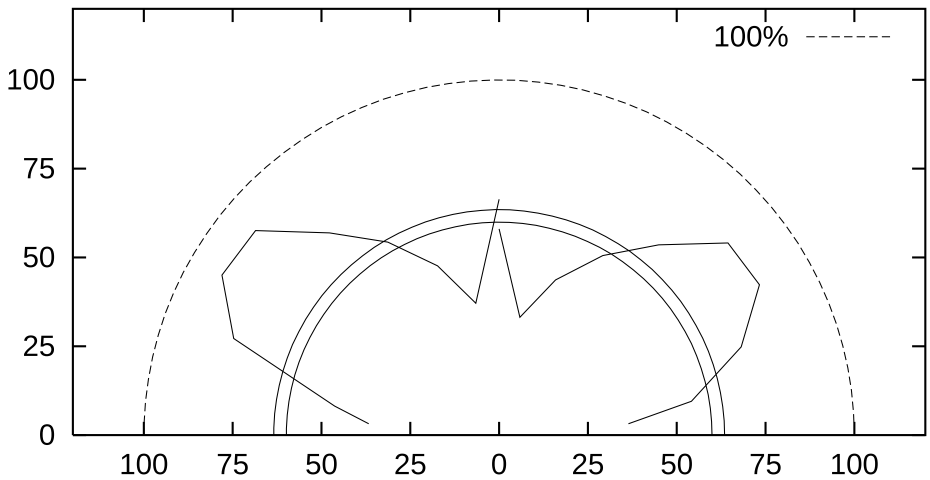

FIG. 6.15 – *erreur de représentation d'une BRDF de céramique*

D'un point du vue forme, on peut voir la différence entre cette représentation grossière avec notre méthode, et des représentations plus fines, au sens mathématique, à l'aide des harmoniques sphériques et des polynômes de Zernike (*figure 6.16, p. 145*). On constate dans le cas de ces dernières que le contrôle global donne une sorte d'effet *balle* *de golf* dans la composante diffuse. Il serait inutile de vouloir séparer cette composante pour ne vouloir représenter que le pic, car le même comportement se produirait.

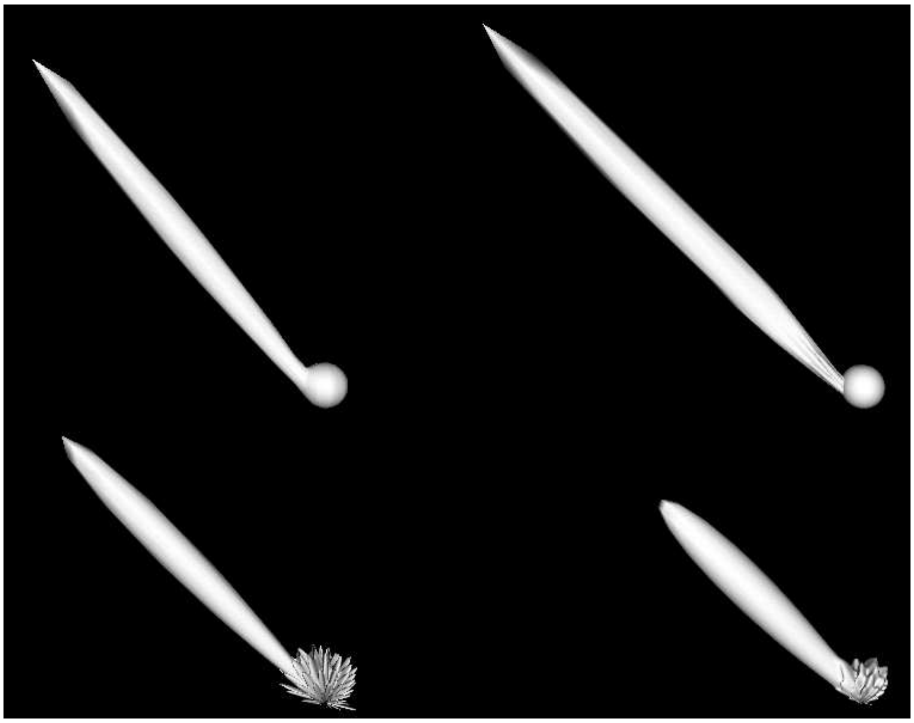

FIG. 6.16 – *comparaison de la représentation d'une BRDF de céramique (en haut à gauche, fonction originale, en haut à droite, notre méthode avec 18 coefficients, en bas à gauche, harmoniques sphériques avec 819 coefficients, en bas à droites, polynômes de Zernike avec 819 coefficients*

6.7.2.2 BRDF de revêtement routier

6.7.2.2.1 Méthodes classiques On présente ici les résultats avec les méthodes des harmoniques sphériques et des polynômes de Zernike. On peut voir les résultats dans (*table 6.8, p. 146*). Par rapport au cas précédent, on a rajouté une représentation avec interpolation (HSi et KZi).

On constate pour la première fois que les polynômes de Zernike apportent quelque chose de différent par rapport aux harmoniques sphériques. Il est assez difficile de représenter cette BRDF et il faut beaucoup de coefficients pour avoir un résultat de qualité.

6.7.2.2.2 Notre méthode Avec notre méthode, pour une représentation à deux niveaux, on obtient le résultat suivant : 489 coefficients, et $\epsilon_b = 25\%$, $\epsilon_c = 32\%$. On peut

type	HS	HS	HSi	KZ	KZ	KZi
n	285	819	1690	285	819	1690
ϵ_f	67%	66%	38%	59%	53%	23%
ϵ_e	76%	78%	37%	77%	77%	19%
t_e	0.22ms	0.41ms	0.18ms	0.19ms	0.34ms	0.18ms
t_c	15mn	42mn	4mn51s	15mn	42mn	4mn53s

TAB. 6.8 – *recomposition d'une BRDF de route avec des harmoniques sphériques et des polynômes de Zernike*

voir le résultat sur la (*figure 6.17, p. 146*). Cette BRDF étant globalement plus diffuse que la précédente (pas de pic spéculaire aussi fort), il faut plus de coefficients pour bien la représenter.

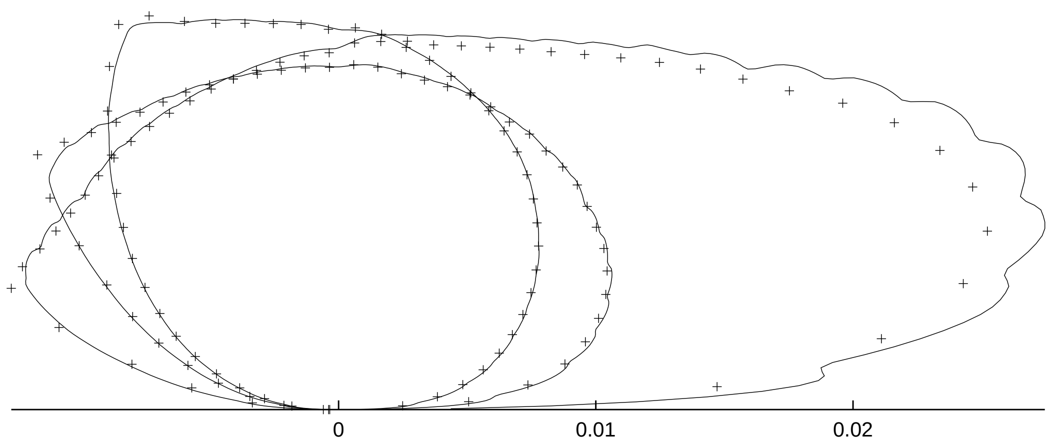

FIG. 6.17 – *BRDF de revêtement routier recomposée, incidences de 30°, 50° et 70° (mesures en trait discontinu, recomposition en trait continu)*

6.7.2.3 BRDF d'ardoise

Cette BRDF est celle d'une ardoise. On a utilisé cette fois 60 coefficients, et on obtient $\epsilon_b = 12\%$, $\epsilon_c = 15\%$. Le résultat peut être visualisé sur (*figure 6.18, p. 147*). On peut observer les sortes de moutonnements qui se créent dans la recomposition pour ce type de BRDF, assez diffuse.

Afin de visualiser le résultat de l'utilisation de cette BRDF, on a calculé l'image d'une sphère de ce matériau, éclairée par une source ponctuelle. On compare le résultat

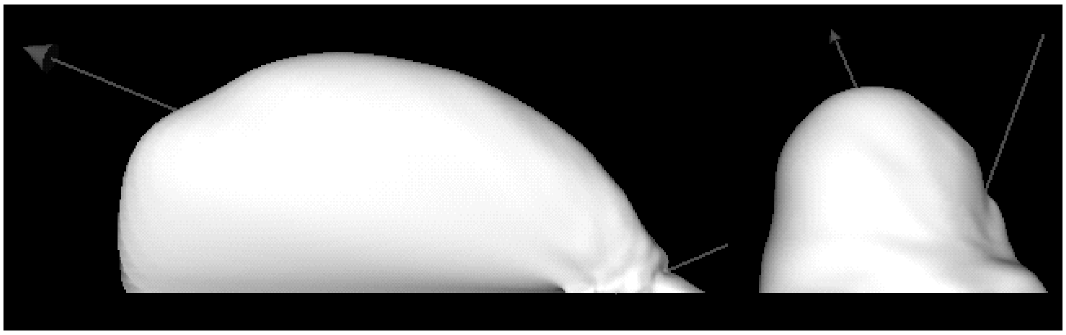

FIG. 6.18 – *recomposition d'une BRDF d'ardoise, incidence de* 60^o *et* 30^o

avec la BRDF originale (sous la forme de pavés, l'échantillon le plus proche étant utilisé pour le rendu) et une BRDF obtenue par calage, dans le modèle de Lafortune [LFTG97] (un lobe diffus et un lobe spéculaire) (*figure 6.19, p. 147*).

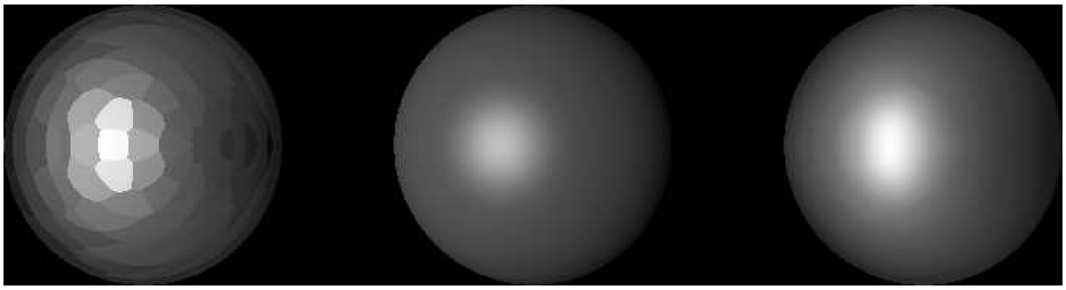

FIG. 6.19 – *rendu d'une sphère en ardoise, BRDF expérimentale, BRDF recomposée, BRDF analytique*

6.7.2.4 Autres résultats et perspectives

Nous allons présenter ici quelques résultats rapides :

- base de données de Cornell : pour la BRDF de peinture présentée dans (*chapitre 3, p. 47*), les résultats de la recomposition sont dans (*table 6.9, p. 148*).

  La comparaison entre la BRDF originale et la BRDF recomposée (avec ≈ 700 coefficients) est visible sur (*figure 6.20, p. 148*). Il faut beaucoup de coefficients pour obtenir une erreur faible étant donné que la BRDF mesurée a une forme presque très diffuse pour des incidences inférieures à 60^o. Du coup, il devient important de représenter les variations sur cette partie diffuse, comme la petite bosse de rétro-réflexion pour avoir une erreur faible.
- base de données de CUReT

nombre de niveaux	nombre de coefficients	ϵ_e
2	≈ 130	68%
2	≈ 400	32%
2	≈ 700	24%
2	≈ 1000	18%
3	≈ 1200	12%

TAB. 6.9 – *recomposition d'une BRDF de peinture*

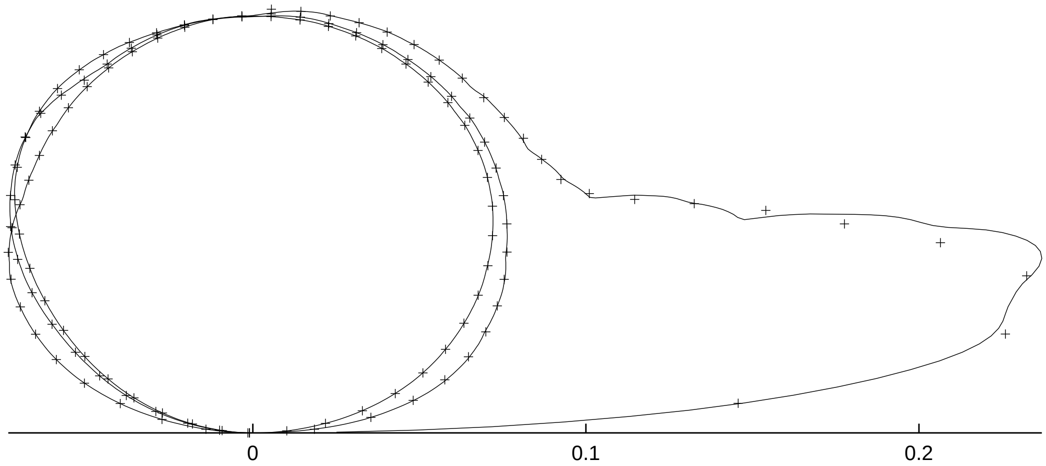

FIG. 6.20 – *BRDF de peinture recomposée, incidences de 40°, 55° et 70° (mesures en trait discontinu, recomposition en trait continu)*

Étant donné que les BRDFs de cette base de données (*chapitre 3, p. 47*) ne comportent que peu d'échantillon, on ne possède qu'un comportement global de ces BRDFs. Du coup, il devient très facile de les recomposer avec une erreur très faible et peu de coefficients. On présente un exemple de recomposition sur (*figure 6.21, p. 149*). Pour la plupart des BRDFs disponibles, il suffit d'à peu près 60 échantillons pour obtenir une erreur de 10%.

De manière générale, on peut mettre en avant le fait qu'il y aura toujours une erreur résiduelle, due au fait que la BRDF recomposée vérifie des propriétés que les mesures ne vérifient pas forcément (comme la réciprocité).

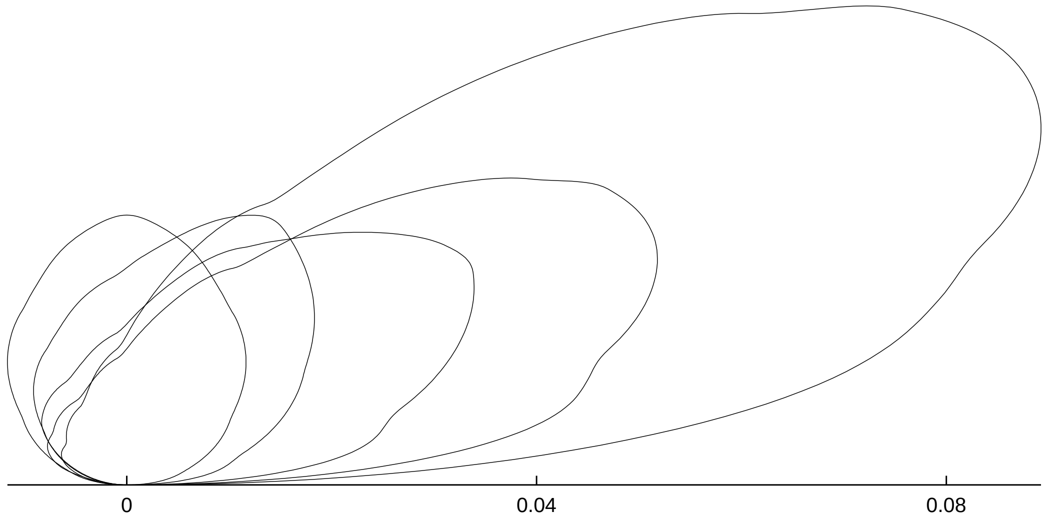

FIG. 6.21 – *BRDF de papier d'aluminium recomposée, incidences de* 0^o, 20^o, 40^o, 60^o *et* 80^o

Chapitre 7

Conclusion

Au cours de ce mémoire de thèse, nous avons abordé la question des BRDFs par différents points de vue. C'est un domaine en pleine expansion, puisque l'on est en mesure, avec les algorithmes et les machines d'aujourd'hui, d'intégrer des BRDFs de plus en plus complexes dans les calculs de synthèse d'images.

Nous avons tout d'abord étudié quelques résultats expérimentaux de mesures de BRDFs, ce qui nous a permis de nous rendre compte de la complexité et des comportements radicalement différents qu'elles peuvent avoir. Ceci met en évidence l'importance de l'utilisation de BRDFs expérimentales lors des calculs, puisque les modèles analytiques «classiques» ne permettent pas de gérer tous les phénomènes que l'on a pu observer. De plus, aujourd'hui, la quantité des données mesurées dont on dispose ne cesse d'augmenter, et on sera amené à l'avenir à utiliser non seulement des mesures de BRDF, mais aussi des mesures de spectres de lampes, ou encore la réponse du système d'acquisition (la caméra) utilisé. Tout cela, dans une même optique, obtenir des images photoréalistes.

Le problème qui se posait alors naturellement était la représentation de ces mesures expérimentales et leur utilisation dans une simulation informatique. Nous avons exposé une méthode permettant d'utiliser ces mesures de façon efficace en synthèse d'images, puisqu'à l'avenir on sera amené à utiliser de plus en plus de données expérimentales (mesures de BRDFs, mais aussi spectres de lampes, système d'acquisition, ...). Nous avons présenté une méthode qui a l'avantage de la simplicité et de la rapidité, tout en étant particulièrement adaptée aux BRDFs.

Nous avons alors dû introduire une notion d'erreur entre BRDFs, afin d'être capables de comparer une représentation à une BRDF de référence. Nous avons essayé de fournir une erreur dont la valeur puisse être directement interprétée.

Un chapitre important a été consacré à l'élaboration d'un goniophotomètre virtuel. Nous avons voulu recréer un modèle informatique simulant un appareil existant pour deux raisons principales : la validation de modèles théoriques basés sur une modélisation de la surface et des hypothèses physiques que l'on était en mesure de reproduire, ainsi que la simulation d'expériences réellement exécutées. Nous en avons déduit que, malgré des limitations dues à un manque de données concrètes (essentiellement les caractéristiques des matériaux utilisés), on pouvait mieux comprendre les phénomènes de réflexion et disposer d'informations impossibles à obtenir (et hélas à vérifier) pratiquement, comme la séparation des réflexions simples et multiples.

L'un des points que nous n'avons pas abordé, est l'aspect spectral de la BRDF. On a souvent, jusqu'à présent, supposé que la BRDF était le produit d'une partie géométrique et d'une partie spectrale. Seulement, aujourd'hui, alors que l'on dispose de mesures de BRDFs spectrales, on constate combien cette approximation est fausse.

De plus, une BRDF n'est pas une donnée suffisante pour représenter correctement et complètement un matériau en images de synthèse. En effet, la BRDF ne s'interesse qu'au comportement en réflexion en un point du matériau, propriété que l'on considère valable sur toute la surface. Il devient alors indispensable de s'interesser à l'aspect géométrie locale du matériau.

D'autre part, nous nous sommes intéressés uniquement à la réflexion, alors que les phénomènes de transmission, voir même d'absorption et de ré-émission jouent un rôle aussi important.

Les méthodes présentées dans ce mémoire (reconstruction de BRDFs et goniophotomètre virtuel) restent heureusement suffisamment ouvertes pour être réutilisables dans cette nouvelle optique.

En conclusion, nous avons donc fait le pont entre trois aspects différents mais complémentaires :

- la réalité, c'est-à-dire l'expérience, les mesures de phénomènes réels, réalisées avec des goniophotomètres,
- la simulation de la réalité à l'aide de méthodes de représentation des BRDFs, dans un lancer de rayons,
- l'utilisation de la simulation comme nouvelle source d'informations, c'est-à-dire la simulation d'expérience, à l'aide du goniophotomètre virtuel.

Annexe A

Subdivision de la sphère

A.1 Objectif

La sphère (ou la demi-sphère) joue un rôle essentiel dans la gestion des BRDFs, que ce soit pour générer des directions ou pour procéder à des intégrations. On a donc besoin de la discrétiser sous forme de facettes ou de points. Un des critères essentiels de cette discrétisation est qu'elle doit se faire à angle solide constant, de façon à être la plus régulière possible. Nous allons donc étudier différentes méthodes, en mettant en avant les avantages et les inconvénients de chacune d'entre elles.

A.2 Subdivision régulière suivant l'angle azimuthal

A.2.1 Méthode

Cette méthode consiste à diviser la sphère en n_φ quartiers égaux selon l'angle azimuthal φ. Ensuite on va diviser la sphère en $n_\theta + 1$ bandes selon l'angle zénithal θ. On a donc :

$$\varphi_j = \frac{2\pi j}{n_\varphi}, j \in \{0, 1, \ldots, n_\varphi - 1\}$$
$$\theta_0 = 0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{n_\theta} = \pi$$

Étant donné que l'on veut un angle solide constant, et que l'on a divisé la sphère en $n_\theta\, n_\varphi$ facettes, l'angle solide délimité par les quatre points (θ_i, φ_j), $(\theta_{i+1}, \varphi_j)$, $(\theta_{i+1}, \varphi_{j+1})$, $(\theta_i, \varphi_{j+1})$, avec $i \in \{0, 1, \ldots, n_\theta - 1\}$ et $j \in \{0, 1, \ldots, n_\varphi - 1\}$, noté $\Delta\omega_{i,j}$, vaut :

$$\begin{aligned}
\Delta\omega_{i,j} &= \int_{\theta=\theta_i}^{\theta_{i+1}} \int_{\varphi=\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\
&= \frac{2\pi}{n_\varphi}(\cos\theta_i - \cos\theta_{i+1}) = \frac{4\pi}{n_\theta \, n_\varphi} \\
&\Rightarrow \cos\theta_i - \cos\theta_{i+1} = \frac{2}{n_\theta} \\
&\Rightarrow \cos\theta_i = 1 - \frac{2i}{n_\theta}
\end{aligned}$$

La formule pour les angles est donc :

Définition 46 (subdivision régulière de la sphère) *en utilisant les points suivants sur la sphère :*

$$\begin{array}{ll}
\theta_i = \cos^{-1}\left(1 - \frac{2i}{n_\theta}\right) & i \in \{0, 1, \ldots, n_\theta\} \\
\varphi_j = \frac{2\pi j}{n_\varphi} & j \in \{0, 1, \ldots, n_\varphi - 1\}
\end{array}$$

on obtient une subdivision de la sphère à angle solide constant en $n_\theta \, n_\varphi$ facettes, avec $(n_\theta + 1) \, n_\varphi$ points.

A.2.2 Application à la demi-sphère

Le cas de la demi-sphère ne pose pas de problème particulier. On obtient :

Définition 47 (subdivision régulière de l'hémisphère) *en utilisant les points suivants sur l'hémisphère supérieur :*

$$\begin{array}{ll}
\theta_i = \cos^{-1}\left(1 - \frac{i}{n_\theta}\right) & i \in \{0, 1, \ldots, n_\theta\} \\
\varphi_j = \frac{2\pi j}{n_\varphi} & j \in \{0, 1, \ldots, n_\varphi - 1\}
\end{array}$$

on obtient une subdivision de l'hémisphère supérieure à angle solide constant en $n_\theta \, n_\varphi$ facettes, avec $(n_\theta + 1) \, n_\varphi$ points.

A.2.3 Utilisation

Pour savoir dans quelle facette se situe un vecteur, le calcul est instantané. De même, la mise en oeuvre est très simple. Mais on peut remarquer que :

- les facettes ont des formes très irrégulières. En effet, selon que l'on se situe près de $\theta = 0$ ou de $\theta = \frac{\pi}{2}$ les formes sont très différentes. Cela a une grande importance dans le cas où l'on capte quelque chose dans les facettes, ou lorsque la sphère peut être soumise à rotation, la distribution des points n'étant alors plus du tout la même.
- les nombres de divisions en θ et en φ sont indépendants. Et il n'existe pas de choix particulier donnant une forme plus régulière aux facettes.

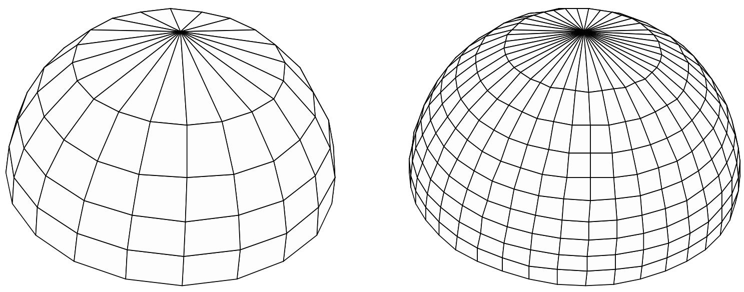

FIG. A.1 – *division régulière de l'hémisphère*

A.3 Subdivision récursive par polyèdres

A.3.1 Méthode

Il existe un certain nombre de polyèdres réguliers (dont les faces sont toutes identiques) dont les sommets sont situés sur une sphère. On peut notamment mettre en avant ceux dont les faces sont des triangles équilatéraux : le tétraèdre (4 faces), l'octaèdre (8 faces) et l'icosaèdre (20 faces). En effet, à partir de ces polyèdres de base, en subdivisant chaque facette triangulaire en quatre nouveaux triangles, on obtient des subdivisions de plus en plus fines.

A.3.1.1 Construction des polyèdres de base

A.3.1.1.1 Tétraèdre Le tétraèdre est un polyèdre à quatre faces triangulaires équilatérales identiques s'inscrivant dans la sphère unité. Il a quatre sommets et six arêtes.

Définition 48 (construction topologique d'un tétraèdre) *on pose* $\theta_0 = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)$. *On exprime les sommets* P_i *en coordonnées sphériques* (θ, φ). *On exprime les faces* F_j *sous la forme de triplets de trois sommets* (P_a, P_b, P_c), *donnés dans le sens direct.*

$$\begin{array}{ll}
P_0 = (0, 0) & F_0 = (P_0, P_1, P_2) \\
P_1 = (\theta_0, 0) & F_1 = (P_0, P_2, P_3) \\
P_2 = (\theta_0, \frac{2\pi}{3}) & F_2 = (P_0, P_3, P_1) \\
P_3 = (\theta_0, \frac{4\pi}{3}) & F_3 = (P_3, P_2, P_1)
\end{array}$$

A.3.1.1.2 Octaèdre L'octaèdre est un polyèdre à huit faces triangulaires équilatérales identiques s'inscrivant dans la sphère unité. Il a six sommets et douze arêtes.

Définition 49 (construction topologique d'un octaèdre) *on exprime les sommets* P_i *en coordonnées cartesiennes* (x, y, z). *On exprime les faces* F_j *sous la forme de triplets* *de trois sommets (P_a, P_b, P_c), donnés dans le sens direct.*

$$\begin{array}{lll}
P_0 = (0,0,1) & F_0 = (P_0, P_1, P_2) & F_4 = (P_5, P_2, P_1) \\
P_1 = (1,0,0) & F_1 = (P_0, P_2, P_3) & F_5 = (P_5, P_3, P_2) \\
P_2 = (0,1,0) & F_2 = (P_0, P_3, P_4) & F_6 = (P_5, P_4, P_3) \\
P_3 = (-1,0,0) & F_3 = (P_0, P_4, P_1) & F_7 = (P_5, P_1, P_4) \\
P_4 = (0,-1,0) & & \\
P_5 = (0,0,-1) & &
\end{array}$$

A.3.1.1.3 Icosaèdre L'icosaèdre est un polyèdre à vingt faces triangulaires équilatérales identiques s'inscrivant dans la sphère unité. Il a douze sommets et trente arêtes. C'est sans le doute le plus complexe à imaginer. C'est pourquoi on fournit un plan de construction d'un icosaèdre en papier, afin de mieux appréhender sa structure. Sur une feuille de papier, représenter le dessin de la (*figure A.2, p. 156*). Ensuite, découper le contour du dessin, et effectuer successivement les collages dans l'ordre donné par (*table A.1, p. 157*).

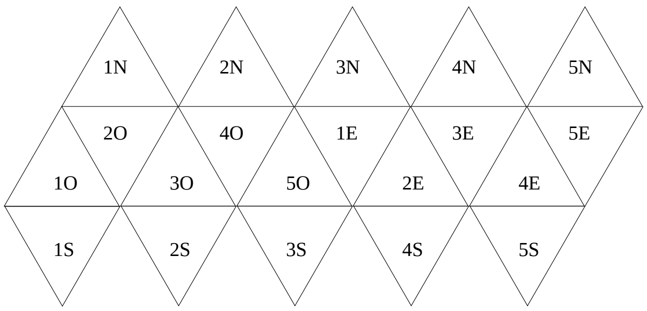

FIG. A.2 – *plan pour la construction d'un icosaèdre*

Définition 50 (construction topologique d'un icosaèdre) *on pose* $\theta_0 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. *On exprime les sommets P_i en coordonnées sphériques (θ, φ). On exprime les faces F_j*

étape	coller ...
1	1S à 2S
2	4S à 5S
3	2S à 3S
4	3S à 4S
5	1S à 5S
6	1N à 2N
7	3N à 4N
8	1O à 5E
9	2N à 3N
10	et enfin 5N

TAB. A.1 – *plan pour la construction d'un icosaèdre*

sous la forme de triplets de trois sommets (P_a, P_b, P_c)*, donnés dans le sens direct.*

$$\begin{array}{lll}
P_0 = (0,0) & F_0 = (P_0, P_1, P_2) & F_{10} = (P_2, P_6, P_7) \\
P_1 = (\theta_0, 0) & F_1 = (P_0, P_2, P_3) & F_{11} = (P_3, P_7, P_8) \\
P_2 = (\theta_0, \frac{2\pi}{5}) & F_2 = (P_0, P_3, P_4) & F_{12} = (P_4, P_8, P_9) \\
P_3 = (\theta_0, \frac{4\pi}{5}) & F_3 = (P_0, P_4, P_5) & F_{13} = (P_5, P_9, P_{10}) \\
P_4 = (\theta_0, \frac{6\pi}{5}) & F_4 = (P_0, P_5, P_1) & F_{14} = (P_1, P_{10}, P_6) \\
P_5 = (\theta_0, \frac{8\pi}{5}) & F_5 = (P_1, P_6, P_2) & F_{15} = (P_{11}, P_7, P_6) \\
P_6 = (\pi - \theta_0, \frac{\pi}{5}) & F_6 = (P_2, P_7, P_3) & F_{16} = (P_{11}, P_8, P_7) \\
P_7 = (\pi - \theta_0, \frac{3\pi}{5}) & F_7 = (P_3, P_8, P_4) & F_{17} = (P_{11}, P_9, P_8) \\
P_8 = (\pi - \theta_0, \frac{5\pi}{5}) & F_8 = (P_4, P_9, P_5) & F_{18} = (P_{11}, P_{10}, P_9) \\
P_9 = (\pi - \theta_0, \frac{7\pi}{5}) & F_9 = (P_5, P_{10}, P_1) & F_{19} = (P_{11}, P_6, P_{10}) \\
P_{10} = (\pi - \theta_0, \frac{9\pi}{5}) & & \\
P_{11} = (\pi, 0) & &
\end{array}$$

A.3.1.2 Processus de récursion

On dispose donc de polyèdres de base dont les faces sont des triangles, et dont les sommets se situent sur la sphère unité. Ce polyèdre de base sera considéré comme le niveau 0 de notre subdivision. Pour passer d'un niveau au niveau suivant, on procède comme sur (*figure A.3, p. 158*).

On crée trois nouveaux sommets Q01, Q12, Q20, qui sont les milieux respectifs des arêtes P0P1, P1P2, P2P0. Les vecteurs OQ01, OQ12, OQ20 sont alors normalisés de façon à ce que les points Q01, Q12, Q20 soient sur la sphère unité. On a alors quatre nouvelles faces, qui vérifient les mêmes propriétés que la face mère.

Si on appelle respectivement S_n, A_n, F_n, le nombre de sommets, arêtes et faces au niveau n, on peut écrire :

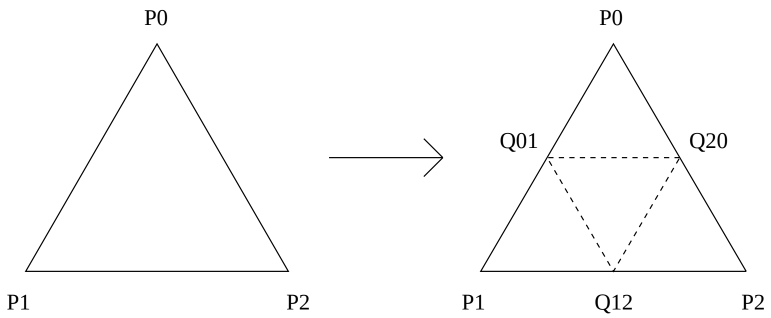

FIG. A.3 – *processus de récursion dans un polyèdre*

$$\begin{array}{rcll}
S_{n+1} & = & S_n + A_n & \text{on rajoute un sommet au milieu de chaque arête} \\
A_{n+1} & = & 2A_n + 3F_n & \text{chaque arête est divisée en deux, et on crée} \\
 & & & \text{trois nouvelles arêtes pour la face centrale} \\
F_{n+1} & = & 4F_n & \text{chaque face est remplacée par quatre nouvelles faces}
\end{array}$$

On sait par la relation d'Euler (et on vérifie sur les équations précédentes) que $S_n - A_n + F_n = C$, où C est le nombre de composantes connexes de l'espace ($C = 2$ dans le cas d'un polyèdre fermé, puisqu'on sépare l'intérieur de l'extérieur). Les solutions du système sont :

$$\begin{array}{rcl}
S_n & = & S_0 - A_0 + F_0 + 2^n \left(A_0 - \dfrac{3F_0}{2}\right) + 4^n \, \dfrac{F_0}{2} \\
A_n & = & 2^n \left(A_0 - \dfrac{3F_0}{2}\right) + 4^n \, \dfrac{3F_0}{2} \\
F_n & = & 4^n \, F_0
\end{array}$$

A.3.2 Application à la demi-sphère

Adapter les structures précédentes à la demi-sphère n'est pas forcément intuitif. Dans le cas du tétraèdre, cela n'est même pas envisageable.

Dans le cas de l'octaèdre, c'est tout naturel étant donné que ses quatre faces supérieures couvrent exactement l'hémisphère supérieur. Il suffit de partir de cette moitié d'octaèdre et de poursuivre le processus de récursion.

Dans le cas de l'icosaèdre, on constate qu'au niveau 1, les quarante faces de ce polyèdre couvrent exactement l'hémisphère supérieur. Il suffit donc de partir de cette moitié d'icosaèdre de niveau 1 et de poursuivre le processus de récursion.

A.3.3 Utilisation

Comme on a pu le voir, les angles solides de chaque facette, ne sont plus vraiment égaux, au fur et à mesure que l'on subdivise récursivement notre sphère. On va donc étudier pour chaque polyèdre de base, les rapports :

- r_- le rapport entre le plus petit angle solide et l'angle solide moyen,
- r_+ le rapport entre le plus grand angle solide et l'angle solide moyen,
- r_* le rapport entre l'écart-type des angles solides et l'angle solide moyen.

Les résultats sont donnés dans (*table A.2, p. 159*), (*table A.3, p. 159*), (*table A.4, p. 160*). On constate que le tétraèdre n'est pas vraiment utilisable, et qu'il devra donc être écarté.

niveau	faces	r_-	r_+	r_*
0	4	100%	100%	0%
1	16	67%	200%	58%
2	64	54%	281%	63%
3	256	51%	316%	63%
4	1024	51%	327%	63%
5	4096	50%	330%	63%
6	16384	50%	331%	63%

TAB. A.2 – *évolution de l'angle solide dans la subdivision récursive d'un tétraèdre*

niveau	faces	r_-	r_+	r_*
0	8	100%	100%	0%
1	32	87%	140%	23%
2	128	81%	158%	24%
3	512	79%	163%	24%
4	2048	79%	165%	24%
5	8192	79%	165%	24%
6	32768	79%	165%	24%

TAB. A.3 – *évolution de l'angle solide dans la subdivision récursive d'un octaèdre*

Les avantages et les inconvénients de cette subdivision sont les suivants :

- on ne contrôle pas le nombre de facettes (il augmente de façon géométrique)
- l'angle solide de chaque facette est quasiment le même, et tout du moins l'écart-type des angles solides est très faible par rapport à l'angle solide moyen.

niveau	faces	r_-	r_+	r_*
0	20	100%	100%	0%
1	80	95%	114%	8%
2	320	93%	119%	9%
3	1280	93%	120%	9%
4	5120	93%	121%	9%
5	20480	93%	121%	9%
6	81920	93%	121%	9%

TAB. A.4 – *évolution de l'angle solide dans la subdivision récursive d'un icosaèdre*

- la forme de chaque facette est à peu près la même, un triangle sphérique.
- le temps d'accès à une facette est proportionnel au nombre de faces dans le polyèdre de base (il faut repérer dans quelle face du polyèdre de base on se trouve) et au nombre de niveaux (il faut appliquer le processus de récursion pour atteindre la facette dans le niveau le plus fin). Étant donné que ces deux nombres sont très faibles, on peut considérer cette recherche comme étant accomplie en temps constant.
- la structure est insensible à la rotation (on n'a pas vraiment d'orientation particulière).

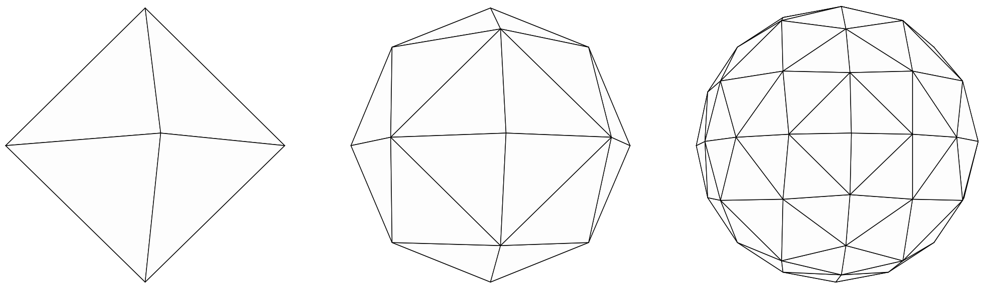

FIG. A.4 – *octaèdre, niveaux de récursion 0, 1 et 2*

A.4 Subdivision en igloo

A.4.1 Méthode

Afin d'obtenir des facettes plus régulières, on va essayer de subdiviser la sphère à la manière d'un igloo. On va commencer par diviser la sphère en bandes selon l'angle

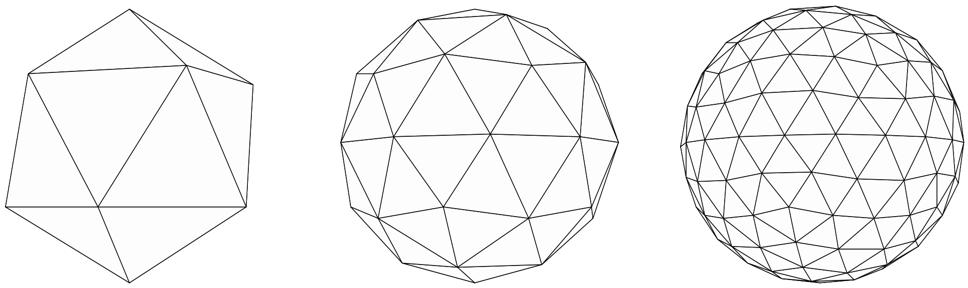

FIG. A.5 – *icosaèdre, niveaux de récursion 0, 1 et 2*

zénithal θ, avec une hauteur identique $\Delta\theta = \frac{\pi}{n_\theta}$. La bande $i \in \{0, 1, \ldots, n_\theta - 1\}$ est donc comprise entre les angles θ_i et θ_{i+1}, avec $\theta_i = i\,\Delta\theta$.

Ensuite, à l'intérieur de chaque bande, on va la diviser en blocs avec une largeur $\Delta\varphi_i = \frac{2\pi}{n_{\varphi\, i}}$, propre à la bande. On aura donc une facette délimitée de la manière suivante :

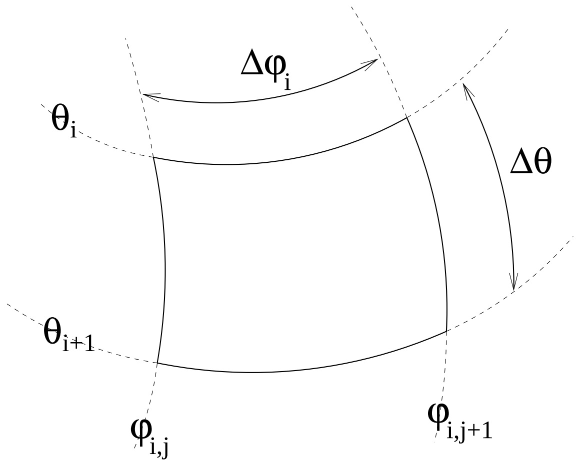

FIG. A.6 – *délimitation d'un bloc d'igloo*

Avec $\varphi_{i,j} = \left(j + \frac{1}{2}\right) \Delta\varphi_i, j \in \{0, 1, \ldots, n_{\varphi\, i} - 1\}$. Il ne faut pas oublier que cette facette qui est un quadrangle sphérique, se réduit à un triangle sphérique lorsque on se situe sur les calottes de la sphère ($i = 0$ et $i = n_\theta - 1$). Pour que cette facette soit la plus «carrée» possible, on va s'assurer que sa hauteur soit comprise entre sa largeur en haut et sa largeur en bas. On a donc :

$$\sin\theta_i\,\Delta\varphi_i \leq \Delta\theta \leq \sin\theta_{i+1}\,\Delta\varphi_i$$

Afin de vérifier cette condition, il suffit de poser :

$$\Delta\varphi_i = \frac{\Delta\theta}{\sin\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}}$$

Il reste maintenant à s'assurer que toutes nos facettes ont le même angle solide. L'angle solide d'une facette dans la bande i, $\Delta\omega_i$, vaut :

$$\begin{aligned}\Delta\omega_i &= \int_{\theta=\theta_i}^{\theta_{i+1}}\int_{\varphi=\varphi_{i,j}}^{\varphi_{i,j+1}} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \\ &= (\cos\theta_i - \cos\theta_{i+1})\,\Delta\varphi_i \\ &= 2\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\Delta\theta\end{aligned}$$

Or on souhaitait que cet angle solide soit constant, égal à $\frac{4\pi}{n}$, n étant le nombre de facettes souhaitées. Donc $\Delta\theta$ doit vérifier :

$$n \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\Delta\theta = 2\pi \ (*)$$

Évidemment, aucun de nos calculs n'est exact, étant donné que $\Delta\theta$ et les $\Delta\varphi_i$ ne peuvent prendre des valeurs quelconques (ils sont liés à n_θ et $n_{\varphi\, i}$, qui sont des entiers). On se retrouve donc avec le cheminement suivant, pour construire un igloo avec n_{voulu} facettes :

$$\begin{aligned}
& n_{voulu} \\
\Rightarrow\ & \Delta\theta_{voulu} \quad / \quad n \sin\frac{\Delta\theta_{voulu}}{2}\,\Delta\theta_{voulu} = 2\pi \\
\Rightarrow\ & n_\theta = \left[\frac{\pi}{\Delta\theta_{voulu}}\right] \\
\Rightarrow\ & \Delta\theta_{calcul} = \frac{\pi}{n_\theta} \\
\Rightarrow\ & \Delta\varphi_{i\, voulu} = \frac{\Delta\theta_{calcul}}{\sin\left(\left(i+\frac{1}{2}\right)\Delta\theta_{calcul}\right)} \\
\Rightarrow\ & n_{\varphi\, i} = \left[\frac{2\pi}{\Delta\varphi_{i\, voulu}}\right] \\
\Rightarrow\ & \Delta\varphi_{i\, calcul} = \frac{2\pi}{n_{\varphi\, i}} \\
\Rightarrow\ & n_{calcul} = \sum_{i=0}^{n_\theta-1} n_{\varphi\, i}
\end{aligned}$$

La condition sur $\Delta\theta$, exprimée dans l'équation (*), peut être approchée, en estimant $\Delta\theta$ suffisamment petit. On peut écrire :

$$\begin{aligned} n\,\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\,\Delta\theta &= 2\pi \\ \Rightarrow n\,\frac{\Delta\theta}{2}\,\Delta\theta &\approx 2\pi \\ \Rightarrow n_\theta &\approx \left[\frac{\sqrt{n\pi}}{2}\right] \end{aligned}$$

On constate, expérimentalement, qu'étant donné que n_θ est un entier, cette condition est identique à l'équation (*) dans presque tous les cas. On définit alors un igloo de la manière suivante :

Définition 51 (subdivision en igloo de la sphère) *en posant :*

$$\begin{aligned} n_\theta &= \left[\tfrac{\sqrt{n\pi}}{2}\right] \\ \theta_i &= \tfrac{i}{n_\theta}\pi,\, i \in \{0, 1, \ldots, n_\theta\} \\ n_{\varphi\,i} &= \left[2\,n_\theta\,\sin\left(\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{\pi}{n_\theta}\right)\right] \\ \phi_{i,j} &= \tfrac{\left(j+\frac{1}{2}\right)}{n_{\varphi\,i}}2\pi,\, j \in \{0, 1, \ldots, n_{\varphi\,i}-1\} \end{aligned}$$

*on définit une subdivision de la sphère en à peu près n facettes, d'angle solide et de forme presque identiques, facettes définies comme sur (*figure A.6, p. 161*).*

A.4.2 Application à la demi-sphère

L'application à la demi-sphère ne pose aucun problème.

Définition 52 (subdivision en igloo de l'hémisphère) *en posant :*

$$\begin{aligned} n_\theta &= \left[\tfrac{\sqrt{n\frac{\pi}{2}}}{2}\right] \\ \theta_i &= \tfrac{i}{n_\theta}\pi,\, i \in \{0, 1, \ldots, n_\theta\} \\ n_{\varphi\,i} &= \left[4\,n_\theta\,\sin\left(\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{\pi}{2\,n_\theta}\right)\right] \\ \phi_{i,j} &= \tfrac{\left(j+\frac{1}{2}\right)}{n_{\varphi\,i}}2\pi,\, j \in \{0, 1, \ldots, n_{\varphi\,i}-1\} \end{aligned}$$

*on définit une subdivision de l' hémisphère en à peu près n facettes, d'angle solide et de forme presque identique, facettes définies comme sur (*figure A.6, p. 161*).*

A.4.3 Utilisation

Comme on a pu le voir, les angles solides de chaque cellule ne sont donc pas vraiment égaux. On peut étudier le comportement de n_{calcul} en fonction de n_{voulu}, ainsi que le rapport entre l'écart-type des angles solides des facettes et l'angle solide moyen, rapport noté r :

	igloo sphérique		igloo hémisphérique	
n_{voulu}	n_{calcul}	r	n_{calcul}	r
20	20	2%	23	4%
40	46	4%	41	2%
60	64	2%	64	1%
80	82	2%	92	2%
100	104	1%	92	2%
200	214	1%	206	2%
300	284	1%	307	1%
400	412	2%	430	1%
500	508	1%	499	1%
1000	998	1%	1019	1%
1500	1466	1%	1469	1%
2000	2038	1%	1996	1%

TAB. A.5 – *nombre de blocs dans un igloo*

Les avantages et les inconvénients de cette subdivision sont les suivants :

- on contrôle le nombre de facettes de la subdivision (à quelques unités près).
- l'angle solide de chaque facette est quasiment le même, et tout du moins l'écart-type des angles solides est très faible par rapport à l'angle solide moyen.
- la forme de chaque facette est à peu près la même, un quadrangle sphérique (à l'exception des calottes, où l'on a des triangles sphériques).
- par contre, la structure est très sensible à la rotation (on a une orientation particulière).

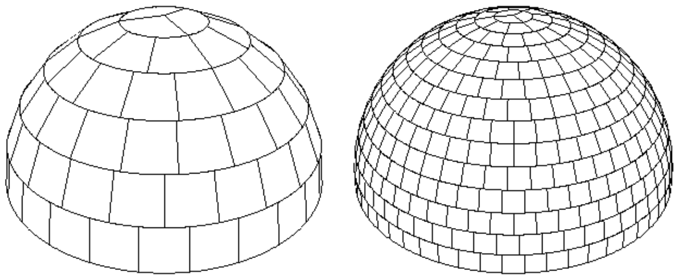

FIG. A.7 – *division en igloo de l'hémisphère*

Annexe B

Tirage de directions de BRDFs

B.1 Objectif

Dans toutes les simulations mettant en oeuvre des BRDFs, on a besoin de passer du continu au discret. Par exemple, dans le cas d'un calcul d'image, on doit résoudre l'équation du rendu. La méthode utilisée (le lancer de rayons) ou le fonctionnement de notre goniophotomètre virtuel, nous amène donc à la situation suivante :

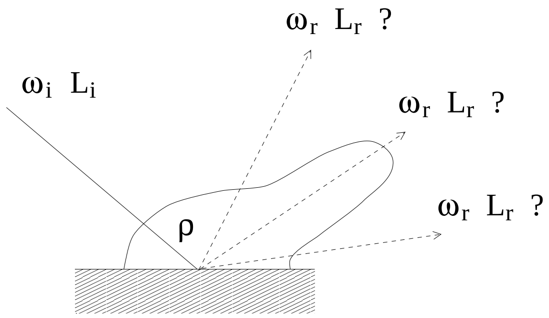

FIG. B.1 – *choix d'une direction et d'une luminance*

Étant donné un rayon incident, de direction ω_i et d'énergie associée L_i, arrivant sur une surface dont la BRDF, ρ, est connue, dans quelle direction ω_r et avec quelle énergie L_r doit-on générer un rayon réfléchi, de façon à ce que, en moyenne, lorsque l'opération est repétée, on représente correctement le comportement en réflexion de la surface.

B.2 Résolution

L'objectif de ce paragraphe n'est pas de donner des explications mathématiques très poussées sur les processus de Monte-Carlo (pour cela on pourra se référer a [VG97]), mais de donner de façon concise, les bases de cette technique. Étant donné le problème posé, on se retrouve avec deux inconnues :

$$dp(\omega_i \to \omega_r) = p(\omega_i \to \omega_r)\, d\omega_r$$
$$e(\omega_i \to \omega_r) = \frac{L_r}{L_i}$$

dp est la distribution des directions réfléchies en fonction de la direction d'incidence ω_i. La condition $\int_{\Omega+} dp(\omega_i \to \omega_r) = 1$ doit être vérifiée. e est le rapport entre l'énergie réfléchie et l'énergie incidente. La condition pour que notre tirage soit conforme à la réalité du matériau est donc que :

$$\rho(\omega_i \to \omega_r) = \frac{dL_r}{L_i\, \cos\theta_r\, d\omega_r} = \frac{L_r\, dp(\omega_i \to \omega_r)}{L_i\, \cos\theta_r\, d\omega_r} = \frac{e(\omega_i \to \omega_r)\, p(\omega_i \to \omega_r)}{\cos\theta_r}$$
$$\Rightarrow \rho(\omega_i \to \omega_r)\, \cos\theta_r = e(\omega_i \to \omega_r)\, p(\omega_i \to \omega_r)$$

On peut donc fixer l'une de nos deux inconnues (e ou p) et en déduire l'autre. Toutefois, le choix n'est pas quelconque. Si l'on choisit de fixer la probabilité p, on voit qu'en moyenne e vaut :

$$e_{moyen}(\omega_i) = \int_{\Omega+} e(\omega_i \to \omega_r)\, dp(\omega_i \to \omega_r) = \int_{\Omega+} \rho(\omega_i \to \omega_r)\, \cos\theta_r\, d\omega_r \in [0; 1]$$

Donc si en moyenne, l'énergie réfléchie est bien inférieure à l'énergie incidente, pour chaque tirage particulier, on ne sait rien sur la valeur particulière de e. De plus on cherche à avoir une convergence la plus rapide possible, ce qui va nous amener à tirer plus de rayons dans les pics de la BRDF. On parlera alors d'échantillonage d'importance. Toutefois, on ne peux pas toujours faire le choix qu'on l'on veut, étant donné que l'on va devoir inverser la probabilité afin de pouvoir faire le tirage.

B.2.1 Tirage proportionnel à $\rho(\omega_i \to \omega_r)\, \cos\theta_r$

On pose :

$$dp(\omega_i \to \omega_r) = \frac{\rho(\omega_i \to \omega_r)\, \cos\theta_r\, d\omega_r}{\int_{\Omega+} \rho(\omega_i \to \omega_{r'})\, \cos\theta'_r\, d\omega'_r}$$

On a alors :

$$e(\omega_i \to \omega_r) = \int_{\Omega+} \rho(\omega_i \to \omega_{r'}\, \cos\theta'_r\, d\omega'_r$$

On obtient donc un e qui ne dépend que de l'incidence ω_i, et qui est égal au facteur de réflexion pour cette incidence, donc compris entre 0 et 1. C'est intéressant pour répéter le processus. Ce choix est le plus exact au sens physique, puisqu'il choisit une direction réfléchie proportionnellement à l'énergie réfléchie. Cependant l'inversion de cette probabilité n'est pas toujours possible (de façon analytique). C'est pourquoi, on pourra aussi utiliser :

B.2.2 Tirage proportionnel à $\rho(\omega_i \to \omega_r)$

On pose :

$$dp(\omega_i \to \omega_r) = \frac{\rho(\omega_i \to \omega_r)\, d\omega_r}{\int_{\Omega^+} \rho(\omega_i \to \omega_{r'})\, d\omega_r'}$$

On a alors :

$$e(\omega_i \to \omega_r) = \cos\theta_r \int_{\Omega^+} \rho(\omega_i \to \omega_{r'})\, d\omega_r'$$

Cette fois e n'est pas forcément compris entre 0 et 1. Cependant, pour un bon nombre de BRDFs analytiques, la probabilité est plus facile à inverser.

Bibliographie

[Arv95] James Arvo, *Applications of irradiance tensors to the simulation of non-lambertian phenomena*, SIGGRAPH 95 Conference Proceedings (Robert Cook, ed.), Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Addison Wesley, August 1995, held in Los Angeles, California, 06-11 August 1995, pp. 335–342.

[Bec65] P. Beckmann, *Shadowing of random rough surfaces*, IEEE Tran. Ant. and Propagation **AP-13** (1965), 384–389.

[Bli77] James F. Blinn, *Models of light reflection for computer synthesized pictures*, (James George, ed.), vol. 11, July 1977, pp. 192–198.

[BS63] P. Beckmann and A. Spizzichino, *The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces*, Pergamon Press, 1963.

[Coq84] Sabine Coquillart, *Représentation de paysages et tracé de rayon*, Ph.D. thesis, École nationale supérieure des mines de Saint-Etienne, Saint-Etienne, 1984, En Francais.

[CT81] R. L. Cook and K. E. Torrance, *A reflectance model for computer graphics*, vol. 15, August 1981, pp. 307–316.

[DF97] Joel DeYoung and Alain Fournier, *Properties of tabulated bidirectional reflectance distribution functions*, Graphics Interface '97 (Wayne A. Davis, Marilyn Mantei, and R. Victor Klassen, eds.), Canadian Information Processing Society, Canadian Human-Computer Communications Society, May 1997, pp. 47–55.

[Emb94] Jean Jacques Embrechts, *Analysis and modelling of luminous reflection applied to lighting simulations*, Ph.D. thesis, Université de L'Etat à Liège, Liège, Belgium, 1994, En Français.

[Fai98] Mark D. Fairchild, *Color appearance models*, Addison-Wesley, 1998.

[Gla95] A. S. Glassner, *Principles of digital image synthesis*, Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, California (1995).

[GMN94] Jay S. Gondek, Gary W. Meyer, and Jonathan G. Newman, *Wavelength dependent reflectance functions*, Proceedings of SIGGRAPH '94 (Orlando, Florida, July 24–29, 1994) (Andrew Glassner, ed.), Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, ACM Press, July 1994, pp. 213–220.

[HK93] Pat Hanrahan and Wolfgang Krueger, *Reflection from layered surfaces due to subsurface scattering*, Computer Graphics (SIGGRAPH '93 Proceedings) (James T. Kajiya, ed.), vol. 27, August 1993, pp. 165–174.

[HTSG91] Xiao D. He, Kenneth E. Torrance, Francois X. Sillion, and Donald P. Greenberg, *A comprehensive physical model for light reflection*, Computer Graphics (SIGGRAPH '91 Proceedings) (Thomas W. Sederberg, ed.), vol. 25, July 1991, pp. 175–186.

[JKS96] A.J. van Doorn J.J. Koenderink and M. Stavridi, *Bidirectional reflection distribution function expressed in terms of surface scattering modes*, European Conference on Computer Vision, Addison Wesley, 1996, pp. 28–39.

[JMC96] C. Brusque J.-M. Coulomb, *Propriétés de réflexion des surfaces : le goniophotomètre du lcpc - performances et perspectives d'études*, Tech. Report 204, Bulletin de liaison du LCPC, July 1996.

[Kaj85] James T. Kajiya, *Anisotropic reflection models*, Computer Graphics (SIGGRAPH '85 Proceedings) (B. A. Barsky, ed.), vol. 19, July 1985, pp. 15–21.

[KMG96] Konrad F. Karner, Heinz Mayer, and Michael Gervautz, *An image based measurement system for anisotropic reflection*, Computer Graphics Forum **15** (1996), no. 3, 119–128, Proceedings of Eurographics '96. ISSN 1067-7055.

[LF97a] P. Lalonde and A. Fournier, *Generating reflected directions from BRDF data*, Computer Graphics Forum **16** (1997), no. 3, 293–300, Proceedings of Eurographics '97.

[LF97b] Paul Lalonde and Alain Fournier, *A wavelet representation of reflectance functions*, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics **3** (1997), no. 4, 329–336.

[LFTG97] Eric P. F. Lafortune, Sing-Choong Foo, Kenneth E. Torrance, and Donald P. Greenberg, *Non-linear approximation of reflectance functions*, SIGGRAPH 97 Conference Proceedings (Turner Whitted, ed.), Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Addison Wesley, August 1997, pp. 117–126.

[NRH+77] F. E. Nicodemus, J. C. Richmond, J. J. Hsia, I. W. Ginsberg, and T. Limperis, *Geometric considerations and nomenclature for reflectance*, Monograph 161, National Bureau of Standards (US), October 1977.

[ON94] Michael Oren and Shree K. Nayar, *Generalization of lambert's reflectance model*, Proceedings of SIGGRAPH '94 (Orlando, Florida, July 24–29, 1994) (Andrew Glassner, ed.), Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, ACM Press, July 1994, pp. 239–246.

[PF90] Pierre Poulin and Alain Fournier, *A model for anisotropic reflection*, Computer Graphics (SIGGRAPH '90 Proceedings) (Forest Baskett, ed.), vol. 24, August 1990, pp. 273–282.

[Pfl96] Thomas Pflaum, *Colour and reflectance in image synthesis*, Tech. report, Waterloo, Canada, 1996.

[Pho75] Bui-T. Phong, *Illumination for computer generated pictures*, Communications of the ACM **18** (1975), no. 6, 311–317.

[Rus98] Simon Rusinkiewicz, *A new change of variables for efficient brdf representation*, Eurographics Rendering Workshop 1998, Eurographics, 1998.

[SAWG91] Francois X. Sillion, James R. Arvo, Stephen H. Westin, and Donald P. Greenberg, *A global illumination solution for general reflectance distributions*, (Thomas W. Sederberg, ed.), vol. 25, July 1991, pp. 187–196.

[Sch93] Christophe Schlick, *A customizable reflectance model for everyday rendering*, Fourth Eurographics Workshop on Rendering (Michael F. Cohen, Claude Puech, and Francois Sillion, eds.), Eurographics, June 1993, held in Paris, France, 14–16 June 1993, pp. 73–84.

[Sch94a] C. Schlick, *An inexpensive BRDF model for physically-based rendering*, Computer Graphics Forum **13** (1994), no. 3, 233–246, Eurographics '94 Conference issue.

[Sch94b] Christophe Schlick, *A survey of shading and reflectance models*, Computer Graphics Forum **13** (1994), no. 2, 121–131.

[SDS95a] Eric J. Stollnitz, Tony D. DeRose, and David H. Salesin, *Wavelets for computer graphics: A primer, part 1*, IEEE Computer Graphics and Applications **15** (1995), no. 3, 76–84.

[SDS95b] Eric J. Stollnitz, Tony D. DeRose, and David H. Salesin, *Wavelets for computer graphics: Part 2*, IEEE Computer Graphics and Applications **15** (1995), no. 4, 75–85.

[Smi67] B. Smith, *Geometrical shadowing of a random rough surface*, IEEE Trans. Ant. and Propagation **AP-15** (1967), no. 5, 668–671.

[SP94] François Sillion and Claude Puech, *Radiosity and global illumination*, Morgan Kaufmann, San Francisco, 1994, excellent coverage of radiosity and global illumination algorithms.

[SS95] Peter Schröder and Wim Sweldens, *Spherical wavelets: Efficiently representing functions on the sphere*, SIGGRAPH 95 Conference Proceedings (Robert Cook, ed.), Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Addison Wesley, August 1995, held in Los Angeles, California, 06-11 August 1995, pp. 161–172.

[Tro78] T. S. Trowbridge, *Retroreflection from rough surfaces*, Journal of Optical Society of America **68** (1978), no. 9, 1225–1242.

[TS67] K. E. Torrance and E. M. Sparrow, *Theory for off-specular reflection from roughened surfaces*, Journal of Optical Society of America **57** (1967), no. 9.

[VG97] Eric Veach and Leonidas J. Guibas, *Metropolis light transport*, SIGGRAPH 97 Conference Proceedings (Turner Whitted, ed.), Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Addison Wesley, August 1997, pp. 65–76.

[War92a] Gregory J. Ward, *Measuring and modeling anisotropic reflection*, Computer Graphics (SIGGRAPH '92 Proceedings) (Edwin E. Catmull, ed.), vol. 26, July 1992, pp. 265–272.

[War92b] Gregory J. Ward, *Towards more practical reflectance measurements and models*, Graphics Interface '92 Workshop on Local Illumination, May 1992, pp. 15–21.

[WAT92] Stephen H. Westin, James R. Arvo, and Kenneth E. Torrance, *Predicting reflectance functions from complex surfaces*, Computer Graphics (SIGGRAPH '92 Proceedings) (Edwin E. Catmull, ed.), vol. 26, July 1992, pp. 255–264.

Résumé

La quête d'un photoréalisme accru en synthèse d'images passe par l'amélioration de la modélisation géométrique des scènes, des algorithmes de calcul de l'éclairement global, et des modèles locaux de réflexion. Ces modèles locaux de réflexions sont représentés par les BRDFs (fonctions de distribution de la réflectance bidirectionnelle).

Nous étudions dans ce mémoire un certain nombre de modèles analytiques de BRDFs, et les comparons à des mesures réelles de BRDFs. Cette étude nous montre que la diversité du réel ne saurait être prise en compte par un modèle unique de BRDF, et la nécessité d'utiliser directement des mesures de BRDFs en calcul d'images.

Nous présentons alors les méthodes existantes pour représenter ces mesures, et introduisons une nouvelle méthode, particulièrement adaptée au cas particulier des BRDFs. Cette méthode est basée sur des fonctions à support local et une approche hiérarchique. Afin de valider ces recompositions de BRDFs, nous introduisons aussi un critère d'erreur permettant de comparer les BRDFs entre elles.

Afin de relier BRDFs mesurées et BRDFs informatiques, nous présentons un appareil informatique simulant le comportement d'un goniophotomètre existant, appareil servant à mesurer des BRDFs. Ce goniophotomètre virtuel nous permet de valider des modèles analytiques de BRDFs, et de comparer des BRDFs réelles et leur équivalent simulé à partir de relevés sur les matériaux.

Mots clés

synthèse d'images, BRDF, représentation de mesures, goniophotomètre virtuel, simulation.

Abstract

To achieve the goal of photorealism in computer graphics means better scene geometry modeling, better global rendering algorithms, and better local reflection models. These models are represented by BRDFs (bidirectional reflectance distribution functions).

We study in this thesis some analytical BRDFs models, and compare them with measured BRDFs data. This study leads to the conclusion that real world diversity cannot be handled by a unified BRDF model, and that it is necessary to directly use measured BRDFs data in image computation.

We then present existing methods to represent these data, and we introduce a new method, particularly fitted to BRDFs special case. This method is based on locally supported functions, and a hierarchical approach. In order to validate our BRDFs reconstructions, we introduce also an error criterion so as to compare BRDFs.

To create a link between measured BRDFs and computed BRDFs, we present a software that simulates the behavior of a real goniophotometer, a device used to measure BRDFs. This virtual goniophotometer allows us to validate BRDFs analytical models, and to compare real BRDFs and the result of a simulation from measured material properties.

Keywords

computer graphics, BRDF, data representation, virtual goniophotometer, simulation