Représentation de Mesures de *brdf* à l'Aide de Fonctions à Support Local

N. Noé et B. Péroche

École des Mines de Saint-Etienne
Centre SIMADE, Laboratoire LISSE
158, Cours Fauriel
42023 SAINT-ETIENNE CEDEX
nnoe@emse.fr peroche@emse.fr

Résumé : *Les* brdf *sont la clef de voûte des algorithmes de rendu réaliste. Mais les modèles analytiques dont on dispose sont parfois limités et ne font pas ressortir certaines caractéristiques particulières du matériau (rétro-réflexion, anisotropie, off-spécularité ...). On cherche donc à utiliser des mesures de* brdf *dans les algorithmes de rendu. Un problème se pose alors : celui de la recomposition de la* brdf*. La méthode présentée ici permet de le faire en un temps d'évaluation très court, tout en respectant les propriétés de base des* brdf*.*

Mots-clés : *brdf*, approximation de mesures, recomposition.

1 Introduction

1.1 Objectif

Nous allons commencer par rappeler quelques définitions. La luminance est le flux énergétique émis par une surface, dans une direction donnée $\vec{\omega}$, par unité de surface et par unité d'angle solide projeté (unité : $W\, m^{-2}\, sr^{-1}$). La définition exacte est (θ est l'angle entre $\vec{\omega}$ et la normale à la surface dA) :

$$L(x, \vec{\omega}) = \frac{d^2\phi_r(\vec{\omega})}{dA\, \cos\theta\, d\omega}$$

On définit aussi l'éclairement comme étant le flux énergétique, par unité de surface, arrivant sur une surface pour une direction donnée (unité : $W\, m^{-2}$) :

$$E(x, \vec{\omega}) = \frac{d\phi_i(\vec{\omega})}{dA}$$

On définit alors la *brdf* (fonction de distribution de la réflectance bidirectionnelle) comme le rapport entre la luminance réfléchie selon la direction $\vec{\omega_r}$ et l'éclairement de la surface provenant de la direction $\vec{\omega_i}$:

$$\rho(x, \vec{\omega_i} \to \vec{\omega_r}) = \frac{dL_r(x, \vec{\omega_r})}{dE(x, \vec{\omega_i})} = \frac{dL_r(x, \vec{\omega_r})}{L_i(x, \vec{\omega_i})\, \cos\theta_i\, d\omega_i}$$

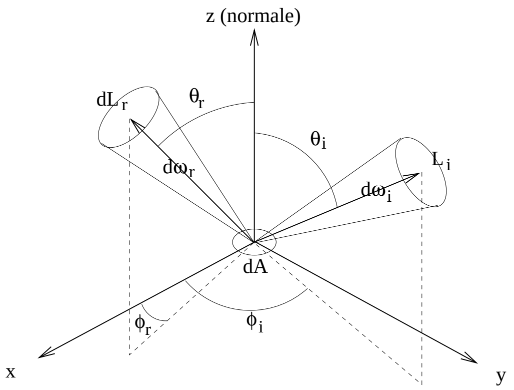

Figure 1 : *Définition de la* brdf

La *brdf* décrit en fait le comportement en réflexion d'un matériau illuminé. Les *brdf* (lorsqu'on s'affranchit de la dépendance en longueur d'onde) sont des fonctions de Ω^2 dans $\mathbb{R}$, Ω étant la sphère (ou la demi-sphère) de $\mathbb{R}^3$. Ce sont donc des fonctions à 4 paramètres réels (quatre angles). On cherche à les représenter de façon efficace, c'est à dire avec :

- une occupation mémoire raisonnable,
- une qualité de représentation acceptable,
- une rapidité d'évaluation optimale,

les données dont on dispose pouvant être des mesures ou des expressions analytiques extrêmement coûteuses en temps de calcul [7].

1.2 Contraintes

Les *brdf* ne sont pas des fonctions quelconques et elles doivent vérifier certaines propriétés particulières.

- elles sont positives, $\rho : \Omega^2 \to \mathbb{R}^+$,
- elles vérifient la conservation de l'énergie : $\forall X \in \Omega \, , \, \int_\Omega \rho\,(X, Y) \, \cos\theta_Y \, d\omega\,(Y) \leq 1$,
- elles vérifient le principe de réciprocité : $\forall\,(X, Y) \in \Omega^2 \, , \, \rho\,(X, Y) = \rho\,(Y, X)$.

Il existe un grand nombre de modèles analytiques vérifiant ces propriétés. Certains totalement empiriques [4, 5], d'autres basés sur des résultat physiques, en optique géométrique [1], ou en optique physique et en électromagnétisme [7]. Toutefois ces modèles peinent à décrire de façon générique tous les comportements possibles des matériaux, ce qui est fort logique. C'est pourquoi, de plus en plus, on s'oriente vers des *brdf* issues de mesures directes (à l'aide de goniophotomètres) ou de simulations [3]. A ce moment là se pose le problème de la reconstruction de la *brdf* à partir d'un certain nombre d'échantillons.

2 Méthodes classiques

2.1 Représentations naturelles sur la sphère

2.1.1 Harmoniques sphériques

Les harmoniques sphériques sont l'équivalent des séries de Fourier mais pour des fonctions définies de Ω dans $\mathbb{R}$. Une harmonique sphérique, s'écrit :

$$0 \leq m \leq n \, , \, Y_n^m\,(\theta, \phi) = e^{im\phi} P_n^m\,(\cos\theta)$$

où P_n^m est le polynôme de Legendre normalisé d'ordre (n, m). Dans le cas de Ω^2 :

$$F\,(\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{n} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{l} C_{n,l}^{m,k} \, Y_n^m\,(\theta_1, \phi_1) \, Y_l^k\,(\theta_2, \phi_2)$$

$$C_{n,l}^{m,k} = \iint_{\Omega^2} F\,(\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2) \, Y_n^{-m}\,(\theta_1, \phi_1) \, Y_l^{-k}\,(\theta_2, \phi_2) \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\phi_1 \, \sin\theta_2 \, d\theta_2 \, d\phi_2$$

Les *brdf* possèdent des propriétés qui permettent d'annuler bon nombre de coefficients. Comme elles ne sont définies que sur la demi-sphère supérieure, si l'on définit la *brdf* sur l'autre hémisphère comme $F\,(\pi - \theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2) = F\,(\theta_1, \phi_1, \pi - \theta_2, \phi_2) = F\,(\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2)$, on annule tous les coefficients pour lesquels $n - m$ ou $l - k$ sont impairs. De plus, la réciprocité impose que $C_{n,l}^{m,k} = C_{l,n}^{k,m}$. Mais, même après ces simplifications, il faut toujours un grand nombre de coefficients pour représenter correctement une *brdf* (notamment pour les pics spéculaires). Dès lors, comme les harmoniques sphériques sont définies sur toute la sphère, la recomposition devient très coûteuse en temps.

2.1.2 Ondelettes

Il serait trop long d'exposer ici ce que sont les ondelettes. On se référera à [2] pour les ondelettes sphériques et à [12] pour leur application aux *brdf*. On peut reprocher aux ondelettes leur difficulté de mise en oeuvre, ainsi que le fait qu'elles n'exploitent pas les propriétés des *brdf*.

2.2 Représentation par projection

Comme les *brdf* ne sont définies que sur le produit cartésien de deux hémisphères, il est facile de projeter les directions d'incidence et de réflexion, et donc la *brdf* sur le produit cartésien de deux plans. À partir de là, on peut utiliser différentes techniques (comme les polynômes de Zernicke) pour les représenter.

3 Une nouvelle approche

3.1 Idée intuitive

On peut relier, pour un couple de directions donné, la *brdf* au rebond d'un photon sur la surface et à la perte d'énergie qui en découle. Ainsi, chaque mesure correspond au trajet d'un photon. On peut voir un photon comme une distribution d'énergie. Avec un grand nombre de photons de ce type, la lumière réfléchie apparaît continue.

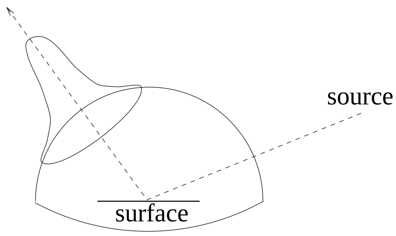

Figure 2 : *Représentation d'un "photon"*

L'avantage de cette approche est que l'on peut considérer une distribution d'énergie sur Ω^2. Pour un ensemble d'échantillons (X_i, Y_i, ρ_i), on peut alors écrire [8] :

$$\rho(X, Y) = C \sum_{i=1}^{n} K\left(d\left((X, Y), (X_i, Y_i)\right)\right) \rho_i$$

C est une constante de normalisation, K la distribution d'énergie associée aux photons, d la distance entre deux couples de directions. Avec ce modèle, plusieurs problèmes se posent :

- le choix de la distribution K,
- le calcul de la constante de normalisation C,
- le choix de la distance d sur Ω^2.

Pour la distribution, il est intéressant qu'elle ait un support local, pour la rapidité de l'évaluation. Mais se pose alors le problème du dimensionnement de cette distribution. Cette méthode n'a ni support physique ni support mathématique et reste problématique lorsque les échantillons sont répartis de manière particulière sur Ω^2. Par contre, elle présente l'avantage de proposer directement une fonction sur Ω^2.

3.2 Raccord avec une réalité mathématique

3.2.1 Quelques définitions

On rappelle que Ω représente la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. On définit $C(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions continues de Ω dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}^1([-1;1])$ comme l'ensemble des fonctions integrables de $[-1;1]$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle aussi que la transformée de Legendre de $f \in \mathcal{L}^1([-1;1])$ est définie par :

$$n \in \mathbb{N}, \quad \hat{f}(n) = 2\pi \int_{-1}^{1} f(t)\, P_n(t)\, dt$$

P_n étant le polynôme de Legendre de degré n. Soient $F \in C(\Omega)$ et $f \in \mathcal{L}^1([-1;1])$. On définit $F \otimes f \in C(\Omega)$ par :

$$X \in \Omega, \quad (F \otimes f)(X) = \int_\Omega F(Y)\, f(X \cdot Y)\, d\omega(Y)$$

où $X \cdot Y$ est le produit scalaire des vecteurs X et Y et où $d\omega$ est la mesure canonique sur la sphère. On a alors que :

$$\int_\Omega (F \otimes f)(X)\, d\omega(X) = 2\pi \int_{-1}^{1} f(t)\, dt \int_\Omega F(X)\, d\omega(X)$$

3.2.2 Intégrales singulières

Soit $\{K_\rho\}, \rho \in]-1;1[$ une sous-famille de $\mathcal{L}^1([-1;1])$ vérifiant la condition $\hat{K_\rho}(0) = 1$. On appelle $\{I_\rho\}, \rho \in]-1;1[$ la famille définie par la convolution $I_\rho(F) = K_\rho * F, F \in C(\Omega)$. $\{I_\rho\}$ est appelée intégrale singulière correspondant au noyau intégral $\{K_\rho\}$. On a évidemment la propriété suivante (grâce à la condition sur $\hat{K_\rho}(0)$) :

$$\int_\Omega I_\rho(F)\, d\omega = \int_\Omega F\, d\omega$$

Dans le cas où les $\{K_\rho\}$ vérifient en plus la propriété suivante (*) :

$$\lim_{\rho \to 1^-} \hat{K_\rho}(1) = 2\pi \lim_{\rho \to 1^-} \int_{-1}^{1} K_\rho(t)\, t\, dt = 1$$

alors $\lim_{\rho \to 1} I_\rho(F) = F$ (convergence uniforme).

3.2.3 Exemple de noyau

Un exemple de noyau que l'on peut utiliser est l'ensemble des polynômes de Bernstein (que l'on retrouve comme fonctions de base dans les Béziers). On pose :

$$B_\rho(t) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & si\ \ t \in [-1;\rho] \\ \dfrac{k+1}{2\pi(1-\rho)} \left(\dfrac{t-\rho}{1-\rho}\right)^k & si\ \ t \in [\rho;1] \end{array} \right\}$$

$\hat{B_\rho}(0)$ vaut bien 1, et B_ρ vérifie la propriété (*). On appelle capsule en X la fonction $Y \to B_\rho(X \cdot Y)$. Pour une valeur de ρ de 0.5, la figure 3 montre à quoi ressemblent ces fonctions :

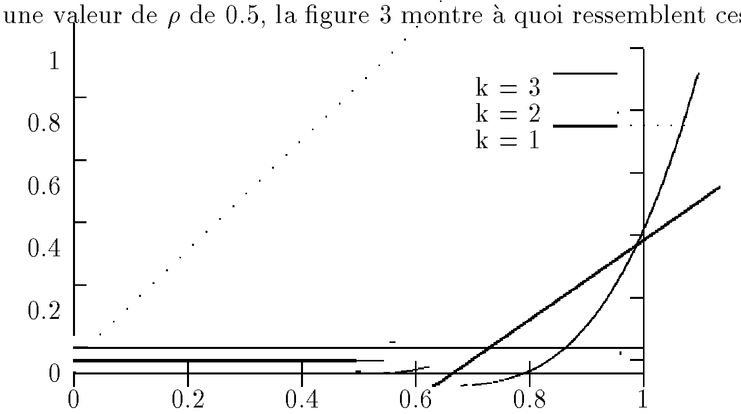

Figure 3 : *Polynômes de Bernstein de différents degrés*

3.2.4 Extension à Ω^2

Étant donnée la convergence uniforme de l'intégrale singulière, on peut étendre le résultat à Ω^2. Si l'on dispose d'une fonction $F : \Omega^2 \to \mathbb{R}$, on définit :

$$X \in \Omega, F_X(Y) = F(X,Y) \; et \; Y \in \Omega, F_Y(X) = F(X,Y)$$

On a alors :

$$F_X(Y) \approx \int_\Omega F_X(y)\, K_\rho(Y \cdot y)\, d\omega(y)$$
$$F_X(y) \approx F_y(X) = \int_\Omega F_y(x)\, K_\rho(X \cdot x)\, d\omega(x) = \int_\Omega F(x,y)\, K_\rho(X \cdot x)\, d\omega(x)$$
$$F(X,Y) \approx F_X(Y) = \iint_{\Omega^2} F(x,y)\, K_\rho(X \cdot x)\, K_\rho(Y \cdot y)\, d\omega(x)\, d\omega(y)$$

Pour simplifier l'écriture, on pose $K_\rho^{(2)}(u,v) = K_\rho(u) K_\rho(v)$.

3.2.5 Introduction d'un noyau sur Ω^2

Le noyau naturellement défini est le produit de deux noyaux. Cette dé-corrélation sur les deux parties du produit cartésien peut être évitée en introduisant un noyau sur Ω^2. Il devra respecter les conditions suivantes :

$$\iint_{[-1;1]^2} K_\rho(u,v)\, du\, dv = \frac{1}{4\pi^2} \;\; et \;\; \lim_{\rho \to 1^-} \iint_{[-1;1]^2} K_\rho(u,v)\, u\, v\, du\, dv = \frac{1}{4\pi^2}$$

Il semble naturel d'introduire comme noyau non normalisé, $K_\rho(u,v) = B_\rho\left(\frac{u+v}{2}\right)$. En définissant notre noyau ainsi, on respecte la normalisation et la propriété (*) étendue à Ω^2 :

$$K_\rho(u,v) = \frac{(k+1)(k+2)}{16\pi^2(1-\rho)^2}\, B_\rho\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

3.2.6 Discretisation

Les formules précédentes sont continues et nous cherchons à les appliquer à des mesures discrètes. On dispose donc d'un ensemble de mesures du type $\{X_i, Y_i, F_i\}$, qui ne fait pas apparaître de décomposition dé-corrélée en X et Y. Ceci rend complexe la recherche de l'élément $\Delta\omega_i^{(2)} = \Delta\omega(X)_i \Delta\omega(Y)_i$ à associer à chaque mesure. C'est pourquoi l'on va procéder à une discretisation avec un élément constant :

$$F\,(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} F_i\, K_\rho^{(2)}\,(X \cdot X_i, Y \cdot Y_i)\; \Delta\omega^{(2)}$$

Si l'on veut que l'approximation discrète soit exacte pour une fonction constante (F_0), on arrive à l'expression suivante :

$$F_0 = \sum_{i=1}^{n} F_0\, K_\rho^{(2)}\,(X \cdot X_i, Y \cdot Y_i)\; \Delta\omega^{(2)}$$
$$\Rightarrow \Delta\omega^{(2)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} K_\rho^{(2)}\,(X \cdot X_i, Y \cdot Y_i)}$$
$$\Rightarrow F\,(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i\, K_\rho^{(2)}\,(X \cdot X_i, Y \cdot Y_i)}{\sum_{i=1}^{n} K_\rho^{(2)}\,(X \cdot X_i, Y \cdot Y_i)}$$

Il faut bien voir que l'expression obtenue est une approximation de la fonction originale et en aucun cas une interpolation.

4 Approche hiérarchique

4.1 Principe

4.1.1 Réglage des paramètres

Le problème posé par la discretisation présentée précédemment est celui du choix de ρ. En effet, on ne possède a priori aucune information particulière sur la disposition des échantillons. Mais il semble logique de supposer que ceux ci ne sont pas répartis régulièrement sur Ω^2. En effet, lors de mesures, on aura tendance à sur-échantillonner dans les domaines de fortes variations. En particulier, autour de la direction miroir où se trouve la plupart du temps un pic de spécularité. Le choix d'un ρ trop petit risque de créer des trous dans les domaines où se trouvent peu d'échantillons, alors que le choix d'un ρ trop grand va introduire un lissage bien trop important là où l'on a beaucoup de mesures. La solution pourrait être celle de choisir un ρ différent pour chaque échantillon. Mais cela soulève des problèmes :

- le choix du ρ d'un échantillon implique un connaissance a priori du type d'échantillonnage,
- une trop grande diversité dans les valeurs de ρ risque de conditionner l'aspect de l'approximation,
- certaines distributions d'échantillons ne se prêtent même pas à cette méthode.

En effet, prenons le cas d'échantillons répartis sur Ω de la manière suivante :

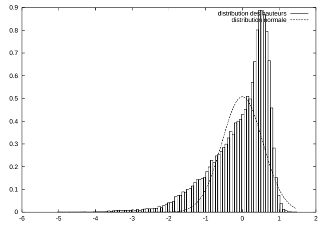

Figure 4 : *Répartition des mesures en réflexion*

Il est évidemment impossible de choisir un bon ρ. La seule solution semblerait être d'introduire deux paramètres, un en θ, l'autre en ϕ. Cependant la justification mathématique présentée plus haut et les propriétés qui nous intéressent ne seraient plus valables.

4.1.2 Une approche hiérarchique

La solution pour résoudre ce problème est d'avoir une approche similaire aux ondelettes [6]. On va chercher à représenter la fonction sur différents niveaux, en raffinant de plus en plus. On va procéder avec deux grilles sur Ω^2. En effet $I_\rho\left(I_\rho\left(F\right)\right)$ que l'on note $I_\rho^{(2)}\left(F\right)$ converge aussi vers F. On va donc discrétiser sur la grille des échantillons, mais aussi sur une grille régulière de Ω^2.

4.1.3 Calage dans un modèle analytique de *brdf.*

Il n'est pas forcément utile de représenter la *brdf* elle-même. Il suffit de représenter l'erreur commise par rapport à un modèle analytique choisi. Un modèle comme [11] est très simple à mettre en oeuvre, mais dans la plupart des cas, le plus simple est d'utiliser un modèle lambertien. Le choix de la constante n'est pas aussi simple qu'il y paraît. Au lieu de choisir la valeur moyenne des mesures (pour minimiser l'erreur commise), il semble plus logique d'isoler la véritable composante diffuse, telle qu'elle apparaît dans beaucoup de modèles analytiques ($\rho(X,Y) = \rho_d + \rho_s(X,Y)$). Le repérage de cette valeur se fait sur la courbe des mesures, triées selon leur valeur croissante :

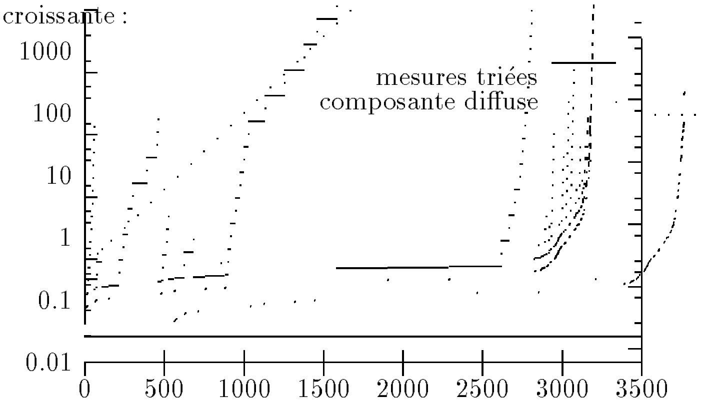

Figure 5 : *Extraction de la composante diffuse (mesures effectuées sur de la céramique*[1]*)*

Il faut donc choisir un type d'erreur. Cela peut être un critère des moindres carrés. Mais vu la façon dont on utilise la *brdf*, on peut aussi considérer l'erreur commise sur le produit brdf / cosinus.

4.2 Formalisation

On cherche donc a représenter une fonction F (la *brdf* ou l'erreur par rapport à un modèle analytique). On a comme données : $\mathcal{E}_0$ l'ensemble des échantillons de Ω^2 que l'on a mesurés, $\mathcal{R}_0 \supset \mathcal{R}_1 \supset \mathcal{R}_2 \ldots$ des parties discrètes de Ω^2 de plus en plus fines, auxquelles on associe des paramètres $\rho_0 < \rho_1 < \rho_2 \ldots$ de plus en plus proches de 1. On applique deux fois la discrétisation présentée précédemment, une fois sur $\mathcal{E}_0$ et une fois sur $\mathcal{R}_0$:

$$I_{\rho_0}(F)\,(X,Y) = C_0\,(X,Y) = \frac{\sum_{(x,y)\in\mathcal{E}_0} F(x,y)\,K_{\rho_0}\,((X,Y),(x,y))}{\sum_{(x,y)\in\mathcal{E}_0} K_{\rho_0}\,((X,Y),(x,y))}$$

$$I^{(2)}_{\rho_0}(F)\,(X,Y) = F_0\,(X,Y) = \frac{\sum_{(x,y)\in\mathcal{R}_0} C_0(x,y)\,K_{\rho_0}\,((X,Y),(x,y))}{\sum_{(x,y)\in\mathcal{R}_0} K_{\rho_0}\,((X,Y),(x,y))}$$

On obtient donc une approximation de F, appelée F_0. Mais cette approximation est très lissée et encore éloignée de F, car :

- ρ_0 est assez petit pour prévenir les trous dus à la répartition dans $\mathcal{E}_0$,
- c'est le résultat de deux lissages.

Il faut donc améliorer cette approximation. C'est pourquoi on va maintenant chercher à représenter $F - F_0$, l'erreur commise après la première approximation. Toutefois, il est probable que pour un certain nombre de valeurs de $\mathcal{E}_0$, l'erreur commise soit très faible. On se fixe donc une erreur limite (ou un pourcentage d'erreur limite), et on déduit de $\mathcal{E}_0$ un ensemble $\mathcal{E}_1$, ensemble des données sur lesquelles l'erreur commise est trop importante :

$$\mathcal{E}_1 = \{(X,Y) \in \mathcal{E}_0 \,/\, \mid F(X,Y) - F_0(X,Y) \mid > erreur\}$$

On cherche maintenant à représenter $F - F_0$ et l'on écrit :

$$I_{\rho_1}(F - F_0)\,(X,Y) = C_1\,(X,Y) = \frac{\sum_{(x,y)\in\mathcal{E}_1} F(x,y)\,K_{\rho_1}\,((X,Y),(x,y))}{\sum_{(x,y)\in\mathcal{E}_1} K_{\rho_1}\,((X,Y),(x,y))}$$

$$I^{(2)}_{\rho_1}(F - F_0)\,(X,Y) = F_1\,(X,Y) = \frac{\sum_{(x,y)\in\mathcal{R}_1} C_1(x,y)\,K_{\rho_1}\,((X,Y),(x,y))}{\sum_{(x,y)\in\mathcal{R}_1} K_{\rho_1}\,((X,Y),(x,y))}$$

Et on répète le processus, jusqu'à ce que toutes les données présentent une erreur inférieure au seuil imposé. Toutefois, lorsque le nombre de données est très faible, descendre trop bas ne présente pas d'intérêt. En effet, les capsules induites par ρ_i ne comprendraient plus que la valeur de l'échantillon lui même, et ne lisseraient plus, mais introduiraient des créneaux.

4.2.1 Avantages

Les avantages d'une telle méthode sont multiples :

- il n'est plus utile de connaître a priori des valeurs pour les ρ,
- on a un raffinement progressif et contrôlable de la représentation,
- toutes les fonctions sont à support local, donc l'évaluation est très rapide,
- on a une décomposition analogue dans sa symétrie à celle des harmoniques sphériques.

1. Mesures effectuées au LCPC, avec leur goniophotomètre, et qu'ils nous ont gracieusement communiquées.

Bien que le cardinal des ensembles $\mathcal{R}_i$ augmente très vite, le nombre réel de coefficients non nuls reste lui très petit. En fait, la formalisation peut être réécrite sous la forme :

$$\mathcal{E}_i = \{(X,Y) \in \mathcal{E}_{i-1} \,/\, \mid F(X,Y) - F_0(X,Y) - \ldots - F_{i-1}(X,Y) \mid > erreur\}$$
$$F_i\,(X,Y) = \frac{\sum_{(x,y)\in\mathcal{R}'_i} C_i(x,y)\,K_{\rho_i}\,((X,Y),(x,y))}{\sum_{(x,y)\in\mathcal{R}'_i} K_{\rho_i}\,((X,Y),(x,y))}$$
$$C_i\,(X,Y) = \frac{\sum_{(x,y)\in\mathcal{E}_i} F(x,y) - F_0(x,y) - \ldots - F_{i-1}(X,Y)\,K_{\rho_i}\,((X,Y),(x,y))}{\sum_{(x,y)\in\mathcal{E}_i} K_{\rho_i}\,((X,Y),(x,y))}$$

en définissant $\mathcal{R}'_i$ comme la partie de $\mathcal{R}_i$ telle que $C_i(X,Y)$ soit non nul, c'est à dire l'intersection de $\mathcal{R}_i$ avec $\mathcal{E}_i$ augmenté de la taille de ses capsules. On a alors :

$$F = F_0 + F_1 + F_2 + \ldots$$

4.3 Respect des contraintes

4.3.1 Principe de réciprocité

Dans le cas où F est une *brdf*, F vérifie $F(X,Y) = F(Y,X)$. On peut alors écrire que :

$$I_\rho\,(F)\,(X,Y) = \iint_{\Omega^2} F(x,y)\,K_\rho^{(2)}\,(x\cdot X, y\cdot Y)\;d\omega(x)\,d\omega(y)$$
$$= \frac{\iint_{\Omega^2} F(x,y)\,K_\rho^{(2)}\,(x\cdot X, y\cdot Y)\;d\omega(x)\,d\omega(y) + \iint_{\Omega^2} F(y,x)\,K_\rho^{(2)}\,(y\cdot X, x\cdot Y)\;d\omega(y)\,d\omega(x)}{2}$$
$$= \iint_{\Omega^2} F(x,y)\,\frac{K_\rho^{(2)}\,(x\cdot X, y\cdot Y) + K_\rho^{(2)}\,(y\cdot X, x\cdot Y)}{2}\,d\omega(x)\,d\omega(y)$$

Il suffit donc de définir un nouveau noyau :

$$L_\rho^{(2)}\,((X,Y),(x,y)) = \frac{K_\rho^{(2)}\,(x\cdot X, y\cdot Y) + K_\rho^{(2)}\,(y\cdot X, x\cdot Y)}{2}$$

Ce noyau est évidemment symétrique en X et en Y, et son utilisation permet de respecter la contrainte de réciprocité, tout en exploitant cette propriété pour augmenter artificiellement le nombre de mesures.

4.3.2 Conservation de l'énergie

Il n'est pas possible d'obtenir une expression analytique simple de la conservation de l'énergie. Le seul commentaire que l'on peut formuler est que si l'on a suffisamment d'échantillons, l'approximation sera satisfaisante et donc, par convergence uniforme, la conservation de l'énergie sera vérifiée.

4.3.3 Isotropie

L'isotropie est une propriété commune à un grand nombre de matériaux, et cette hypothèse est faite dans tous les modèles à base physique. Seuls les modèles de [9, 10, 5, 4] introduisent une anisotropie. Un matériau est anisotrope si son comportement (ici en réflexion) varie suivant son orientation. C'est le cas de la plupart des matériaux ayant subi un traitement de surface. Donc une *brdf* est isotrope lorsque :

$$\forall\,(X,Y) \in \Omega^2, \forall \phi \in [0;2\pi]\;F\,(X,Y) = F\,(X+\phi, Y+\phi)$$

En appelant $X+\phi$, la rotation d'angle ϕ du vecteur X autour de la normale. On montre facilement que les intégrales singulières conservent l'isotropie :

$$\begin{aligned}
I_\rho^{(2)}(F)\,(X+\phi, Y+\phi) &= \textstyle\iint_{\Omega^2} F(x,y)\,K_\rho^{(2)}\,(x\cdot(X+\phi), y\cdot(Y+\phi))\;d\omega(x)\,d\omega(y)\\
&= \textstyle\iint_{\Omega^2} F(x,y)\,K_\rho^{(2)}\,((x-\phi)\cdot X, (y-\phi)\cdot Y)\;d\omega(x)\,d\omega(y)\\
&= \textstyle\iint_{\Omega^2} F\,(x+\phi, y+\phi)\;K_\rho^{(2)}\,(x\cdot X, y\cdot Y)\;d\omega(x)\,d\omega(y)\\
&= \textstyle\iint_{\Omega^2} F(x,y)\,K_\rho^{(2)}\,(x\cdot X, y\cdot Y)\;d\omega(x)\,d\omega(y)\\
&= I_\rho^{(2)}(F)\,(X,Y)
\end{aligned}$$

Il devient donc naturel de définir le noyau isotrope comme :

$$K_\rho^{iso}\left((x,y),(X,Y)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} K_\rho^{(2)}\left(x\cdot(X+\phi), y\cdot(Y+\phi)\right)\, d\phi$$

Il est possible d'obtenir une expression analytique de cette fonction. Mais à ce jour, aucun test conséquent n'a été réalisé.

5 Implémentation

5.1 Subdivision hiérarchique

Afin d'appliquer la méthode présentée, on doit disposer d'une subdivision régulière et hiérarchique de Ω^2, donc de Ω. Il existe trois polyèdres réguliers dont les faces sont des triangles équilatéraux et dont les sommets se situent sur une sphère. Ces polyèdres sont le *tetraèdre* (4 faces), l'*octaèdre* (8 faces) et l'*icosaèdre* (20 faces). À partir des ces polyèdres, on descend d'un niveau en subdivisant chaque face en quatre nouveaux triangles équilatéraux. Les trois sommets ainsi crées sont recalés afin de se situer sur la sphère. En procédant ainsi de façon recursive, on peut obtenir une division avec :

$$S_n = (S_0 - 2)\cdot 4^n + 2\ ,\ A_n = A_0 \cdot 4^n\ ,\ F_n = F_0 \cdot 4^n$$

où S_n, A_n, F_n sont respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et de faces après n subdivisions. (S_0, A_0, F_0) valent respectivement $(4,6,4)$, $(6,12,8)$, $(12,30,20)$ pour un tetraèdre, un octaèdre et un icosaèdre. Les faces triangulaires obtenues sont toutes identiques, donc valent le même angle solide. Voilà un icosaèdre après deux subdivisions (soit 320 facettes) :

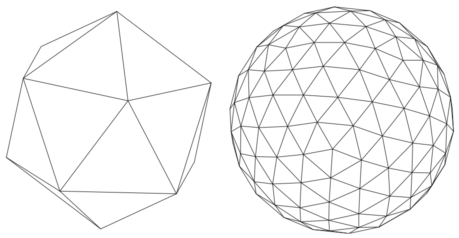

Figure 6 : *Icosaèdre*

Le paramètre ρ associé à chaque niveau de cette hiérarchie est le produit scalaire entre deux sommets d'un des triangles (constant car tous les triangles sont égaux). Ce qui nous donne :

$$\rho_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\ ,\ \rho_{i+1} = \cos\left(\frac{\cos^{-1}\rho_i}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\rho_i}{2}}$$

5.2 Résultats

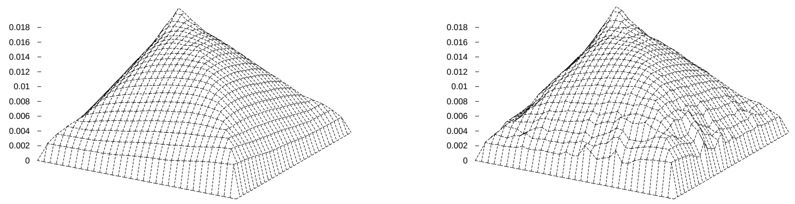

Figure 7 : *Recomposition des mesures de* brdf *d'une route*

La figure ci-dessus représente la recomposition d'une *brdf* issue de mesures réelles (*brdf* d'un morceau de route, 2677 mesures). On a travaillé sur trois niveaux. L'hémisphère a été recadrée sur un carré.

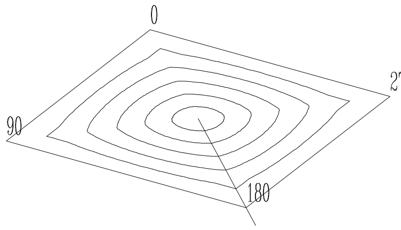

Figure 8 : *Correspondance entre l'hémisphère et le plan*

Cette correspondance conserve l'angle ϕ ($180°$ correspond à la direction spéculaire idéale). On peut voir sur la figure 8 les courbes iso-θ. La recomposition présentée correspond à une incidence ($45°$) non présente dans les mesures, et obtenue par interpolation.

niveau initial - niveau final	erreur acceptée par échantillon	nombre de noyaux (% du maximum)	erreur globale par échantillon	temps d'évaluation par élément de Ω^2
2-2	0	1944 (7.40741%)	0.998099	0.101483ms
2-3	0	10224 (2.33207%)	0.752765	0.245902ms
2-4	0	34030 (0.485987%)	0.383085	0.464481ms
4-4	1	432 (0.00658151%)	0.701142	0.058548ms

Figure 9 : *Différents essais sur des mesures de* brdf *de céramique*

Ces chiffres correspondent à la céramique présentée plus haut, avec 3210 mesures. L'occupation mémoire est raisonnable, puisque l'icosaèdre peut servir pour toutes les *brdf* utilisées. Les valeurs associées aux noyaux sont stockées, par niveau, dans des matrices "à trous". La taille mémoire est donc proportionnelle au nombre de noyaux.

6 Conclusion

La méthode décrite ici permet de représenter des *brdf* de façon cohérente, en respectant les contraintes et en utilisant les propriétés particulières de ces fonctions. C'est une approche hiérarchique qui permet d'affiner l'erreur commise, tout en étant très rapide, grâce à l'utilisation de noyaux à support local. Cette méthode se rapproche ainsi des ondelettes sphériques étendues à Ω^2, tout en étant beaucoup plus simple à mettre en oeuvre. De plus, le lissage des données permet de limiter les problèmes dus aux erreurs de mesures.

Références

[1] R. L. Cook and K. E. Torrance, *A reflectance model for computer graphics*, Computer Graphics, vol. 15, 1981, pp. 307-316.

[2] P. Schröder and W. Sweldens, *Spherical Wavelets: Efficiently Representing Functions on the Sphere*, Computer Graphics, vol. 29, 1995, pp. 161-172.

[3] J. S. Gondek, G. W. Meyer and J. G. Newman, *Wavelength Dependent Reflectance Functions*, Computer Graphics, vol. 28, 1994, pp. 213-220.

[4] C. Schlick, *An Inexpensive BRDF Model for Physically-Based Rendering*, Computer Graphics Forum, vol. 13., 1994, pp. 233-246.

[5] G. J. Ward, *Measuring and Modeling Anisotropic Reflection*, Computer Graphics, vol. 26, 1992, pp. 265-272.

[6] R. Brand, W. Freeden and J. Fröhlich, *An Adaptative Hierarchical Approximation Method on the Sphere Using Axisymmetric Locally Supported Basis Functions*, AGTM Report 130, University of Kaiserslautern, 1995.

[7] X.D. He, K. E. Torrance, F. X. Sillion and D. P. Greenberg, *A Comprehensive Physical Model for Light Reflection*, Computer Graphics, vol. 25, 1991, pp. 175-186.

[8] T. Pflaum, *Colour and Reflectance in Image Synthesis*, Master Thesis, University of Waterloo, 1996.

[9] J. T. Kajiya, *Anisotropic Reflection Models*, Computer Graphics vol. 19, 1985, pp. 15-21.

[10] P. Poulin and A. Fournier, *A Model for Anisotropic Reflection*, Computer Graphics vol. 24, 1990, pp. 273-282.

[11] E. Lafortune, S. Foo, K. E. Torrance and D. P. Greenberg, *Non-Linear Approximation of Reflectance Functions*, Computer Graphics vol. 31, 1997.

[12] P. Lalonde and A. Fournier, *Generating Reflected Directions from BRDF Data*, Computer Graphics Forum, vol. 16, 1997, pp. 293-300.